实变函数论讲义

程伟

2019年12月21日

目录

引言

0.1 Riemann 积分的缺陷

第一章　集合与映射

1.1　集合论

我们回忆一下集合论最基本的一些概念和记号。我们假设 A, B, X 为集合，x, y 为集合的元。

$x \in A$	x 为集合 A 的元;
$x \notin A$	x 不为集合 A 的元;
$A \subset B$	A 为 B 的子集，即 $x \in A \Rightarrow x \in B$;
$A = B$	$A \subset B$ 且 $B \subset A$，即 $x \in A \Leftrightarrow x \in B$;
$A \supset B$	$B \subset A$;
$A \cap B$	集合 $\{x : x \in A$ 且 $x \in B\}$;
$A \cup B$	集合 $\{x : x \in A$ 或 $x \in B\}$;
$A \times B$	集合 $\{(x, y) : x \in A$ 且 $y \in B\}$。称作 A 和 B 的 Descartes 积;
$A \setminus B$	集合 $\{x : x \in A$ 且 $x \notin B\}$;
$\complement_X A, \complement A, A^c$	若 $A \subset X$，指 A 相对于 X 的补集，即 $X \setminus A$。
$A \triangle B$	集合 $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$。称作 A 和 B 的对称差;
$\mathcal{P}(X)$	集合 X 所有子集构成的集合族。称作 X 的幂集。

1.1.1　关系

定义 1.1. 从 X 到 Y 的一个（有序）关系是指 $X \times Y$ 的一个子集 R。若 $(x, y) \in R$，我们记作 xRy。若 $X = Y$，则称 R 为 X 上的关系。

例 1.2. 设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$。若 R 为 X 上通常的关系“$<$”，则 R 为序对

$$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}.$$

若 xRy 意味着 $x|y$（即 x 可被 y 整除），则

$$R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}.$$

定义 1.3. 设 R 为从 X 到 Y 的关系，$A \subset X$，$B \subset Y$。则称集合

$$R(A) = \{y \in Y : xRy \text{ 对某 } x \in A\}$$

为 A 在 R 下的像，称集合

$$R^{-1}(B) = \{x \in X : xRy \text{ 对某 } y \in B\}$$

为 B 在 R 下的原像。

注 1.4. 设 R 为从 X 到 Y 的关系。我们引入 R^{-1} 为从 Y 到 X 的关系:

$$yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy.$$

R^{-1} 称作关系 R 的反关系。

定义 1.5. 设 R 为从 X 到 Y 的关系。我们称集合

$$R^{-1}(Y) = \{x \in X : xRy \text{ 对某 } y \in Y\}$$

为 R 的定义域，称集合

$$R(X) = \{y \in Y : xRy \text{ 对某 } x \in X\}$$

为 R 的值域。

例 1.6. 设 X, Y 为非空集合，$F : X \to Y$ 为一映射，F 可以看成一个从 X 到 Y 的关系满足以下条件: (i) F 的定义域为 X; (ii) 若 xFy 且 xFz，则 $y = z$。我们的定义表明

◦ 任给 $x \in X$，对至少一个 $y \in Y$，xFy;

◦ 对至多一个 $y \in Y$，xFy，即 $F(\{x\}) := \{y \in Y : (x, y) \in F\}$ 为单点集。

此时这个唯一的使得 $F(\{x\}) = \{y\}$ 的 $y \in Y$ 称作 x 在 F 下的像，记作 $F(x)$。关系 F 可以表示成

$$F = \{(x, y) \in X \times Y : y = F(x)\}.$$

关于映射的其他基本概念我们就不在这里赘述。

例 1.7. 设 X, Y 为非空集合，我们称 $F : X \rightsquigarrow Y$ 为一集值映射若对任意 $x \in X$ 存在 Y 的非空子集 $F(x)$。最常见的集值映射包括映射 f 的"逆" f^{-1}，局部 Lipschitz 函数的广义导数等。这里我们将集值映射 F 理解成从 X 到 Y 的关系只需使得其定义域非空即可，而无需要求例1.6中的条件 (ii)。此时 $F(\{x\})$ 不必是单点集。

例 1.8. 集合 X 上的偏序是一类重要的关系。设 X 为非空集合，X 上的关系"$\leqslant$"称作偏序若 (1) 任给 $x \in X$，$x \leqslant x$（自反性）；(2) 若 $x \leqslant y$，$y \leqslant z$，则 $x \leqslant z$（传递性）；(3) 若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x$，则 $x = y$（反对称性）。

例 1.9. 设 X 为一非空集合，X 上的关系 R 称作等价关系若
- xRx 对任意 $x \in X$（自反性）；
- 若 xRy，则 yRx（对称性）；
- 若 xRy 且 yRz，则 zRz（传递性）。

通常我们用"$\sim$"表示一个集合上的等价关系。任何一等价关系决定了一个等价类

$$[x] := \{y \in X : x \sim y\}.$$

由选择公理，我们能保证我们在每个等价类 $[x]$ 可以选取一个代表元。我们称集合

$$X/\sim := \{[x] : x \in X\} \subset \mathcal{P}(X)$$

为集合 X 关于等价关系 $\sim$ 的商集。$\pi : x \mapsto [x]$ 称作商映射。

思考题：非空集合 X 的一个分划是指 X 的一个子集族 $\mathcal{A}$ 满足 (1) 任意 $A \in \mathcal{A}$ 均非空; (2) 任给 $A, B \in \mathcal{A}$, 若 $A \neq B$, 则 $A \cap B = \varnothing$; (3) $\cup_{A \in \mathcal{A}} A = X$。我们是否可以说 X 上的等价关系与 X 上的分划是一一对应的？

1.1.2 对等・集合的基数

在集合论中，集合元素的个数是一个基本问题。

定义 1.10. 集合 A 与 B 称作**对等**，记作 $A \sim B$，若存在 $f : A \to B$ 为一双射。

对任意集合族 $\mathcal{A}$，上述对等的概念给出了一个等价关系。后面我们引入的所谓集合 A 的基数（或者势）card (A) 可以看成 $\mathcal{A}$ 关于上述等价关系 $\sim$ 的一个等价分类。稍后我们具体讨论这个概念。

例 1.11. 我们先来考虑几个简单的例子。

(1) $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$，$\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}+1$。

(2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$。

定义函数 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$：

$$f(i,j) = 2^{i-1}(2j-1), \qquad (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

由算术基本定理（即整数的唯一分解定理），任给 $n \in \mathbb{N}$，n 有如下表示：

$$n = 2^p \cdot q, \qquad p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, q \in 2\mathbb{N}+1.$$

这表明 f 为满射。f 为单射易证。

(3) $(-1,1) \sim \mathbb{R}$。

定义函数 $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$：

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}, \quad x \in (-1,1),$$

则 f 为所需的双射。

设 X 和 Y 为非空集合。我们描述关系 $\operatorname{card}(X) \leqslant \operatorname{card}(Y)$ 若存在 X 到 Y 的单射。注意到这里我们并没有给出 $\operatorname{card}(X)$ 和 $\operatorname{card}(Y)$ 的具体的含义。我们后面分别称之为集合 X 和 Y 的基数。容易看出，关系“$\leqslant$”满足自反性和传递性。事实上，我们将证明这一关系还满足反对称性，从而给出所有集合的基数的全体上的偏序关系。

定理 1.12 (Schröder-Bernstein[1]). *设 X 和 Y 为非空集合。若 $\operatorname{card}(X) \leqslant \operatorname{card}(Y)$ 且 $\operatorname{card}(Y) \leqslant \operatorname{card}(X)$，则存在 X 到 Y 的双射。*

1.1.3 集合族（列）

设 $\mathcal{A}$ 为一集合族，我们通常需要一个公理：*存在一个集合 X 使得所有的 $A \in \mathcal{A}$ 均包含于 X。*该公理允许我们定义集合的任意并集。事实上，假设 $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ 为一集合族（即一个映射 $I \to \mathcal{P}(X)$），我们定义 $\mathcal{A}$ 的并集为

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in X : x \in A_i \text{ 对某 } i \in I\}.$$

换句话说，集合族 $\mathcal{A}$ 的并集为满足上面公理的集合 X 中*最小的集合*。类似我们可以定义 $\mathcal{A}$ 的交集为

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in X : x \in A_i \text{ 对任意 } i \in I\}.$$

[1]专著 [16] 给出了下面定理的一些历史注记。作者指出（第 33 页），定理1.12是 Cantor 错失的（他渴望证明它），后来由 Schröder 和 Bernstein 各自独立证明。

命题 1.13. （De Morgan 法则） 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为集合族，则

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

接下来，我们来讨论集合族的乘积。设 $\mathcal{A}$ 为一集合族，$\{X_i\}_{i\in I}$ 包含于 $\mathcal{A}$，即存在映射 $I \to \mathcal{A}$ 使得任给 $i \in I$ 其像为 X_i。我们可以看出，若设 $U = \cup_{i\in I} X_i$，则 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的乘积由元 (x_i) 组成，这里 $x_i \in U$ 且以 $i \in I$ 为标签。换句话说，它恰恰是所有这样的映射 $f : I \to U$ 组成：任给 $i \in I$，$f(i) \in X_i$。我们记 $\{X_i\}_{i\in I}$ 得乘积为

$$\prod_{i\in I} X_i.$$

很明显 $\prod_{i\in I} X_i$ 中两个元 (x_i) 和 (y_i) 相同当且仅当任给 $i \in I$，$x_i = y_i$。我们称 x_i 为 (x_i) 的第 i 个坐标。

注 1.14. 若对某 $j \in I$，$X_j = \varnothing$ ，很明显此时 $\prod_{i\in I} X_i = \varnothing$。由选择公理，若每一 X_i 均非空，则 $\prod_{i\in I} X_i \neq \varnothing$。此时，映射 $\pi_i : (x_i) \mapsto x_i$，$i \in I$，称作**从乘积 $\prod_{i\in I} X_i$ 到 X_i 的投影**。

第二章　准备工作

2.1　集合论

直观地说，我们可以将**集合**看成一些具有共同特性的“对象”的全体，如全体素数、直线上的点等。组成集合的对象称作元素，如一个素数、直线上一个点等。集合自身也可以看成某个集合的元素，比如一条平面上的直线可以看成平面上所有直线组成的集合的元素。此时，我们将集合的集合称作**类**或**族**。

严格的集合的概念要基于一些集合论公理。除非我们必须面对，我们不去讨论这些公理。

我们罗列一些基本的事实:

(1) 我们称集合 A 包含于集合 B（或 A 为 B 的子集），记作 $A \subset B$（或 $B \supset A$），若任给 $x \in A$，$x \in B$。

(2) 集合 X 的全部子集构成的类称作 X 的**幂集**，记作 2^X，2^X 上自然的有一个偏序结构，即集合的包含关系：$A \leqslant B \Leftrightarrow A \subset B$。

(3) 集合 A 与集合 B 的**交集**记作 $A \cap B$，$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \in B\}$；集合 A 与集合 B 的**并集**记作 $A \cup B$，$A \cap B = \{x : x \in A \text{ 或 } x \in B\}$。

(4) 按照包含关系确定的偏序，$A \cap B = A \wedge B$，$A \cup B = A \vee B$，其中 $\wedge$ 和 $\vee$ 为相应的格运算。

(5) 我们通常将集合族写成 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$，其中 I 为指标集。(后面我们将给出相关的严格说法)

2.1.1　集合的运算

集合的交与并

下面是一些基本性质:

1) 交换律:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$$

2) 结合律：

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

3) 结合律：

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

若 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为集合族，

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x: \text{对某 } \alpha \in I, x \in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x: \text{对任意 } \alpha \in I, x \in A_\alpha\}.$$

例 2.1. 设 f 为 $[a,b]$ 上的实函数，则

$$[a,b] = \bigcup_{n \geqslant 1} \{x \in [a,b] : |f(x)| < n\},$$
$$\{x \in [a,b] : |f(x)| > 0\} = \bigcup_{n \geqslant 1} \{x \in [a,b] : |f(x)| > \frac{1}{n}\}.$$

集合的差与补

定义 2.2. 设 A, B 为集合，定义 A 关于 B 的**差集**，记作 $A \setminus B$，为

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

若 A 为 X 的子集，此时定义 A（关于 X）的**补集**，记作 A^c，为

$$A^c = \{x \in X : x \notin A\} = X \setminus A.$$

集合 A 与 B 的**对称差**，记作 $A \triangle B$，为

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

假设 $A, B \subset X$，我们有以下基本性质：

1) $A \cup A^c = X$，$A \cap A^c = \varnothing$，$(A^c)^c = A$，$X^c = \varnothing$，$\varnothing^c = X$；

2) $A \setminus B = A \cap B^c$；

3) $A \supset B \Rightarrow A^c \subset B^c$，$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \subset B^c$ 且 $B \subset A^c$。

命题 2.3. （De Morgan 法则） 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为集合族，则

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c, \tag{2.1}$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c. \tag{2.2}$$

思考题：证明命题2.3的 De Morgan 法则。

集合列的极限（集）

定义 2.4. 设 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为**单调递增**集合列，即 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_k\subset\cdots$，则称 $\{A_k\}$ 的**极限**为

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{k\geqslant 1} A_k.$$

类似，设 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为**单调递减**集合列，即 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_k\supset\cdots$，则称 $\{A_k\}$ 的**极限**为

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k\geqslant 1} A_k.$$

注 2.5. 我们知道幂集 2^X 上天然地有由集合包含关系 “$\subset$” 决定的偏序关系，所谓单调递增或递减的集合列为 2^X 中的全序子集族，此时定义的 “极限” 实际上分别是该子集族的上确界和下确界。事实上，对任意集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$，关于上述偏序，

$$\sup_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha, \quad \inf_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha.$$

这个角度对于理解无论集合列、数列还是函数列的上下极限的概念的理解有一定的帮助。

定义 2.6. 设 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为集合列，对任给 $k\in\mathbb{N}$，定义

$$B_k = \bigcup_{i\geqslant k} A_i, \quad C_k = \bigcap_{i\geqslant k} A_i.$$

显然 $\{B_k\}$ 与 $\{C_k\}$ 分别单调递减和单调递增，其极限均存在，定义

$$\limsup_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} B_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{i\geqslant k} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i\geqslant k} A_i,$$

$$\liminf_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} C_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{i\geqslant k} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i\geqslant k} A_i,$$

分别为 $\{A_k\}$ 的**上限集**与**下限集**。

下面的事实很好地刻画了集合列的上、下限集。

定理 2.7. 若 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为集合列，则

$$\limsup_{k\to\infty} A_k = \{x:\ 任给\ k\in\mathbb{N},\ 存在\ i\geqslant k,\ 使得\ x\in A_i\}; \tag{2.3}$$

$$\liminf_{k\to\infty} A_k = \{x:\ 存在\ k_0\in\mathbb{N},\ 使得任给\ i\geqslant k_0, x\in A_i\}. \tag{2.4}$$

证明：我们仅证明第一个等式，另一个等式类似。事实上，可由 $x\in\limsup_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i\geqslant k} A_i \Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N}, x\in\bigcup_{i\geqslant k} A_i \Leftrightarrow \forall k\in\mathbb{N}, \exists i\geqslant k, x\in A_i$ 得到。 □

例 2.8. 设 $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为实函数序列，我们来刻画一下 $\{f_n\}$ 的不收敛点集

$$D=\{x\in\mathbb{R}:\ 当\ n\to\infty\ 时\ f_n(x)\not\to f(x)\}.$$

为此我们定义

$$E_{n,k}=\{x:|f_n(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\},\quad k,n\in\mathbb{N}.$$

我们知道 $x\in D$，即 $f_n(x)\not\to f(x)$ 等价于存在 k_0 使得 x 属于无穷多个 E_{n,k_0}，也就是说，存在 k_0 使得 $x\in\limsup_{n\to\infty} E_{n,k_0}$。这表明

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\limsup_{n\to\infty} E_{n,k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i\geqslant n}\{x:|f_i(x)-f(x)|\geqslant\frac{1}{k}\}.$$

这个例子中，我们将函数列收敛这一分析性质用集合论的语言表达出来，而这种处理今后还要经常用到。这种处理方式的优越性，在实变函数论中将得到很好地体现。为了今后的进一步应用，读者逐步熟悉这种处理方式可能是必要的。这也是我们必须进一步探讨集合论相关问题的原因之一。

集合的直积

这里我们先考虑有限个集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的直积

$$\prod_{i=1}^{n} A_i=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n): x_i\in A_i, 1\leqslant i\leqslant n\}.$$

需要指出，这里我们并没有说明所谓 n 元组 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 定义的合理性，这一点我们将在后面一并处理集合族的直积时再指出。

2.1.2 映射・基数

映射

设 X,Y 为非空集合，$f:X\to Y$ 为一映射，也就是说对每一 $x\in X$，都有 Y 中点 $f(x)$ 与之对应。

定义 2.9. 对任给 $A \subset X$ 和 $B \subset Y$，定义 A 在 f 下的**像**与 B 关于 f 的**原像**分别为

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x), x \in A\}, \quad f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

f 称作**满射**若 $f(X) = Y$。f 称作**单射**若对 $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$。f 称作**双射** (或**一一映射**) 若 f 既为单射亦为满射。若 f 为双射, 则可定义 f 的**逆映射**$f^{-1} : Y \to X$，即任给 $y \in Y$，$f^{-1}(y) = x$，其中 $f(x) = y$。

若映射 $f : X \to Y$，$g : Y \to Z$，则 $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x)), x \in X$ 定义了 f 与 g 的复合映射 $h : X \to Z$。

在继续之前, 我们先来看前面提到的集合族的直积的问题。设 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 为集合族，则

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{x : x : I \to \cup_{\alpha \in I} X_\alpha, \text{使得对任给 } \alpha \in I, x(\alpha) \in A_\alpha\}.$$

由此，所有 X 到 Y 的映射的全体可以看成（无穷）乘积空间

$$Y^X = \prod_{x \in X} Y.$$

定义 2.10. 设 $A \subset X$，定义 A 上的**特征函数**

$$\mathbf{1}_A = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

通过特征函数，我们可以将集合的问题与集合上的函数的问题联系起来。

设 $F(X)$ 为所有 X 到 $\mathbb{R}$ 的函数全体构成的向量空间，对 $f, g \in F(X)$ 定义格运算

$$f \vee g = \max\{f, g\}, \quad f \wedge g = \min\{f, g\},$$

则 $F(X)$ 为一（向量）格。不难验证，对 $A, B \subset X$，

$$\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_{A \vee B} = \mathbf{1}A \vee \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_{A \wedge B} = \mathbf{1}_A \wedge \mathbf{1}_B$$

建立了集合上的函数与集合之间的联系。

思考题：验证以下关于特征函数的基本性质：

1. $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}A \cap B$;
2. $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$;
3. $\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B)$;
4. $\mathbf{1}_{A\triangle B} = |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B|$;
5. $\mathbf{1}_{\limsup_{k\to\infty} A_k} = \limsup_{k\to\infty} \mathbf{1}_{A_k}$;
6. $\mathbf{1}_{\liminf_{k\to\infty} A_k} = \liminf_{k\to\infty} \mathbf{1}_{A_k}$。

集合的对等

在集合论中，集合元素的个数是一个基本问题。

定义 2.11. 集合 A 与 B 称作**对等**，记作 $A \sim B$，若存在 $f : A \to B$ 为一双射。

上述对等的概念给出了幂集 2^X 上的一个等价关系，即 (1) $A \sim A$; (2) 若 $A \sim B$，则 $B \sim A$; (3) 若 $A \sim B, B \sim C$，则 $A \sim C$。后面我们引入的所谓集合的基数（或者势）可以看成幂集关于上述等价关系 $\sim$ 的一个等价分类。稍后我们具体讨论这个概念。

例 2.12. 我们先来考虑几个简单的例子。

(1) $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$，$\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}+1$。

(2) $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$。

定义函数 $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f(i,j) = 2^{i-1}(2j-1), \qquad (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}.$$

由算术基本定理（即整数的唯一分解定理），任给 $n \in \mathbb{N}$，n 有如下表示：

$$n = 2^p \cdot q, \qquad p \in \mathbb{N}\cup\{0\}, q \in 2\mathbb{N}+1.$$

这表明 f 为满射。f 为单射易证。

(3) $(-1,1) \sim \mathbb{R}$。

定义函数 $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}, \quad x \in (-1,1),$$

则 f 为所需的双射。

定理 2.13. （Cantor-Bernstein）若 X 与 Y 的真子集对等，且 Y 与 X 的真子集对等，则 $X \sim Y$。

证明：我们首先证明

断言： 设 $f: X \to Y$，$g: X \to Y$，则存在分解

$$X = A \cup \tilde{A}, \quad Y = B \cup \tilde{B},$$

其中 $B = f(A)$，$\tilde{A} = g(\tilde{B})$，$A \cap \tilde{A} = \varnothing$，$B \cap \tilde{B} = \varnothing$。

断言的证明： 设

$$\mathscr{A} = \{E \subset X : E \cap g(Y \setminus f(E)) = \varnothing\}.$$

注意到至少 $\varnothing \in \mathscr{A}$。令 $A = \cup_{E \in \mathscr{A}} E$，下面证明 $A \in \mathscr{A}$。

任给 $E \in \mathscr{A}$，$E \subset A$。由于

$$E \cap g(Y \setminus f(E)) = \varnothing,$$

则 $E \cap g(Y \setminus f(A)) = \varnothing$，从而

$$\begin{aligned} A \cap g(Y \setminus f(A)) &= \left(\bigcup_{E \in \mathscr{A}} E\right) \cap g(Y \setminus f(A)) \\ &= \bigcup_{E \in \mathscr{A}} (E \cap g(Y \setminus f(A)) = \varnothing. \end{aligned}$$

所以 $A \in \mathscr{A}$，且 A 为 $\mathscr{A}$ 中的最大元。

令 $B = f(A)$，$\tilde{B} = Y \setminus B$，$\tilde{A} = g(\tilde{B})$，容易验证

$$Y = B \cup \tilde{B}, \quad B \cap \tilde{B} = \varnothing.$$

下面证明余下的结论。

由于 $A \cap \tilde{A} = A \cap g(\tilde{B}) = A \cap g(Y \setminus B) = A \cap g(Y \setminus f(B)) = \varnothing$，故 $A \cup \tilde{A} = X$。不然，存在 $x_0 \in X$，$x_0 \notin A \cup \tilde{A}$。设 $A_0 = A \cup \{x_0\}$，则

$$\begin{aligned} \varnothing = A \cap \tilde{A} = A \cap g(\tilde{B}) &= A \cap g(Y \setminus f(A)) \\ &\supset A \cap g(Y \setminus f(A_0)), \end{aligned}$$

这表明 $A \cap g(Y \setminus f(A_0)) = \varnothing$。又

$$x_0 \notin A \cup \tilde{A} \Rightarrow x_0 \notin \tilde{A} \Rightarrow x_0 \notin g(Y \setminus f(A_0)),$$

故

$$\begin{aligned} A_0 \cap g(Y \setminus f(A_0)) &= (A \cup \{x_0\}) \cap g(Y \setminus f(A_0)) \\ &= A \cap g(Y \setminus f(A_0)) = \varnothing, \end{aligned}$$

即 $A_0 \in \mathscr{A}$，这与 A 的极大性矛盾。 \\\\

设 $f: X \to Y$，$g: Y \to X$ 为单射，则由断言，存在分解

$$X = A \cup \tilde{A}, \quad Y = B \cup \tilde{B}, \quad B = f(A), \quad \tilde{A} = g(\tilde{B}).$$

注意到 $f|_A$ 及 $g|_{\tilde{B}}$ 均为双射，因此定义

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g^{-1}(x), & x \in \tilde{A} \end{cases}, \quad x \in X,$$

则 $F: X \to Y$ 为双射，从而 $X \sim Y$。 □

推论 2.14. *若* $C \subset A \subset B$ *且* $B \sim C$，*则* $B \sim A$。

证明： 由 $B \sim C$，存在单射 $f: B \to C \subset A$，而包含映射为 A 到 B 的单射，$B \sim A$ 是定理2.13的直接推论。 □

例 2.15. $[-1, 1] \sim \mathbb{R}$。这是因为

$$(-1, 1) \subset [-1, 1] \subset \mathbb{R},$$

例2.12.(3) 表明 $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$，故由定理2.13，$[-1, 1] \sim \mathbb{R}$。注意不可能找到连续函数建立这种对等关系。

集合的基数

对每一个集合 A，与之联系的一个概念是 A 的元素的个数，记作 card A，称作 A 的**基数**（或**势**）。例如若 $A = \{1, 2, \ldots, n\}$，则 card A 为 A 的元素个数，即此时 card $A = n$。

设 A, B 为集合，若 $A \sim B$，则称 A 与 B 具有相同的基数，即 card $A =$ card B。若存在 $f: A \to B$ 为单射，即 A 与 B 的真子集 $f(A)$ 对等，则称 card A 小于 card B，记作 card $A \leqslant$ card B。因此，Cantor-Bernstein 定理事实上是说：*若* card $A \leqslant$ card B *且* card $B \leqslant$ card A，*则* card $A =$ card B。

我们先来考虑一个简单的情形。集合 A 称作**有限集**若存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 A 与集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 对等。此时 card $A = n$。

一个集合称作**无穷集**若它不是有限集。关于无穷集，两个重要的例子是自然数集 $\mathbb{N}$ 与实数集 $\mathbb{R}$。下面我们以这两个集合为基础展开讨论。

$\mathbb{N}$ 的基数・可数集

我们将 $\mathbb{N}$ 的基数 $\operatorname{card}\mathbb{N}$ 记作 $\aleph_0$，与 $\mathbb{N}$ 对等的集合称作**可数（无穷）集**。显然若 A 为可数集，则 $\operatorname{card} A = \aleph_0$。显然，每一可数集 A 均可以写成如下形式：

$$A = \{a_1, a_2 \ldots, a_n, \ldots\}, \quad a_i \in A,\ i \in \mathbb{N}.$$

下面是可数集的一些基本性质：

(1) 无穷集中必包含可数集。

设 A 为任意无穷集，则由数学归纳法，我们很容易构造 A 的可数子集。这表明 $\aleph_0$ 为无穷集中的最小的基数。

(2) 有限集与可数集的并为可数集。

设 $A = \{a_1, a_2 \ldots, a_n\}$ 为有限集，$B = \{b_1, b_2 \ldots, b_n, \ldots\}$ 为可数集，定义 $f : \mathbb{N} \to A \cup B$，

$$F(k) = \begin{cases} a_k, & 1 \leqslant k \leqslant n \\ b_{k-n}, & k > n \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

不难验证 F 为一双射。

(3) 可数个可数集之并为可数集。

设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为可数集合列，每一 A_n 均可数，$A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$。不失一般性，假设 A_n 两两互不相交。设

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nm}, \ldots\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

则我们可以将 A 中元素排列如下：

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & \cdots & a_{1m} & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots \\
& \swarrow & & & & & & \\
a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & \cdots & a_{3m} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \\
a_{n1} & & a_{n2} & & a_{n3} & \cdots & a_{nm} & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

按照箭头所示，A 为可数集。

(4) 可数集的有限直积为可数集。

设 $n \in \mathbb{N}$，这等价于考虑 $\mathbb{N}^n$，按照字典序可以证明。

例 2.16. 我们先来看看几个简单的例子:

(1) 有理数集 $\mathbb{Q}$ 为可数集。

每一有理数均可表示成两个整数之商，故存在单射 $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}^2$，这表明 $\operatorname{card}\mathbb{Q}\leqslant\operatorname{card}\mathbb{Z}^2=\aleph_0$，而 $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}$ 蕴含了 $\aleph_0=\operatorname{card}\mathbb{N}\leqslant\operatorname{card}\mathbb{Q}$。

(2) $\mathbb{R}$ 中两两互不相交的开区间族至多可数。

因为这些开区间两两互不相交，故每一区间中可选取互异的有理数。

(3) $\mathbb{R}$ 上的单调函数的不连续点集至多可数。

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 单调递增，则 f 的每一不连续点 x 对应一个开区间 $(f(x-),f(x+))$，且两个不同的不连续点 x_1 和 x_2 相应的开区间不相交。

我们再来看看几个比较复杂的例子。

例 2.17. 对 $\mathbb{R}$ 上的实函数 f，集合

$$E=\{x\in\mathbb{R}:f\text{ 在 }x\text{ 处不连续但右极限 }f(x+)\text{ 存在 }\}$$

至多可数。

事实上，设 $S=\{x\in\mathbb{R}:f(x+)\text{ 存在 }\}$，任给 $n\in\mathbb{N}$，设

$$\begin{aligned}A_n=\{&x\in\mathbb{R}:\text{ 存在 }\delta>0,\text{ 使得}\\&\text{当 }x',x''\in(x-\delta,x+\delta)\text{ 时},|f(x')-f(x'')|<1/n\}.\end{aligned}$$

显然 $\cap_{n\geqslant1}A_n$ 为 f 的连续点集。下面证明 $S\setminus A_n$ 可数。

固定 $n\in\mathbb{N}$。对任给 $x\in S\setminus A_n$，存在 $\delta>0$ 使得

$$|f(x')-f(x+)|<\frac{1}{2n},\quad x'\in(x,x+\delta).$$

故若 $x',x''\in(x,x+\delta)$，$|f(x')-f(x'')|<1/n$。这表明

$$(x,x+\delta)\subset A_n.$$

也就是说 (1) $S\setminus A_n$ 中的每一点 x 为某 $I_x=(x,x+\delta)$ 的左端点; (2) $I_x\cap(S\setminus A_n)=\varnothing$; (3) 若 $x_1,x_2\in S\setminus A_n$，$x_1\neq x_2$，则 $I_{x_1}\cap I_{x_2}=\varnothing$。因此 $\{I_x:x\in S\setminus A_n\}$ 可数，从而 $S\setminus A_n$ 可数。从而 $E=S\setminus(\cap_{n\geqslant1}A_n)=\cup_{n\geqslant1}(S\setminus A_n)$ 可数。 \\\\

思考题：对 $\mathbb{R}$ 上的实函数 f，集合 $E=\{x\in\mathbb{R}:\lim_{y\to x}f(y)=+\infty\}$ 至多可数。

思考题： 设 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (a,b)\cap\mathbb{Q}$，$\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 为收敛的正项级数，定义

$$f(x) = \sum_{x<r_n} C_n, \quad x\in(a,b). \tag{2.5}$$

证明 f 为在无理数处连续而在有理数处不连续的单调递增函数。而且 $f(r_n+) - f(r_n-) = C_n > 0$。

思考题： 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，定义

$$\text{arg min } f = \{x\in\mathbb{R} : f \text{ 在 } x \text{ 处取得（局部）极小值}\},$$
$$\text{arg max } f = \{x\in\mathbb{R} : f \text{ 在 } x \text{ 处取得（局部）极大值}\}.$$

证明集合 $f(\text{arg min } f)$ 与 $f(\text{arg max } f)$ 均至多可数。

思考题： 证明若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续且每一点均为 f 的极值点，则 f 为常值函数。进一步，这个结论对 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 亦成立。

例 2.18. 设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$，则集合

$$E = \{x: \text{ 左导数 } f'_-(x) \text{ 及右导数 } f'_+(x) \text{ 均存在（包括 } \pm\infty\text{）但不相等}\}$$

至多可数。

事实上，设 $A = \{x: f'_-(x) > f'_+(x)\}$，$B = \{x: f'_-(x) < f'_+(x)\}$，则 $E = A\cup B$。下面证明 A 至多可数。

任给 $x\in A$，选取 $r_x\in\mathbb{Q}$ 使得 $f'_+(x) < r_x < f'_-(x)$，及 $s_x, t_x\in\mathbb{Q}$ 使得

$$a < s_x < t_x < b,$$
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > r_x, \quad \text{对 } s_x < y < x,$$
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < r_x, \quad \text{对 } x < y < t_x,$$

即

$$f(y) - f(x) < r_x(y-x), \quad \text{对 } y\neq x,\ y\in(s_x,t_x).$$

定义映射 $\phi: A\to\mathbb{Q}^3$，$x\mapsto\phi(x) = (r_x, s_x, t_x)$。下面证明 ϕ 为单射。

不然，设 $x_1\neq x_2\in A$，但

$$(r_{x_1}, s_{x_1}, t_{x_1}) = \phi(x_1) = \phi(x_2) = (r_{x_2}, s_{x_2}, t_{x_2}),$$

则 $x_1, x_2\in(s_{x_1}, t_{x_1}) = (s_{x_2}, t_{x_2})$，于是

$$f(x_2) - f(x_1) < r_{x_1}(x_2 - x_1), \quad f(x_1) - f(x_2) < r_{x_2}(x_1 - x_2).$$

注意到 $r_{x_1}=r_{x_2}$，两式相加得到 $0<0$，矛盾。

ϕ 为单射表明，A 与 $\mathbb{Q}^3$ 的某子集对等，从而至多可数。类似的结论对 B 从而 E 成立。 \\\\

例 2.19. $\mathbb{R}^1$ 上的凸（凹）函数的不可微点至多可数。

以凸函数为例，这个结论依据这样的事实：$\mathbb{R}^n$ 上的凸函数（单边）方向导数存在。事实上，设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为凸函数，即

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\quad x,y\in\mathbb{R}^n,\ \lambda\in[0,1].$$

首先我们需要这样的事实：$\mathbb{R}^n$ 上的凸函数为局部 Lipschitz 的。令

$$q(t)=\frac{f(x+ty)-f(x)}{t},\quad t>0,$$

则由 f 的凸性，$q(t)$ 关于 t 单调递增，而 f 的局部 Lipschitz 性保证了 $q(t)$ 在 $t=0$ 附近有界，因此

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+ty)-f(x)}{t}=\lim_{t\to 0^+}q(t)$$

存在。故由例2.18，当 $n=1$ 时，f 的不可微点集至多可数。

注意，当 $n>1$ 时，这个结论不成立。不过由 Rademacher 定理，f 的局部 Lipschitz 性保证了 f 不可微点集为零测集。 \\\\

思考题：证明若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为凸函数，则 f 为局部 Lipschitz 的，即任给 $x\in\mathbb{R}$，存在 $r=r_x>0$ 以及常数 $M=M_x>0$，使得

$$|f(y)-f(z)|\leqslant M|y-z|,\quad y,z\in B(x,r).$$

下面是关于基数的一些简单性质。

1) 设 A 为无限集，card $A=\alpha$，card $B=\aleph_0$，则 card $A\cup B=\alpha$。

证明：设 $B=\{b_1,b_2,\dots\}$，$A\cap B=\varnothing$，且 $A=A_1\cup A_2$，$A_1=\{a_1,a_2,\dots\}$。定义 $f:A\cup B\to A$，

$$f(x)=\begin{cases} a_{2i}, & x=a_i\in A_1;\\ a_{2i-1}, & x=b_i\in B;\\ x, & x\in A_2.\end{cases}$$

f 为双射。 □

2) 集合 A 为无限集的充分必要条件是 A 与其某真子集对等。

证明：若 A 为无限集，取 B 为其有限子集，则 $A\setminus B\subsetneqq A$，且 $A\sim A\setminus B$。若 A 为有限集，则 A 不与其任一真子集对等。 □

$\mathbb{R}^1$ 的基数 · 不可数集

例 2.20. $[0,1]$ 是不可数集。

仅考虑 $(0,1]$，则任给 $x \in (0,1]$ 均可表示成（二进）级数

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \quad a_n = 0 \text{ 或 } 1.$$

注意如 $0.1000\cdots$ 与 $0.0111\cdots$ 是同一个数。我们约定上述级数中 1 一定出现无穷次，则 $(0,1]$ 与这样的全体二进制小数一一对应。

事实上，不考虑 $a_n = 0$ 的项，则

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n_i},$$

$\{n_i\}$ 为严格单调上升的自然数序列，由下面的方法唯一决定

$$k_1 = n_1,\ k_i = n_i - n_{i-1}, \quad i = 2, 3, \ldots,$$

则 $\{k_i\}$ 唯一决定了 x。记全体自然数序列的族为 $\mathscr{A}$，则 $(0,1] \sim \mathscr{A}$。

假定 $\mathscr{A}$ 可数，排列如下:

$$\begin{gathered}
(k_1^1, k_2^1, \ldots, k_i^1, \ldots), \\
(k_1^2, k_2^2, \ldots, k_i^2, \ldots), \\
\vdots \\
(k_1^j, k_2^j, \ldots, k_i^j, \ldots), \\
\vdots
\end{gathered}$$

则 $(k_1^1 + 1, k_2^2 + 1, \ldots, k_i^i + 1, \ldots)$ 未排出。不然存在 i 使得

$$(k_1^1 + 1, k_2^2 + 1, \ldots, k_i^i + 1, \ldots) = (k_1^i, k_2^i, \ldots, k_i^i, \ldots),$$

从而 $k_i^i + 1 = k_i^i$。矛盾。

这表明 $\mathscr{A}$ 不可数，从而 $[0,1]$ 亦然。 \\\\

注 2.21. 不难证明

$$\mathscr{A} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \quad \text{card}\, \mathscr{A} = \text{card}\, [0,1] = \text{card}\, \mathbb{R}^1.$$

这里 card $\mathbb{R}^1$ 称作**连续统的基数**，记作 c 或 $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$。这个例子表明

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph_1 = c.$$

注 2.22. 下面的问题是集合论的基本问题。

1) $\aleph_0$ 与 c 之间是否还存在其它的基数?

2) 有无最大的基数?

定理 2.23. 设 A 为非空集合, 则 A 与其幂集 2^A 不对等。

证明: 反证法。假设 $A \sim 2^A$, 即存在 $f : A \to 2^A$ 为双射, 定义

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\},$$

则存在 $y \in A$ 使得 $f(y) = B \in 2^A$。

- 若 $y \in B$, 则 $y \notin f(y) = B$;
- 若 $y \notin B$, 则 $y \in f(y) = B$。

矛盾。 □

例 2.24. 设 $\{A_k\}$ 满足 card $A_k = c$, 则 card $(\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = c$。

事实上, 不妨设 $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $A_k \sim [k, k+1)$, 则

$$\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k \sim [1, \infty) \sim \mathbb{R}^1.$$

例 2.25. 设 $\{E_n\}$ 满足 card $E_n = c$, 则

$$E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : x_n \in E_n, n \in \mathbb{N}\}$$

基数为 c, 即 card $(\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n) = c$。

由前例, 可假定 E_n 为自然数数列形成的集合, 则 E 中元素可看成无穷矩阵

$$\begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_k^1 & \cdots \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_k^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_k^n & \cdots \end{pmatrix}.$$

记这个无穷矩阵的集合为 A, 则 $A \sim E$。

而若视 A 中元素为数列

$$(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_3^1, x_2^2, x_1^3, \cdots),$$

则 $A \sim E_n$。故 card $A = c$。 \\\\

例 2.26. 记 $C([a,b])$ 为 $[a,b]$ 上连续实函数全体构成的集合，则

$$\text{card}\, C([a,b]) = c.$$

$C([a,b])$ 中包含常值函数，故 card $C([a,b]) \geqslant c$。另一方面，任给 $\phi \in C([a,b])$，定义 $f: C([a,b]) \to 2^{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}$，

$$f(\phi) = \{(s,t) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} : s \in [a,b], t \leqslant \phi(s)\}.$$

f 为一单射。

事实上若 $\phi_1 \neq \phi_2$，但 $f(\phi_1) = f(\phi_2)$，注意到存在 x_0 使得 $\phi_1(x_0) \leqslant \phi_2(x_0)$，则存在 $\delta > 0$ 使得任给 $s \in I_\delta = [x_0-\delta, x_0+\delta]$，$\phi_1(s) < \phi_2(s)$，这与 $f(\phi_1) = f(\phi_2)$ 矛盾。从而 card $C([a,b]) \leqslant 2^{\mathbb{Q}^2} = c$。 \\\\

例 2.27. 设 $E = A \cup B$，card $E = c$，则 card $A = c$ 或 card $B = c$。

不妨设 $E = (0,1)\times(0,1)$，令 $E_0 = \{(x_0,y) : 0 < y < 1\}$，其中 $x_0 \in (0,1)$。若 $A \supset E_0$，则 card $A = c$，否则任给 $x \in (0,1)$,

$$B \cap \{(x,y) : 0 < y < 1\} \neq \varnothing,$$

则 card $B = c$。 \\\\

例 2.28. 记 $\mathscr{F}$ 为 $[a,b]$ 上所有实函数的全体，则 card $\mathscr{F} > c$。

首先 card $\mathscr{F} \geqslant c$。假设 card $\mathscr{F} = c$，$\mathscr{F} \sim [0,1]$。$\mathscr{F}$ 中的元可以表示成函数族 $\{f_t\}$，$f_t(\cdot) = F(t,\cdot)$，$t \in [0,1]$。设 $g(x) = F(x,x)+1$，则 $g \in \mathscr{F}$，从而存在 $\alpha \in [0,1]$，使得

$$g(x) = f_\alpha(x).$$

因此 $F(x,x)+1 = F(\alpha,x)$，$x \in [0,1]$。取 $x = \alpha$，矛盾。 \\\\

2.2 $\mathbb{R}^n$ 的拓扑

2.2.1 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上的自然拓扑

$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\ldots,x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ldots,n\}$ 为一 n 维实线性空间，赋予内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。对 $x = (x_1,\ldots,x_n)$，$y = (y_1,\ldots,y_n)$，

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

$(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 称作 Euclid 空间。$|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ 定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的**模**。$d(x,y) = |x-y|$ 定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的**度量**（或**距离**）。内积与模有下面的 Schwartz 不等式:

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant |x|\cdot|y|, \quad x,y \in \mathbb{R}^n.$$

一个集合 X 上的所谓“拓扑”，是指 X 上的“开集”的全体。对 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$，我们首先采用下面比较直观的办法来定义“开集”的概念。

定义 2.29 (开集和闭集)**.** 设 $\delta > 0$，$B(x,\delta) = \{y : |x-y| < \delta\}$ 称作以 x 为中心，δ 为半径的**开球**，或者 x 的 **δ-邻域（开邻域）**。类似，$\bar{B}(x,\delta) = \{y : |x-y| \leqslant \delta\}$ 称作以 x 为中心，δ 为半径的**闭球**。

$E \subset \mathbb{R}^n$ 称作**开集**若任给 $x \in E$ 存在 $\delta > 0$，使得 $B(x,\delta) \subset E$。开集的补集称作**闭集**。

在没有特别申明的情况下，我们在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 均采用这种拓扑。定义2.29定义的拓扑称作 $\mathbb{R}^n$ 上的**自然拓扑**。

我们回忆一下在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上极限的概念。

定义 2.30. $\{x_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中序列，$x \in \mathbb{R}^k$，$\lim_{k\to\infty} x_k = x$ 若

$$\lim_{n\to\infty} |x_k - x| = 0.$$

所谓 $\varepsilon - N$ 语言的表述是:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ 若 } k > N, \ x_k \in B(x,\varepsilon). \tag{2.6}$$

定义 2.31. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$。$x \in \mathbb{R}^n$ 称作 E 的**极限点**若存在 $x_k \subset E$，x_k 互异，$\lim_{\to\infty} x_k = x$。集合 E 极限点的极限点的全体称作 E 的**导集**，记作 E'。$x \in E \setminus E'$ 称作**孤立点**。

从定义我们很容易看出

$$\begin{aligned} x \in E' \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \delta > 0, \ (B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap E \neq \varnothing, \\ x \in E \setminus E' \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \delta > 0, \ (B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap E = \varnothing. \end{aligned} \tag{2.7}$$

例 2.32. 若 $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$，则 $(E_1 \cup E_2)' = E_1' \cup E_2'$。事实上，一方面由于 $E_1, E_2 \subset E_1 \cup E_2$，故 $E_1' \cup E_2' \subset (E_1 \cup E_2)'$。另一方面，若 $x \in (E_1 \cup E_2)'$，存在 $E_1 \cup E_2$ 中互异的点列 $\{x_k\}$，$x_k \to x$，则必有子列 $\{x_{k_i}\} \subset E_1$ 或 E_2，且 $x_{k_i} \to x$，$x \in E_1$ 或 E_2，这表明 $(E_1 \cup E_2)' \subset E_1' \cup E_2'$。 \\\\

定理 2.33 (Bolzano-Weierstrass 定理)**.** *$\mathbb{R}^n$ 中的有界无穷集 E 必有极限点。*

作为度量空间，我们还需要一些非拓扑的概念。

定义 2.34 (有界集)**.** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，

$$\text{diam } E = \sup\{|x-y| : x, y \in E\}$$

称作 E 的**直径**。若 $\text{diam } E < \infty$，E 称作**有界集**。

定义 2.35. $\{x_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中序列，$\{x_n\}$ 称作 Cauchy **序列**或**基本列**若任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，当 $k, l > N$ 时，$|x_k - x_l| < \varepsilon$。$\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 列一定收敛于某 $x \in \mathbb{R}^n$。这个性质称作 $\mathbb{R}^n$（赋予 Euclid 度量）的**完备性**。

2.2.2 更多的拓扑学

不难验证，若设 τ 为 $X=\mathbb{R}^n$ 中所有开子集构成的集合族，则 τ 满足

O1) $\varnothing, X\in\tau$；

O2) 若 $U_i\in\tau$，$i=1,\ldots,n$，则 $\cap_{i=1}^n U_i\in\tau$；

O3) 若 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 τ 中任意子集族；则 $\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda\in\tau$。

在拓扑学中，我们通常将上述三条性质作为**拓扑**的定义。显而易见，对应的 X 的全体闭集构成的集合族 $\mathscr{F}$ 满足

C1) $\varnothing, X\in\mathscr{F}$；

C2) 若 $F_i\in\mathscr{F}$，$i=1,\ldots,n$，则 $\cup_{i=1}^n F_i\in\mathscr{F}$；

C3) 若 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\mathscr{F}$ 中任意子集族；则 $\cap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\in\mathscr{F}$。

注 2.36. 上面的 O1)-O3) 与 C1)-C3) 通常分别称作开集公理和闭集公理。一个抽象的集合 X，以及它的一个子集族 τ。τ 称作 X 上的一个拓扑若 τ 满足 O1)-O3)。(X,τ) 构成一拓扑空间。若 (X,τ) 为一拓扑空间，$S\subset X$，则 $\tau_S=\{U\cap S:U\in\tau\}$ 称作 S 的子空间拓扑。

在一个集合 X 中可以赋予不同的拓扑。比如在泛函分析中，我们经常会遇到一个函数空间可以有多个（有意义的）拓扑。不同的拓扑决定了不同的极限或者说收敛的模式。

下面的内容对我们理解 Euclid 空间上的拓扑有很大的帮助。我们用较为简洁的模式介绍一下其中一些必要的拓扑学知识。

若 X 为集合，S 为其子集族，τ 为 X 上的一个拓扑。S 称作拓扑空间 (X,τ) 的**拓扑基**若任给 $U\in\tau$，存在 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_1}$，且 $U=\cup_{\lambda\in\Lambda_1}V_\lambda$，即 τ 中元可由 S 中元之并生成。拓扑基是一个全局概念。若拓扑空间 (X,τ) 具有可数的拓扑基，则 X 称作**第二可数的**。$\mathbb{R}^n$ 上的自然拓扑是第二可数的。

思考题：记 $\mathcal{F}_1=\{B(x,r):x\in\mathbb{R}^n, r>0\}$，$\mathcal{F}_2=\{B(x,r):x\in\mathbb{Q}^n, r\in\mathbb{Q}\cap(0,+\infty)\}$，$\mathcal{F}_3=\{\prod_{i=1}^n(a_i,b_i):a_i<b_i, a_i,b_i\in\mathbb{Q}, i=1,\ldots,n\}$。证明 $\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2$ 和 $\mathcal{F}_3$ 均为 $\mathbb{R}^n$ 的自然拓扑 τ 的拓扑基，从而 $(\mathbb{R}^n,\tau)$ 是第二可数的。

-

- 同样的道理，我们也可以用局部的观点来看这个问题。设 (X,τ) 为一拓扑空间，我们称 V 为 $x\in X$ 的一个邻域若存在 $U\in\tau$，$x\in U$，使得 $U\subset V$。若所有 x 的邻域均可由某含 x 的子集族 $\mathscr{N}$ 生成，则称 $\mathscr{N}$ 为 τ 的关于 x 的一个邻域基。这是拓扑的一个局部概念。(X,τ) 的每一点均有可数的邻

域基这一性质称作第一可数性质。$\mathbb{R}^n$ 上的 Euclid 拓扑，乃至一般的度量空间均为第一可数的。

- 任给拓扑空间 X，$S \subset X$。包含 S 的最小闭集称作 S 的闭包，记作 $\overline{S}$ 或 $\operatorname{cl} S$。类似，含于 S 的最大开集称作 S 的内部，记作 $\overset{\circ}{S}$ 或 $\operatorname{int} S$。$\overline{S}$ 为一闭集，$\overset{\circ}{S}$ 为一开集。仅以 $\mathbb{R}^n$ 上的 Euclid 拓扑为例。设 $S \subset \mathbb{R}^n$，
$$\overset{\circ}{S} = \{x \in S : 存在\, \delta > 0\, 使得\, B(x,\delta) \subset S\},$$
$$\overline{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : 任给\, \delta > 0,\, B(x,\delta) \cap S \neq \varnothing\}.$$
因此 $\overline{S} = S \cup S'$。$\partial S = \overline{S} \setminus \overset{\circ}{S}$ 称作 S（拓扑意义下）的边界。不难看出，S 为开集当且仅当 $S = \overset{\circ}{S}$，S 为闭集当且仅当 $S = \overline{S}$。

- 更一般，若 $S_1 \subset S$，S 为闭集。若 $\overline{S_1} = S$，我们称 S_1 在 S 中稠密。(注意，即便 S 不为闭集，若 $\overline{S_1} = \overline{S_2}$，我们也可以称 S_1 在 S 中稠密。) 那么，S_1 在 S 中稠密有如下刻画：任给 $x \in S$ 和 $\delta > 0$，$B(x,\delta) \cap S_1 \neq \varnothing$。若 X 存在可数的稠密子集，则称 X 为可分的。

例 2.37. $\mathbb{R}^1$ 上的非空开集必可表示成可数个两两互不相交的开区间之并。

证明：设 $G \subset \mathbb{R}^1$ 为一开集，$x \in G$，则存在 $y < x < z$ 使得开区间 $(y,x),(x,z) \subset G$。设
$$a = \inf\{y : (y,x) \subset G\}, \quad b = \sup\{x : (x,z) \subset G\}.$$
显然 $a < b$ 且 a,b 可以分别为 $-\infty, +\infty$，但若 $G \neq \mathbb{R}^1$，则不可能同时有 $a = -\infty, b = +\infty$。设 $I(x) = (a,b)$，则 $I(x)$ 为包含 x 的开区间，$I(x) \subset G$，并且 $b \notin G$。事实上，若 $b \in G$，则存在 $r > 0$ 使得 $(b-r, b+r) \subset G$，这与 b 的定义矛盾。类似地 $a \notin G$。

容易验证：若 $x,y \in G$，$x \neq y$，则 $I(x) = I(y)$ 或 $I(x) \cap I(y) = \varnothing$。考虑 $\{I(x)\}_{x \in G}$，显然 G 为 $I(x)$ 两两互不相交之并。由例2.16(2)，其至多可数。 \\\\

例 2.38. 考虑广义实数集 $[-\infty,+\infty]$ 为实数集添上 $\pm\infty$ 两个元素。$[-\infty,+\infty]$ 继承了 $\mathbb{R}$ 上的序关系，为一全序集。此时对任意 $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$，我们可以定义如下四类区间 $[a,b]$，(a,b)，$(a,b]$ 和 $[a,b)$。我们引入 $+\infty$ 和 $-\infty$ 的开邻域为 $(a,+\infty]$ 和 $[-\infty,a)$，$a \in \mathbb{R}$。这些集合与 $\mathbb{R}$ 中的开集的全体一起构成一个 $[-\infty,+\infty]$ 上的一个拓扑。因此形如 (a,b)，$(a,+\infty]$ 和 $[-\infty,b)$ 的集合均为 $[-\infty,+\infty]$ 上的开集，我们均称为开区间。事实上，关于这个拓扑 $[-\infty,+\infty]$ 为一紧集，为 $\mathbb{R}$ 的一个紧化。由例2.37，$[-\infty,+\infty]$ 上的开集的结构为：$[-\infty,+\infty]$ 上的任一开集为至多可数个两两不交的开区间的并。
\\\\

例 2.39. 设 $I_n=[0,1-1/n]$ 为闭集列，而 $\cup_{n=1}^{\infty}I_n=[0,1)$ 非闭集。类似，设 $J_n=(-1/n,1)$ 为开集列，而 $\cap_{n=1}^{\infty}J_n=[0,1)$ 非开集。 \\\\

有限覆盖・紧性

设 (X,τ) 为一拓扑空间，子集族 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 称作 X 的开覆盖若任给 $\lambda\in\Lambda$，$U_\lambda\in\tau$，且 $\cup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda=X$。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的子集 E 而言，若 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集族，且

$$E\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda,$$

则称 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 E 的开覆盖。(运用子空间拓扑，这两个定义后者与前者相容。)

2.2.3 $\mathbb{R}^n$ 上函数与连续性

定义 2.40. 假设 (X,τ_X) 和 (Y,τ_Y) 均为拓扑空间。映射 $f:X\to Y$ 称作**连续的**若任给 $U\in\tau_Y$，$f^{-1}(U)\in\tau_X$。简单地说，开集的原像是开集。映射 $f:X\to Y$ 称作**在 $x\in X$ 处连续**若任给 $f(x)$ 的邻域 $U\subset Y$，$f^{-1}(U)$ 为 x 的邻域。简单地说，邻域的原像是邻域。

注 2.41. 我们比较一下这里引入的概念与数学分析中相应概念之间的联系:

1) 不难看出，映射 $f:X\to Y$ 连续当且仅当 $f:X\to Y$ 在每一点 $x\in X$ 处连续。

2) 若 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 为度量空间，映射 $f:X\to Y$ 在 $x\in X$ 处连续当且仅当任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得若 $y\in B_X(x,\delta)$ 则 $f(y)\in B_Y(f(x),\varepsilon)$ (这种表述称作 ε-δ 语言)。事实上，若 ε-δ 语言成立，任给 $f(x)$ 的邻域 $U\subset Y$，存在 $B_Y(f(x),\varepsilon)\subset U$，从而 $f(B_X(x,\delta))\subset B_Y(f(x),\varepsilon)$。因此 $B_X(x,\delta)\subset f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon))\subset f^{-1}(U)$。这说明 $f^{-1}(U)$ 为 x 的邻域。相反的方向是平凡的。

3) 若 (X,d) 为度量空间，$f:X\to\mathbb{R}$。则 f 连续当且仅当任给 $a<b$，$f^{-1}((a,b))$ 是开集。事实上，任给 $G\subset\mathbb{R}$ 为非空开集，则存在两两不交的至多可数的开区间列 $\{(a_k,b_k)\}$，使得 $G=\bigcup_k(a_k,b_k)$。我们的结论由关系 $f^{-1}(\bigcup_k(a_k,b_k))=\bigcup_k f^{-1}((a_k,b_k))$ 得到。若 $f:X\to[-\infty,+\infty]$，上面的讨论需要包括形如 $[-\infty,a)$、$(a,+\infty]$ 和 (a,b) 的区间。

4) 下面利用序列的刻画也是十分有用的。若 (X,d) 为度量空间，$f:X\to\mathbb{R}$。则 f 在 $x\in X$ 处连续当且仅当任给 $x_k\to x$，$f(x_k)\to f(x)$ ($k\to\infty$)。

需要指出的是，如果拓扑空间 X 不是第一可数的，后者是前者的必要条件但不充分。我们还需要所谓网收敛或滤子收敛来刻画类似的结论。

5) 若 (X,d) 为度量空间，$f: X \to \mathbb{R}$，则 f 由其在任意稠密子集 S 上的值决定。事实上，若 $x \notin S$，则由连续性 $f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$，其中 $\{x_k\} \subset S$ 且 $\lim_{k\to\infty} x_k = x$。

思考题：若 (X,d) 为度量空间，$f: X \to \mathbb{R}$ 或 $[-\infty,+\infty]$。证明 f 在 $x \in X$ 处连续当且仅当任给 $x_k \to x$，$f(x_k) \to f(x)$（$k \to \infty$）。

思考题：若 (X,d) 为度量空间，S 为 X 的稠密子集，$f: S \to \mathbb{R}$。证明若 f 在 S 上一致连续（即 ε-δ 语言中的 δ 与 $x \in S$ 无关），则存在 f 到 X 上的唯一连续扩张。

对于实函数，另一个十分重要的概念是所谓函数的半连续性。

定义 2.42. 设 (X,d) 为度量空间，$f: X \to [-\infty,+\infty]$ 称作**上半连续的**若任给 $a \in \mathbb{R}$，$f^{-1}([-\infty,a))$ 为 X 中开集。f 称作**下半连续的**若任给 $a \in \mathbb{R}$，$f^{-1}((a,+\infty])$ 为 X 中开集。

定义 2.43. 设 (X,d) 度量空间，$f: X \to [-\infty,+\infty]$ 称作**在 $x \in X$ 处上半连续的**若任给 $a \in \mathbb{R}$，$f^{-1}([-\infty,a))$ 若包含 x 则包含 x 的一个邻域。f 称作**在 $x \in X$ 处下半连续的**若任给 $a \in \mathbb{R}$，$f^{-1}((a,+\infty])$ 若包含 x 则包含 x 的一个邻域。

注 2.44. 定义2.43中，我们实际上蕴含了当 $f(x) = \pm\infty$ 时的半连续性的刻画。我们以下半连续为例。若 $f(x) = -\infty$，任给 $a \in \mathbb{R}$，$x \notin f^{-1}((a,+\infty])$，此时我们认为 f 在 x 处下半连续。若 $f(x) = +\infty$，则任给 $a \in \mathbb{R}$，$x \in f^{-1}((a,+\infty])$ 且存在 $\delta > 0$ 使得 $B(x,\delta) \subset f^{-1}((a,+\infty])$，这表明此时 f 在 x 处下半连续当且仅当 $\lim_{y\to x} f(x) = +\infty$。

定义 2.45. 设 (X,d) 为度量空间，$f: X \to [-\infty,+\infty]$。定义

$$\liminf_{y\to x} f(y) = \sup_{\delta>0} \inf_{y\in B(x,\delta)} f(y), \quad \limsup_{y\to x} f(y) = \inf_{\delta>0} \sup_{y\in B(x,\delta)} f(y).$$

$\underline{f} = \liminf_{y\to x} f$ 和 $\overline{f} = \limsup_{y\to x} f$ 分别称作 f 的**下半连续包**和**上半连续包**。

我们先罗列一些半连续函数的基本性质。

命题 2.46. 设 (X,d) 为度量空间，$f, g, f_\lambda : X \to [-\infty,+\infty]$，$\lambda$ 属于任意指标集 Λ。

(1) f（在一点 x 处）下半连续当且仅当 $-f$（在一点 x 处）上半连续。

(2) f 下半连续当且仅当 f 在每一点 $x \in X$ 处下半连续。

(3) 若 f 在 $x \in X$ 处既为下半连续亦为上半连续，则 f 在 x 处连续。

(4) $\{f_\lambda\}$ 均下半连续，则 $\sup_\lambda f_\lambda$ 亦下半连续。

(5) 下半连续函数的有限代数和亦为下半连续。

(6) 若 $F, U \subset X$，F 为闭集，U 为开集，则 $\mathbf{1}_U$ 为下半连续，$\mathbf{1}_F$ 为上半连续。

(7) $\underline{f} \leqslant f \leqslant \overline{f}$。$\underline{f}$ 下半连续，$\overline{f}$ 上半连续。

(8) f 在 $x \in X$ 处下半连续当且仅当 $\underline{f}(x) \geqslant f(x)$。

(9) 若 g 下半连续且 $g \leqslant f$，则 $g \leqslant \underline{f}$。

(10) 下半连续函数在紧集上取得最小值。

证明. (1) 由定义直接得到。假设在每一点 $x \in X$ 处下半连续，任给 $a \in \mathbb{R}$，则任给 $x \in f^{-1}((a, +\infty])$，存在 $B(x, \delta) \subset f^{-1}((a, +\infty])$，故 $f^{-1}((a, +\infty])$ 为开集。这就证明了 (2)。若 f 在 $x \in X$ 处既为下半连续亦为上半连续，则任给 $a < b \in \mathbb{R}$，若 $x \in f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((a, +\infty]) \cap f^{-1}([-\infty, b))$，则存在 $B(x, \delta_1) \subset f^{-1}((a, +\infty])$ 和 $B(x, \delta_2) \subset f^{-1}([-\infty, b))$。令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$，则 $B(x, \delta) \subset f^{-1}((a, b))$。一般情形由 f^{-1} 对并运算保持性得到。最后，由注2.44和 (1)，当 $f(x) = \pm\infty$ 时 f 在 x 处连续。这就证明了 (3)。结论 (4) 由关系

$$\{\sup_\lambda f_\lambda > a\} = \bigcup_\lambda \{f_\lambda > a\}$$

得到。现在，假设 f, g 下半连续，则由恒等式

$$\{f + g > a\} = \bigcup_{a_1 + a_2 = a} (\{f > a_1\} \cap \{g > a_2\})$$

直接得到结论 (5)。结论 (6) 直接由定义得到。

(7) 的第一个结论直接由定义得到。下面证明 $\underline{f}$ 下半连续。设 $\phi(\delta, x) = \inf_{B(x,\delta)} f(y)$，则 $\underline{f}(x) = \sup_{\delta > 0} \phi(\delta, x)$。任给 $a \in \mathbb{R}$，不失一般性假设 $E_a = \{\underline{f} > a\}$ 非空。任给 $x_0 \in E_a$，则存在 $\delta > 0$ 使得 $\phi(\delta, x_0) > a$，从而任给 $x \in B(x_0, \delta)$，$f(x) > a$。任给 $x \in B(x_0, \delta/2)$，因为 $B(x, \delta/2) \subset B(x_0, \delta)$，故 $\phi(x, \delta/2) > a$。这表明 $\underline{f}(x) > a$，所以 $B(x, \delta/2) \subset E_a$，$E_a$ 为开集。这就证明了 $\underline{f}$ 下半连续。$\overline{f}$ 的情形类似。

由 (7)，(8) 仅需证明若 f 在 $x \in X$ 处下半连续则 $\underline{f}(x) \geqslant f(x)$。假设任给 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x) > a$，即 $x \in E_a$，则存在 $B(x,\delta) \subset E_a$。因此 $\phi(x,\delta) \geqslant a$，从而 $\underline{f}(x) \geqslant a$。这表明 $\underline{f}(x) \geqslant f(x)$。

若 g 下半连续且 $g \leqslant f$，由 (7) 和 (8)，$g = \underline{g} \leqslant \underline{f} \leqslant f$。这证明了 (9)。

最后我们证明 (10)。设 $K \subset X$ 为一紧集。由注2.44和 (1)，不失一般性假设 $f(x) > -\infty$，$x \in K$ 且 f 在 K 上不恒等于 $+\infty$。由 f 的下半连续性，$K \subset \bigcup_{a\in\mathbb{R}}\{f > a\}$ 为一开覆盖，故存在 $a_1, \ldots, a_N$ 使得 $K \subset \bigcup_{i=1}^{N}\{f > a_i\}$。取 $a_0 = \min\{a_1, \ldots, a_N\}$，则 $K \subset \{f > a_0\}$。因此 $\inf_{x\in K} f(x) \geqslant a_0 > -\infty$。设存在 $\{x_k\} \subset K$ 为极小序列，即 $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in K} f(x)$。由 K 的紧性，我们假设 $\lim_{k\to\infty} x_k = z \in K$。则

$$\inf_{x\in K} f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = \liminf_{k\to\infty} f(x_k) \geqslant \underline{f}(z) \geqslant f(z) \geqslant \inf_{x\in K} f(x).$$

这就证明了 f 在 $z \in K$ 处取得最小值。 □

思考题：证明 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 下半连续当且仅当 f 的上图 $E(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y \geqslant f(x)\}$ 为闭集。

思考题：证明 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为开集当且仅当 $\mathbf{1}_E$ 下半连续。

思考题：设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$。证明 f 的振幅函数 $\omega_f = \overline{f} - \underline{f}$ 且为上半连续的。

2.3 σ-代数・Borel 集・Baire 定理

2.3.1 σ-代数

定义 2.47. 非空集合 X 的子集族 $\mathfrak{M}$ 称作一个 σ-代数若

(1) $X \in \mathfrak{M}$。

(2) 若 $A \in \mathfrak{M}$，则 $A^c \in \mathfrak{M}$。

(3) 若 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$，则 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{M}$。

例 2.48. 下面是 σ-代数的一些例子。

1) 任一非空集合 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 为一 σ-代数。

2) 设 X 为一非空集合。定义

$$\mathfrak{M} = \{A \subset X : A\text{至多可数或}A^c\text{至多可数}\}□$$

则 $\mathfrak{M}$ 为 X 上的 σ-代数。事实上我们只需验证定义2.47 (3)。设 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$。若每一 A_k 均至多可数，则 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ 至多可数。若存在 k_0 使得 $A_{k_0}^c$ 至多可数，则 $(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k)^c = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k^c \subset A_{k_0}^c$ 至多可数。

3) 设 X, Y 为非空集合，$f : X \to Y$，$\mathfrak{M}$ 为 Y 上的 σ-代数。则

$$f^*\mathfrak{M} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathfrak{M}\}$$

定义了 X 上的 σ-代数。为验证这一点，仅需运用 f^{-1} 对集合运算的保持性。

命题 2.49. 假设 X 为非空集合，$\mathfrak{M}$ 为 X 上的 σ-代数。

(1) $\varnothing \in \mathfrak{M}$。

(2) 若 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}$，则 $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{M}$。

(3) 若 $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$，则 $\bigcap_{k=1}^n A_k$，$\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathfrak{M}$。

(4) 若 $A, B \in \mathfrak{M}$，则 $A \setminus B \in \mathfrak{M}$。

定理 2.50. 设 X 为非空集合，I 为任意指标集，对每一 $i \in I$，$\mathfrak{M}_i$ 均为 X 上的 σ-代数。则 $\bigcap_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ 亦为 X 上的 σ-代数。

由定理2.50，对任意 X 的子集族 S，定义

$$\sigma(S) = \bigcap\{\mathfrak{M} : \mathfrak{M}\text{为包含 } S \text{ 的 } \sigma\text{-代数}\}.$$

因为 $S \subset \mathscr{P}(X)$，故 $\sigma(S)$ 是有意义的。$\sigma(S)$ 为包含 S 的最小 σ-代数。我们称 $\sigma(S)$ 为 S **生成的 σ-代数**。

为了进一步理解 σ-代数的结构，我们引入 Dynkin 系统的概念。

定义 2.51. 非空集合 X 上的子集族 $\mathscr{D}$ 称作 Dynkin 系统若

(1) $X \in \mathscr{D}$。

(2) 若 $A \in \mathscr{D}$，则 $A^c \in \mathscr{D}$。

(3) 若 $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{D}$ 两两不交，则 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathscr{D}$。

很明显任意 σ-代数均为 Dynkin 系统。

例 2.52. 假设 X 为一具有偶数 $2n$ 个元素的有限集。X 中所有具有偶数个元素的子集构成的子集族 $\mathscr{D}$ 为一 Dynkin 系统。若 $n > 1$，则 $\mathscr{D}$ 不为一集合代数，从而也不是 σ-代数。

注 2.53. 若 $\mathscr{D}$ 为一 Dynkin 系统, 则 $\varnothing \in \mathscr{D}$。容易看出, (3) 蕴含了"$\mathscr{D}$ 中集合有限并封闭"。注意到在 Dynkin 系统的定义中，(2) 与 (3) 表明"若 $A, B \in \mathscr{D}$ 且 $A \subset B$，则 $B \setminus A \in \mathscr{D}$"。这是因为 A 与 B^c 不交，因此 $A \cup B^c \in \mathscr{D}$，从而 $B \setminus A = B \cap A^c = (A \cup B^c)^c \in \mathscr{D}$。

我们称一个非空集合 X 的子集族 S 为**单调类**若 S 中单调递增的可数集合列之并以及单调递减集合列之交均为 S 中的集合。这说明 Dynkin 系统具有"单调递增的可数集合列之并封闭"的性质。事实上，若 $\{A_k\} \subset \mathscr{D}$ 单调递增，定义 $B_1 = A_1$，$B_k = A_k \setminus A_{k-1}$（$k \geqslant 2$）。则每一 $B_k \in \mathscr{D}$ 且两两不交。故由 (3)，$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \in \mathscr{D}$。再由 (1) 和 (2)，还表明"单调递减集合列之交封闭"，因此 Dynkin 系统是单调类。

因此我们意识到，Dynkin 系统成为 σ-代数需要条件"$\mathscr{D}$ 中集合有限交封闭"。 \\\\

定理 2.54. *X 上的 Dynkin 系统为 σ-代数若 $\mathscr{D}$ 满足条件"$\mathscr{D}$ 中集合有限交封闭"。*

证明. 我们首先证明若 $A, B \in \mathscr{D}$, 则 $A\backslash B \in \mathscr{D}$。事实上, $A\backslash B = A\backslash(A\cap B)$。由"$\mathscr{D}$ 中集合有限交封闭"条件, $A\cap B \in \mathscr{D}$, 从而有上面的注记, $A\backslash B \in \mathscr{D}$。另外，"$\mathscr{D}$ 中集合有限交封闭"条件还蕴含了"$\mathscr{D}$ 中集合有限并封闭"。

一般，我们只需证明 σ-代数定义中的 (3)。假设 $\{A_k\} \subset \mathscr{D}$，定义

$$
\begin{aligned}
&B_1 = A_1, \\
&B_k = A_k \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k-1}), \quad k \geqslant 2.
\end{aligned}
$$

则 $\{B_k\} \subset \mathscr{D}$ 且两两不交。由 Dynkin 系统定义中的 (3)，$\cup A_k = \cup B_k \in \mathscr{D}$。 □

类似于 σ-代数的情形，对于集合 X 的任意子集族 S，可以定义**包含 S 的最小 Dynkin 系统**如下：定义

$$\delta(S) = \bigcap \{\mathscr{D} : \mathscr{D} \text{为包含 } S \text{ 的 Dynkin 系统}\}.$$

集合族 $\delta(S)$ 也称作 X 的子集族 S **生成的 Dynkin 系统**。

定理 2.55. *集合 X 的任意子集族 S 若满足有限交封闭则有 $\delta(S) = \sigma(S)$。*

证明. 由于任一 σ-代数为一 Dynkin 系统, $\sigma(S)$ 为一 Dynkin 系统, 故 $\delta(S) \subset \sigma(S)$。相反，如果 $\delta(S)$ 为一 σ-代数，则类似我们可以证明 $\sigma(S) \subset \delta(S)$。因此，由定理2.54，我们只需验证集合族 $\delta(S)$ 满足有限交封闭的性质。

对任意 $D \in \delta(S)$，定义

$$\mathscr{D}_D = \{A \subset X : A \cap D \in \delta(S)\}.$$

不难验证 $\mathscr{D}_D$ 为一 Dynkin 系统。任给 $E \in S$，由 S 满足有限交封闭的假设，$S \subset \mathscr{D}_E$，从而 $\delta(S) \subset \mathscr{D}_E$。因此对任意 $E \in S$ 和 $D \in \delta(S)$，$E \cap D \in \delta(S)$。这说明 $S \subset \mathscr{D}_D$，从而对所有 $D \in \delta(S)$ 有 $\delta(S) \subset \mathscr{D}_D$，即 $\delta(S)$ 满足有限交封闭的性质。 □

2.4 $\mathbb{R}^n$ 作为度量空间

习题

2.1 定义 $[0,1]$ 上的函数

$$T_1(x) := \frac{1}{3}x, \quad T_2(x) := \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

集合 $E \subset [0,1]$ 满足 $E = T_1(E) \cup T_2(E)$，则 E 为 Cantor 三分集。试构造映射 $T : [0,1] \to [0,1]$，使得 Cantor 三分集满足

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} T^i(E),$$

其中 T^i 为 T 的 i 次迭代。

2.2 设 f 为 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上的实函数，假设任给 $x, y \in \mathbb{R}$，$f(x, \cdot)$ 与 $f(\cdot, y)$ 均为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数。任给 $i \in \mathbb{Z}$，设 $a_i = i/n$，对任给 $a_i < x < a_{i+1}$，定义

$$f_n(x,y) = \frac{f(a_{i+l}, y)(x - a_i) - f(a_i, y)(x - a_{i+l})}{a_{i+l} - a_i}.$$

证明每一 f_n 均为 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上的 Borel 可测函数，并且 f 亦为 Borel 可测函数。

2.3

第三章　抽象 Lebesgue 积分

3.1　可测集・可测映射・测度

3.1.1　可测空间与可测映射

定义 3.1. 设 X 为任意非空集合，$\mathfrak{M}$ 为 X 上的 σ-代数。我们称 $(X, \mathfrak{M})$ 为一**可测空间**。$\mathfrak{M}$ 中的元素称作**可测集**。

若 $\mathscr{B}(X, \tau)$ 为 X 上的拓扑 τ 生成的 Borel 集类（决定的 σ-代数），此时则称 $(X, \mathscr{B}(X, \tau))$ 为 **Borel 可测空间**。

若 X 上的拓扑 τ 没有歧义，我们记 $\mathscr{B}(X) = \mathscr{B}(X, \tau)$。

定义 3.2. 设 $(X, \mathfrak{M})$ 为一可测空间，(Y, τ) 为一拓扑空间。映射 $f : X \to Y$ 称作**可测的**若对任意 $U \in \tau$，$f^{-1}(U) \in \mathfrak{M}$。若 $Y = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$（赋予自然的拓扑），此时可测映射 f 称作**可测函数**。

若 (X, τ_X) 为一拓扑空间，$\mathscr{B}(X, \tau)$ 为相应的 Borel 集类，则映射 $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ 称作 **Borel 可测**若任给 $U \in \tau_Y$，$f^{-1}(U) \in \mathscr{B}(X, \tau)$。

注 3.3. 我们可以在纯粹测度论框架下来引入可测性的概念。设 $(X, \mathfrak{M}_X)$，$(Y, \mathfrak{M}_Y)$ 为可测的空间，映射 $f : X \to Y$ 称作可测的若任给 $E \in \mathfrak{M}_Y$，$f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}_X$。但是在很多场合，$Y$ 为数域 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，它们都具有自然的拓扑结构。另外，任意拓扑空间 (X, τ_X) 到拓扑空间 (Y, τ_Y) 的连续映射 f 均为 Borel 可测。为建立可测映射与连续映射的联系，我们把 Y 限制为一个拓扑空间。

定理 3.4. 设 $(X, \mathfrak{M})$ 为一可测空间，(Y, τ) 为一拓扑空间，$f : X \to Y$。

(1) Y 的子集类

$$\Omega = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}\}$$

为 Y 中的 σ-代数。

(2) 若 f 可测，$E \subset Y$ 为 *Borel* 集，则 $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$。

(3) 若 $f : X \to Y$ 可测，Z 为拓扑空间，$g : Y \to Z$ 为 *Borel* 可测，则 $h = g \circ f : X \to Z$ 可测。

证明. (1) 由集合运算的如下关系

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= X, \\ f^{-1}(Y \setminus A) &= X \setminus f^{-1}(A), \\ f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) &= f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup \cdots \end{aligned}$$

可证。

对 (1) 中定义的 Ω，f 的可测性表明 $\tau \subset \Omega$。由于 Ω 为 Y 中的 σ-代数，而 $\mathscr{B}(X,\tau)$ 为包含 τ 的最小 σ-代数，故 $\mathscr{B}(X,\tau) \subset \Omega$。这就证明了 (2)。

任给 Z 中开集 V，$g^{-1}(V)$ 为 Y 中 Borel 集，则由 (2)，

$$h^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathfrak{M}.$$

故 h 可测。 □

注 3.5. 在很多 (概率论) 教科书中，通常用“Borel 集原像为可测集”这一刻画来描述映射 f 的可测性。定理3.4 (2) 表明这两种表述等价。关于定理3.4 (3) 的一个自然的问题是：一般而言两个可测映射的复合映射是否可测？后面我们将看到，这个结论是不正确的！

一般而言，设 $(X,\mathfrak{M})$ 为一可测空间，Y 为一集合（注意这里我们并没有假设 Y 为拓扑空间)，$f : X \to Y$ 为一映射。我们说 X 上的 σ-代数 $\mathfrak{M}$ 可以通过映射 f 从 X 前推（push forward）到 Y 上。下面我们来解释上述定理3.4 (1) 实际上给出了这个过程。事实上 $\Omega = \{E \subset Y : f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}\}$ 就定义了 Y 上的一个 σ-代数，通常记作 $f_*\mathfrak{M}$。在可测空间 $(Y, f_*\mathfrak{M})$ 上，我们可以引入

$$\nu(E) = \mu(f^{-1}(E)), \quad E \in f_*\mathfrak{M}.$$

由 f^{-1} 对集合运算的保持性，我们可以验证这里定义的 ν 为 $(Y, f_*\mathfrak{M})$ 上的测度。通常我们记 ν 为 $f_*\mu$。测度空间 $(Y, f_*\mathfrak{M}, f_*\mu)$ 称作测度空间 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 在映射 f 下的前推。

思考题：设 X 为集合，$(Y,\mathfrak{M})$ 为可测空间，$f : X \to Y$。

(1) 证明 $f^*\mathfrak{M} = \{f^{-1}(E) \subset X : E \in \mathfrak{M}\}$ 为 X 上的 σ-代数；

(2) 若 $g : X \to \mathbb{R}$ 为 $f^*\mathfrak{M}$-可测的，证明存在 $h : Y \to \mathbb{R}$ 使得 $g = h \circ f$。

3.1.2 测度空间

定义 3.6. 设 $(X,\mathfrak{M})$ 为一可测空间。$\mu:\mathfrak{M}\to[0,+\infty]$ 称作 $(X,\mathfrak{M})$ 上的一个（正）测度如果存在 $A\in\mathfrak{M}$ 使得 $\mu(A)<+\infty$，且满足下面的**可列可加性**: 任给序列 $\{A_k\}\subset\mathfrak{M}$，$A_k$ 两两不交，

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_k). \tag{3.1}$$

我们称 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 为**测度空间**。

在测度的定义中，μ 的值域 $[0,+\infty]$ 也可以替换成实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$。但是值得注意的是，在后两种情形，定义中的(3.1)等式应该与 A_n 的次序无关的。因此我们需要(3.1)右端的级数是绝对收敛的。实数域 $\mathbb{R}$ 的情形，我们称 μ 为**符号测度**，复数域 $\mathbb{C}$ 的情形称 μ 为**复测度**（参见 [19] 和 [11]）。

需要注意的是，如果有两个 X 上的 σ-代数 $\mathfrak{M}'\subset\mathfrak{M}$，$(X,\mathfrak{M})$ 上的测度 μ 限制在 $\mathfrak{M}'$ 上仍为一测度。

在本课程，除了特殊说明，我们仅仅考虑正测度。

例 3.7. 除去本课程讲着重介绍的 Lebesgue 测度，我们还有下面两类特殊而重要的测度。

(a) 设 X 为非空集合，$\mathscr{P}(X)$ 为幂集，$(X,\mathscr{P}(X))$ 为一（平凡的）可测空间。我们定义

$$\mu(E)=\begin{cases}\text{card}\,(E), & E\text{ 为有限集},\\ \infty, & E\text{ 为无穷集}.\end{cases}$$

测度 μ 称作 X 上的**计数测度**。

(b) 同样考虑可测空间 $(X,\mathscr{P}(X))$。定义

$$\mu(E)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ 0, & x\notin E.\end{cases}$$

测度 μ 称作 X 上的 **Dirac 测度**或**原子测度**。 \\\\

定理 3.8 (测度的基本性质)**.** 设 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 为测度空间。

(1) $\mu(\varnothing)=0$。

(2) 若 $A_1,\dots,A_k$ 可测且两两不交，则 $\mu(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)=\sum_{i=1}^{k}\mu(A_i)$。

(3) 若 A,B 可测且 $A\subset B$，则 $\mu(A)\leqslant\mu(B)$ 且 $\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A)$。

证明. 由定义，存在 $A \in \mathfrak{M}$，$\mu(A) < \infty$。构造可测集序列 $\{E_k\}$，$E_1 = A$，$E_k = \varnothing$（$k \geqslant 2$）。对 $\{E_k\}$ 运用可列可加性，则

$$\mu(A) = \mu(A) + \sum_{k \geqslant 2} \mu(E_k) = \mu(A) + \sum_{k \geqslant 2} \mu(\varnothing)$$

由于 $\mu(A) < \infty$，则由 $\sum_{k \geqslant 2} \mu(\varnothing) = 0$。因此 $\mu(\varnothing) = 0$。

类似定义 $E_n = A_n$（$1 \leqslant n \leqslant k$）且 $E_n = \varnothing$（$n > k$）。对 $\{E_n\}$ 运用可列可加性，则 (2) 得证。

由等式 $B = A \cup (B \setminus A)$，(3) 是 (2) 的直接推论。 □

定理 3.9 (测度的极限性质)**.** 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为测度空间。

(1) 设 $\{A_k\} \subset \mathfrak{M}$ 为单调递增序列（即 $A_k \subset A_{k+1}$ 对任给 k），$A = \bigcup_{k \geqslant 1} A_k$，则 $\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu(A)$。

(2) 设 $\{A_k\} \subset \mathfrak{M}$ 为单调递减序列（即 $A_k \supset A_{k+1}$ 对任给 k），$\mu(A_1) < \infty$，$A = \bigcap_{k \geqslant 1} A_k$，则 $\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu(A)$。

注 3.10. 设 $X = \{1, 2, \ldots\}$，$A_k = \{k, k+1, \ldots\}$，μ 为 X 上的计数测度。则 $A = \bigcap_{k \geqslant 1} A_k = \varnothing$，但 $\mu(A_k) = \infty$。因此 (2) 中结论不成立。

证明. 设 $\{A_k\} \subset \mathfrak{M}$ 为单调递增序列且 $A = \bigcup_{k \geqslant 1} A_k$。对任意 k 定义 $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$（$k > 1$），$B_1 = A_1$。则 $\{B_k\}$ 两两不交，并且 $A_k = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$，$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$。因此由测度的有限可加性与可列可加性

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{k} B_i) = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \mu(A).$$

这就证明了 (1)。

设 $\{A_k\} \subset \mathfrak{M}$ 为单调递减序列。定义 $C_k = A_1 \setminus A_k$ 及

$$C = \bigcup_{k \geqslant 1} C_k = A_1 \setminus \bigcap_{k \geqslant 1} A_k = A_1 \setminus A.$$

则 $\{C_k\} \subset \mathfrak{M}$ 为单调递增序列。则由 (1)，$\lim_{k \to \infty} \mu(C_k) = \mu(C)$，即

$$\begin{aligned} &\mu(A_1) - \lim_{k \to \infty} \mu(A_k) \\ = &\lim_{k \to \infty} \{\mu(A_1) - \mu(A_k)\} = \lim_{k \to \infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \mu(A_1 \setminus A) \\ = &\mu(A_1) - \mu(A). \end{aligned}$$

因为 $\mu(A_1) < \infty$，上式两边消去 $\mu(A_1)$，则 (2) 得证。 □

3.2 可测函数

在这一节，我们将着重探讨可测实函数 $f : X \to \mathbb{R}$ 或可测广义实函数 $f : X \to [-\infty, +\infty]$ 的性质。回忆一下例2.38，添上包含 $\pm\infty$ 的开区间，$[-\infty, +\infty]$ 为一紧拓扑空间且继承了实数集 $\mathbb{R}$ 的全序关系。记 $[-\infty, +\infty]$ 上的该拓扑为 τ_e

在考虑 $f : X \to [-\infty, +\infty]$ 的可测性之前，我们先来考虑其连续性。为方便我们记

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I}_1 = \{(a, b) : -\infty < a < b < +\infty\},\\
&\mathcal{I}_2 = \{[-\infty, b) : -\infty < b < +\infty\}, \quad \mathcal{I}_2' = \quad \{(-\infty, b) : -\infty < b < +\infty\},\\
&\mathcal{I}_3 = \{(a, +\infty] : -\infty < a < +\infty\}, \quad \mathcal{I}_3' = \quad \{(a, +\infty) : -\infty < a < +\infty\},\\
&\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{\varnothing\}.
\end{aligned}
$$

定理 3.11. 设 $f : X \to [-\infty, +\infty]$，则下面的说法等价。

(1) f 连续。

(2) 任给 $I \in \mathcal{I}$，$f^{-1}(I)$ 为 $\mathbb{R}$ 中开集。

若 f 的值域不包含 $\pm\infty$，则上述 *(1)* 和 *(2)* 等价于

(3) 任给 $I \in \mathcal{I}_1$，$f^{-1}(I)$ 为 $\mathbb{R}$ 中开集。

证明. 由 $[-\infty, +\infty]$ 中拓扑的定义，(1) 蕴含了 (2) 是平凡的。

假设 $G \subset [-\infty, +\infty]$ 为一开集（除去 $\mathbb{R}$ 和 $\varnothing$ 的平凡情形），由例2.38，存在两两不交的至多可数个非平凡的 $I_k \in \mathcal{I}$，使得 $G = \bigcup_{k\geqslant 1} I_k$。因此 (2) 由 (1) 以及关系

$$
f^{-1}(G) = f^{-1}(\bigcup_{k\geqslant 1} I_k) = \bigcup_{k\geqslant 1} f^{-1}(I_k) \tag{3.2}
$$

得到。

若 f 的值域不包含 $\pm\infty$，则 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1$。 □

进一步，我们定义

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{I}_4 = \{[a, +\infty] : -\infty < a < +\infty\}, \quad \mathcal{I}_4' = \quad \{[a, +\infty) : -\infty < a < +\infty\},\\
&\mathcal{I}_5 = \{[-\infty, b] : -\infty < b < +\infty\}, \quad \mathcal{I}_5' = \quad \{(-\infty, b] : -\infty < b < +\infty\},\\
&\mathcal{I}_6 = \{[a, b] : -\infty < a < b < +\infty\}.
\end{aligned}
$$

引理 3.12. 假设 $\mathscr{B}_e$ 为 $[-\infty,+\infty]$ 上包含 τ_e 的最小 σ-代数。则 $\mathscr{B}=\mathscr{B}_i$，$i=1,\ldots,6$，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B}_i$（$i=1,\ldots,6$）分别为包含 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}_i$（$i=1,\ldots,6$）的最小 σ-代数。则

$$\mathscr{B}_e=\mathscr{B}, \quad \text{且} \quad \mathscr{B}_e=\mathscr{B}_i,\ i=1,\ldots,6.$$

证明. 首先由于 $\mathcal{I}\subset\tau_e$，故 $\mathscr{B}\subset\mathscr{B}_e$。由例2.38，任给 $G\subset[-\infty,+\infty]$ 为非平凡开集，存在两两不交的 $\{I_k\}\subset\mathcal{I}$，使得 $G=\bigcup_{k\geqslant 1}I_k$。 □

定理 3.13. 设 $f:X\to[-\infty,+\infty]$，则下面的说法等价。

(1) f 可测。

(2) 任给 $I\in\mathcal{I}_1$（或者 $\mathcal{I}_2,\mathcal{I}_3,\mathcal{I}_4,\mathcal{I}_5,\mathcal{I}_6$），$f^{-1}(I)$ 可测。

若 f 的值域不包含 $\pm\infty$，则上述 *(1)* 和 *(2)* 等价于

(3) 任给 $I\in\mathcal{I}_1$（或者 $\mathcal{I}'_2,\mathcal{I}'_3,\mathcal{I}'_4,\mathcal{I}'_5,\mathcal{I}_6$），$f^{-1}(I)$ 为 $\mathbb{R}$ 中开集。

证明. 我们先考虑 $\mathcal{I}_1$ 的情形。此时 (1) 蕴含 (2) 平凡。

反之，假设对任给 $I\in\mathcal{I}_1$，$f^{-1}(I)$ 可测。假设 $G\subset[-\infty,+\infty]$ 为一开集 (除去 $\mathbb{R}$ 和 $\varnothing$ 的平凡情形)，由例2.38，存在两两不交的至多可数个非平凡的 $I_k\in\mathcal{I}$，使得 $G=\bigcup_{k\geqslant 1}I_k$。类似于定理的证明，(2) 由 (1) 以及关系(3.2)得到。

□

思考题：设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为开集，$a\in\mathbb{R}^n$，$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为一非退化线性变换，$\Phi(x)=T(x)+a$ 为一仿射变换。证明若 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可测实函数，则 $f\circ\Phi$ 亦 Lebesgue 可测，且

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(y)\,dm(y)=\int_{\Omega} f\circ\Phi(x)\cdot|\det T|\,dm(x).$$

3.3 Lebesgue 积分

3.3.1 Lebesgue 积分

定义 3.14. 设 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 为测度空间，Lebesgue 积分定义一般采取以下步骤：

(1) 若 s 为形如 $s=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\mathbf{1}_{A_i}$ 的简单函数，定义 s 的 Lebesgue 积分

$$\int_E s\,d\mu=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\mu(E\cap A_i), \quad E\in\mathfrak{M}.$$

这里约定 $0\cdot\infty=0$，因为我们并没有排除某 $\alpha_n=0$。

(2) 若 f 为 X 上的非负可测函数，定义

$$\int_E f\,d\mu = \sup_{0\leqslant s\leqslant f}\int_E s\,d\mu,\quad E\in\mathfrak{M},$$

其中 s 为简单函数。上式中定义的 $\int_E f\,d\mu$ 称作 f **在可测集 E 上关于测度 μ 的 Lebesgue 积分**。

(3) 对于一般的可测函数 f，$f=f^+-f^-$，$f^\pm$ 非负可测，定义

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f^+\,d\mu - \int_E f^-\,d\mu,\quad E\in\mathfrak{M}.$$

这里我们约定不允许出现 $\infty-\infty$ 的情形，否则我们不认为 *Lebesgue* 积分有定义。

注 3.15. 在上述定义中，对于简单函数 s 而言，实际上有两种 Lebesgue 积分的定义，但是它们是相容的。实际上在 (2) 中，定义中的 sup 是可以实现的。

定义 3.16. 设 X 为无穷集（可以为不可数），f 为 X 上的非负函数，我们称

$$\sum_{x\in X} f(x) = \sup\left\{\sum_{x\in A} f(x) : A\subset X \text{ 为有限集}\right\} \tag{3.3}$$

为**无穷集 $\{f(x)\}_{x\in X}$ 之和**。

定理 3.17. 设 $(X,\mathscr{P}(X),\mu)$ 为计数测度空间，f 为 X 上的非负函数，则 f 可测且

$$\sum_{x\in X} f(x) = \int_X f\,d\mu.$$

特别，若 $X=\mathbb{N}$，$f(n)=a_n$（$n\in\mathbb{N}$），则

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \int_{\mathbb{N}} f\,d\mu.$$

证明. 任给 $A\subset X$ 为有限集，设 $s=\sum_{x_i\in A} f(x_i)\mathbf{1}_{x_i}$，则 $s\leqslant f$ 且 $\int_X s\,d\mu = \sum_{x\in A} f(x)$。因此 $\sum_{x\in A} f(x)\leqslant \int_X f\,d\mu$。由(3.3)，则 $\sum_{x\in X} f(x)\leqslant\int_X f\,d\mu$。

反之，不妨设 $\sum_{x\in X} f(x) < \infty$。任给简单函数 $0\leqslant s\leqslant f$，$s=\sum_{n=1}^N \alpha_n\mathbf{1}_{E_n}$。不妨设 α_n 均不为 0。不难验证

$$\sum_{x\in E_n} s(x)\leqslant \sum_{x\in X} s(x)\leqslant\sum_{x\in X} f(x)<\infty.$$

这表明每一 E_n 均为有限集，从而 $A=\bigcup_{n=1}^N E_n$ 亦为有限集。因此

$$\int_X s\,d\mu = \int_A s\,d\mu = \sum_{x\in A} s(x)\leqslant \sum_{x\in A} f(x).$$

由 s 的任意性，$\int_X f\,d\mu\leqslant\sum_{x\in X} f(x)$。 □

思考题：验证任给测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上的非负简单函数 s, $\nu_s(E) = \int_E s\, d\mu$, $E \in \mathfrak{M}$，定义了 X 上的一个测度。

我们先初步研究 Lebesgue 积分的一些性质。

命题 3.18. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为测度空间，f, g 为 X 上的可测函数。

(1) 若 $0 \leqslant f \leqslant g$，则 $\int_E f\, d\mu \leqslant \int_E g\, d\mu$，$E \in \mathfrak{M}$。

(2) 若 $A, B \in \mathfrak{M}$，$A \subset B$，且 $f \geqslant 0$，则 $\int_A f\, d\mu \leqslant \int_B f\, d\mu$。

(3) 若 $f \geqslant 0$ 且 $c \geqslant 0$，则 $\int_E cf\, d\mu = c\int_E f\, d\mu$，$E \in \mathfrak{M}$。

(4) 若 $f|_E \equiv 0$，则 $\int_E f\, d\mu = 0$。（即便 $\mu(E) = \infty$）

(5) 若 $\mu(E) = 0$，则 $\int_E f\, d\mu = 0$。（即便 $f \equiv \infty$ 于 E）

(6) 若 $f \geqslant 0$，则 $\int_E f\, d\mu = \int_X \mathbf{1}_E \cdot f\, d\mu$，$E \in \mathfrak{M}$。

上述的 Lebesgue 积分的性质是不完整的，原因是我们缺少了积分收敛定理。

定理 3.19 (单调收敛定理)**.** 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为测度空间，$\{f_n\}$ 为 X 上单调递增的非负可测函数序列，且 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，$x \in X$。则 f 可测且

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

证明. 因为 $\{\int_X f_n\, d\mu\}$ 为单调递增的数列，则存在 $\alpha \in [0, \infty]$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \alpha.$$

不妨设 $\alpha < \infty$，则 $\alpha \leqslant \int_X f\, d\mu$。我们接下来证明相反的不等式。

对简单函数 s，$0 \leqslant s \leqslant f$，设 $c \in (0, 1)$。定义

$$E_n = \{x \in X : f_n(x) \geqslant cs(x)\}.$$

则集合列 $\{E_n\}$ 单调递增且 $X = \bigcup_{n\geqslant 1} E_n$。故

$$\int_X f_n\, d\mu \geqslant \int_{E_n} f_n\, d\mu \geqslant \int_{E_n} cs\, d\mu = c\int_{E_n} s\, d\mu = c\nu_s(E_n).$$

由测度 ν_s 的极限性质，则

$$\alpha \geqslant c\nu_s(X) = c\int_X s\, d\mu.$$

由 $c \in (0, 1)$ 的任意性，在由 s 的任意性，则 $\alpha \geqslant \int_X f\, d\mu$。证毕。 □

利用单调收敛定理，我们可以得到 Lebesgue 积分更多的性质。

定理 3.20. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为测度空间，f 非负可测，则

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu, \quad E \in \mathfrak{M}$$

在可测空间 $(X, \mathfrak{M})$ 上满足可列可加性。

证明. 由前面的思考题，我们知道对任意非负简单函数 s，$\nu_s(E) = \int_E s \, d\mu$ 定义了 X 上的一个测度。因此，若 $\{E_k\}$ 为两两互不相交的 X 中的可测集列，$E = \bigcup_{k \geqslant 1} E_k$，则

$$\int_E s \, d\mu = \nu_s(E) = \sum_{k \geqslant 1} \nu_s(E_k).$$

设 $0 \leqslant s_n \leqslant f$，当 $n \to \infty$ 时 $s_n \nearrow f$。由单调收敛定理，

$$\nu(E_k) = \int_{E_k} f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{E_k} s_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \nu_{s_n}(E_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

注意到 $\nu_{s_n}(E_k) \nearrow \nu(E_k)$（$n \to \infty$），则由定理3.17以及关于计数测度积分的单调收敛定理，

$$\begin{aligned}\sum_{k \geqslant 1} \nu(E_k) &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k \geqslant 1} \nu_{s_n}(E_k) = \lim_{n \to \infty} \nu_{s_n}(E) = \lim_{n \to \infty} \int_E s_n \, d\mu \\ &= \int_E f \, d\mu = \nu(E).\end{aligned}$$

这证明了 ν 满足可列可加性。 □

3.3.2 可积函数

定义 3.21. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为测度空间，我们称 X 上的可测函数 $f \in L^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$（或简记为 $L^1(\mu)$）若

$$\|f\|_1 := \int_X |f| \, d\mu < \infty.$$

此时我们称 f 为 μ-**可积**函数。后面我们将 $\|\cdot\|_1$ 称作 L^1 范数。

定理 3.22. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为测度空间。

(1) $L^1(\mu)$ 为一线性空间。

(2) 设 $f \in L^1(\mu)$ 且 $f \geqslant 0$，则 $\nu(E) = \int_E f \, d\mu$，$E \in \mathfrak{M}$，定义了可测空间 $(X, \mathfrak{M})$ 上的测度。

(3) 若 $f \in L^1(\mu)$，则 f 满足**积分绝对连续性**，即任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得 $\mu(E) < \delta \Longrightarrow \int_E f\, d\mu < \varepsilon$。

证明. 我们先假设 $f, g \geqslant 0$，$c \geqslant 0$。设 $\{s_n\}$ 与 $\{t_n\}$ 均为单调递增的非负简单函数序列，且分别逐点收敛于 f 和 g，则 $\{s_n + t_n\}$ 与 $\{cs_n\}$ 亦为单调递增的非负简单函数序列，且逐点收敛于 $f + g$ 和 cf。由单调收敛定理，

$$\begin{aligned}\int_X f + g\, d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_X s_n + t_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X s_n\, d\mu + \lim_{n\to\infty}\int_X t_n\, d\mu \\ &= \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu,\end{aligned}$$

$$\int_X cf\, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X cs_n\, d\mu = c\lim_{n\to\infty}\int_X s_n\, d\mu = c\int_X f\, d\mu.$$

假设 $f, g \in L^1(\mu)$，设 $h = f + g$，则 $|h| \leqslant |f| + |g|$，因此 $h \in L^1(\mu)$。又

$$h^+ - h^- = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

即

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

因此

$$\int_X h^+\, d\mu - \int_X h^-\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu + \int_X g^+\, d\mu - \int_X g^-\, d\mu.$$

换句话说

$$\int_X h\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$

接下来，设 $f \in L^1(\mu)$，$\alpha \in \mathbb{R}$。若 $\alpha \geqslant 0$，则 $(\alpha f)^\pm = \alpha f^\pm$。因此

$$\begin{aligned}\int_X \alpha f\, d\mu &= \int_X (\alpha f)^+\, d\mu - \int_X (\alpha f)^-\, d\mu \\ &= \alpha\int_X f^+\, d\mu - \alpha\int_X f^-\, d\mu = \alpha\int_X f\, d\mu.\end{aligned}$$

若 $\alpha = -1$，则 $(-f)^\pm = f^\mp$，因此

$$\begin{aligned}\int_X (-f)\, d\mu &= \int_X (-f)^+\, d\mu - \int_X (-f)^-\, d\mu \\ &= \int_X f^-\, d\mu - \int_X f^+\, d\mu = -\int_X f\, d\mu.\end{aligned}$$

若 $\alpha < 0$，一般情形由 $\alpha = -|\alpha|$ 得到。这就证明了 (1)。

(2) 由定理3.20及 $f \in L^1(\mu)$ 得到。

任给 $\varepsilon > 0$，存在简单函数 $0 \leqslant s \leqslant f$，使得

$$\int_X f\,d\mu - \int_X s\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对 s，设 $M = \sup_{x \in X} |s(x)|$ 并令 $\delta = \varepsilon/2M$。则若 $\mu(E) < \delta$，

$$\int_E f\,d\mu = \left(\int_E f\,d\mu - \int_E s\,d\mu\right) + \int_E s\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \delta \cdot M < \varepsilon.$$

证毕。 □

3.3.3 零测集的作用

设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为测度空间。一个命题 P 若对除去一个 μ-零测集上的点成立，则称 P 为 **μ-几乎处处**成立，记作 μ-a.e. 或 a.e.。因为在零测集上，任何可测函数的积分均为 0，故在 Lebesgue 积分的意义下，零测集是可以被忽略的。

若 f, g 为 X 上的可测函数，$f \sim g$ 当且仅当 $f = g$，μ-a.e.，定义了一个等价关系。事实上，当我们考虑 $f \in L^1(\mu)$ 时，我们实际上是考虑关于上述等价关系 $\sim$ 的一个等价类。

对测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$，我们希望把所有可能的 μ-零测集添加到 $\mathfrak{M}$ 中。这个过程称作测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 的完备化。

定义 3.23. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为测度空间。定义 X 的子集类 $\mathfrak{M}^*$ 如下：

$$E \in \mathfrak{M}^* \quad \Longleftrightarrow \quad \exists A, B \in \mathfrak{M}, A \subset E \subset B, \mu(B \setminus A) = 0.$$

不难验证 $\mathfrak{M}^*$ 为 X 上的 σ-代数，$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^*$。在 $\mathfrak{M}^*$ 上定义

$$\mu^*(E) = \mu(A) = \mu(B), \quad E \in \mathfrak{M}^*,$$

其中 $A, B \in \mathfrak{M}$ 由 $\mathfrak{M}^*$ 的定义决定。同样不难验证 μ^* 为 $\mathfrak{M}^*$ 上的测度。测度空间 $(X, \mathfrak{M}^*, \mu^*)$ 称作测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 的**完备化**。

命题 3.24. *我们有下面简单但重要的 Lebesgue 积分的结论。*

(1) *设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为测度空间，f 为 X 上非负可测函数，$E \in \mathfrak{M}$。若 $\int_E f\,d\mu = 0$，则 $f = 0$，μ-a.e.。*

(2) *设 $f \in L^1(X, \mathfrak{M}, \mu)$。若任给 $E \in \mathfrak{M}$，$\int_E f\,d\mu = 0$，则 $f = 0$，μ-a.e.。*

(3) *若 $f \in L^1(\mu)$，则*

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leqslant \int_X |f|\,d\mu.$$

上面不等式等号成立当且仅当存在 $\alpha = \pm 1$，使得 $|f| = \alpha f$，μ-a.e.。

(4) 若 $f \in L^1(\mu)$，则 f 几乎处处有限，即 $\{x \in X : |f(x)| = \infty\}$ 为 μ-零测集。

证明. 设 $A_n = \{x \in X : |f(x)| > 1/n\}$ $(n \in \mathbb{N})$，则任给 $n \in \mathbb{N}$，

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) \leqslant \int_{A_n} f\, d\mu \leqslant \int_X f\, d\mu = 0.$$

因此 $\mu(A_n) = 0$。又 $\{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_n A_n$，这就证明了 (1)。

设 $E = \{x \in X : f(x) \geqslant 0\}$，则 $\int_E f^+\, d\mu = \int_E f\, d\mu = 0$ 表明 $f^+ = 0$，μ-a.e.。类似，$f^- = 0$，μ-a.e.。这就证明了 (2)。

注意到 $f = f^+ - f^-$，$|f| = f^+ + f^-$，故

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| = \left|\int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu\right| \leqslant \int_X f^+\, d\mu + \int_X f^-\, d\mu = \int_X |f|\, d\mu.$$

注意到对 $a, b \geqslant 0$，不等式 $|a-b| \leqslant a+b$ 等号成立当且仅当 $a = 0$ 或 $b = 0$。因此，上面等式等号成立当且仅当 $\int_X f^+\, d\mu = 0$ 或 $\int_X f^-\, d\mu = 0$。结合 (1)，这就证明了 (3)。

最后我们来证明 (4)。设 $N = \{x \in X : |f(x)| = \infty\}$。若 $\mu(N) > 0$，则 $\int_X |f|\, d\mu \geqslant \int_N |f|\, d\mu = \infty$。这与 $f \in L^1(\mu)$ 矛盾。 □

3.3.4 积分收敛定理

前面我们对于单调递增的非负可测函数，证明了单调收敛定理。本节我们将考虑更一般的情形。

定理 3.25 (Fatou 引理)**.** 设 $\{f_n\}$ 为 X 上的可测函数序列，$g \in L^1(\mu)$，$\inf_n f_n \geqslant g$。则

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu. \tag{3.4}$$

若存在 $g \in L^1(\mu)$ 使得 $\sup_n f_n \leqslant g$，则

$$\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n\, d\mu \geqslant \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu. \tag{3.5}$$

证明. 设 $h_k = \inf_{n\geqslant k} f_n - g$，则 $h_k \geqslant 0$，且 $\{h_k\}$ 单调递增，$h_k \leqslant f_k - g$。由单调收敛定理，

$$\begin{aligned}\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n - g\, d\mu &= \int_X \lim_{k\to\infty} h_k\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X h_k\, d\mu \\ &= \liminf_{k\to\infty} \int_X h_k\, d\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k - g\, d\mu.\end{aligned}$$

这表明

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu - \int_X g \, d\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu - \int_X g \, d\mu.$$

又 $g \in L^1(\mu)$，上式两边消去 $\int_X g \, d\mu$，(3.4)得证。

(3.5)的证明类似。 □

注 3.26. 上述形式的 Fatou 引理说明积分有某种意义下的半连续性。设 $g \in L^1(\mu)$，我们对可测函数空间 $\mathcal{L}(X, \mathfrak{M})$ 的子集 $\mathcal{L}_g^- = \mathcal{L}(X, \mathfrak{M}) \cap \{f : f \geqslant g\}$ 和 $\mathcal{L}_g^+ = \mathcal{L}(X, \mathfrak{M}) \cap \{f : f \leqslant g\}$ 引入逐点收敛的拓扑，则积分作为 $\mathcal{L}_g^-$ 和 $\mathcal{L}_g^+$ 上的函数，分别是下半连续和上半连续的。因此对 $\mathcal{L}_g = \{f : |f| \leqslant g\}$ 以及上述拓扑，积分是连续的。换句话说，*我们实际上证明了下面的 Lebesgue 控制收敛定理*。不过，我们还是会给一个直接的证明。另外，一般当取 $g \equiv 0$ 时，我们称定理3.25亦为 Fatou 引理。

定理 3.27 (控制收敛定理). *设 $\{f_n\}$ 为 X 上的可测函数序列*, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in X$。*若存在 $g \in L^1(\mu)$ 使得 $|f_n(x)| \leqslant g(x)$*, $x \in X$, *则 $f, f_n \in L^1(\mu)$ $(n \in \mathbb{N})$，且*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

证明. 对非负可测函数序列 $\{2g - |f_n - f|\}$ 运用 Fatou 引理，则

$$\begin{aligned}\int_X 2g \, d\mu &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|) \, d\mu \\ &= \int_X 2g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu.\end{aligned}$$

因为 $g \in L^1(\mu)$，上式消去 $\int_X 2g \, d\mu$，得 $\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \leqslant 0$。 □

3.4 收敛的模式

对集合 X 上的函数序列 $\{f_n\}$，表述“当 $n \to \infty$ 时，$f_n \to f$”有很多不同的意义。粗略地说，不同的对于序列 $\{f_n\}$ 所在函数空间的不同拓扑，决定了 $\{f_n\}$ 的不同收敛模式。本节我们主要讨论一些常见的收敛模式，以及它们之间相互的关系。

定义 3.28. 我们给出常见的几种收敛的模式：

- X 上的实函数序列 $\{f_n\}$ 称作**逐点收敛于函数** f 若对任给 $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$。若 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为测度空间，X 上的可测实函数序列 $\{f_n\}$ 称作 **μ-几乎处处收敛于函数** f，若集合 $\{x \in X : f_n(x) \not\to f(x), n \to \infty\}$ 为 μ-零测集。

- X 上的实函数序列 $\{f_n\}$ 称作**一致收敛于函数** f 若任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得当 $n > N$ 时，$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 对 $x \in X$ 一致成立。若上述一致性对于拓扑空间 X 中任意紧集成立，则称 $\{f_n\}$ 称作**在紧集上一致收敛于函数** f。
- 若 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为测度空间，X 上的可测实函数序列 $\{f_n\}$ 称作 L^1 **收敛于可测函数** f，若 $f_n, f \in L^1(\mu)$（$n \in \mathbb{N}$）且 $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$。
- 若 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为测度空间，X 上的可测实函数序列 $\{f_n\}$ 称作**依测度** μ **收敛于可测函数** f，若任给 $\varepsilon > 0$，$E_{n,\varepsilon} = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$，$\lim_{n\to\infty} \mu(E_{n,\varepsilon}) = 0$。
- 若 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为测度空间，X 上的可测实函数序列 $\{f_n\}$ 称作 μ **近一致收敛于可测函数** f，若任给 $\varepsilon > 0$，存在 $E \in \mathfrak{M}$，使得 $\{f_n\}$ 在 $X \setminus E$ 上一致收敛于 f。

定理 3.29 (Chebyshev 不等式)**.** *设 f 为测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上的非负可测函数，$\varepsilon > 0$，则*

$$\mu(\{f > \varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_1.$$

证明. 简单的可由

$$\int_X f\, d\mu \geqslant \int_{\{f > \varepsilon\}} f\, d\mu \geqslant \varepsilon \mu(\{f > \varepsilon\})$$

得到。 □

注 3.30. Chebyshev 不等式表明，L^1 收敛蕴含了依测度收敛。

定理 3.31 (Lebesgue)**.** *若 $\mu(X) < \infty$，则几乎处处收敛蕴含了依测度收敛。*

证明. 设 $\{f_n\}$ 为 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上的可测函数序列，μ-几乎处处收敛于 f。任给 $\varepsilon > 0$，$n \in \mathbb{N}$，定义集合

$$E_{n,\varepsilon} = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}, \quad S_\varepsilon = \limsup_{n\to\infty} E_{n,\varepsilon}. \tag{3.6}$$

则 $\mu(S_\varepsilon) = 0$。注意到可测集列 $\{\bigcup_{n \geqslant k} E_{n,\varepsilon}\}$ 关于 k 是单调递减，并且 $\mu(X) < \infty$，故 $\lim_{k\to\infty} \mu(\bigcup_{n\geqslant k} E_{n,\varepsilon}) = \mu(S_\varepsilon) = 0$。因此 $\{f_n\}$ 依测度 μ 收敛于 f。 □

引理 3.32 (Borel–Cantelli)**.** *设 $E_k \subset X$ 为一可测集序列。若*

$$\sum_{k \geqslant 1} \mu(E_k) < \infty,$$

则 $\mu(\limsup_{k\to\infty} E_k) = 0$.

证明. 设 $A_k = \cup_{i \geqslant k} E_i$。由于 $\sum_{k \geqslant 1} \mu(E_k) < \infty$，故

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) \leqslant \lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) = 0.$$

因为 A_n 单调递减，并且 $\mu(A_1) \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \mu(E_k) < \infty$，由测度的极限性质 $\mu(\limsup_{k \to \infty} E_k) = 0$。 □

推论 3.33. 设 $\varepsilon_n \searrow 0$，g_n 可测，$E_n = \{x \in X : |g_n(x)| \geqslant \varepsilon_n\}$。若 $\sum_{n \geqslant 1} \mu(E_n) < \infty$，则 g_n 几乎处处收敛于 0。并且任给 $\varepsilon > 0$ 存在集合 E 使得 $\mu(E) < \varepsilon$ 且 g_n 在 $X \setminus E$ 上一致收敛于 0.

证明. 任给 $\varepsilon > 0$。对集合 $F_n = \{x \in X : |g_n(x)| \geqslant \varepsilon\}$ 运用 Borel–Cantelli 引理（当 n 很大时 $F_n \subset E_n$），则 $\mu(\limsup_{n \to \infty} F_n) = 0$。这表明 g_n 几乎处处收敛于 0。

对充分大的 N 使得 $\sum_{n \geqslant N} E_n < \varepsilon$，取 $E = \cup_{n \geqslant N} E_n$，则 $\mu(E) < \varepsilon$ 且

$$|g_n(x)| < \varepsilon_n, \quad x \in X \setminus E, n > N.$$

这就表明 g_n 在 $X \setminus E$ 上一致收敛于 0。 □

定理 3.34 (F. Riesz)**.** 依测度收敛序列存在几乎处处收敛的子列。

证明. 假设 f_n 以测度 μ 收敛于 f。设 $E_{n,k} = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\}$。则 $\lim_{n \to \infty} \mu(E_{n.k}) = 0$。因此存在子列 n_k 使得

$$\mu(E_{n,k}) < \frac{1}{2^k}, \quad n \geqslant n_k.$$

考虑 $g_k = |f_{n_k} - f|$，运用推论3.33，则 g_k 几乎处处收敛于 0，即 f_{n_k} 几乎处处收敛于 f。 □

定理 3.35 (Egoroff)**.** 设 $\mu(x) < \infty$，则几乎处处收敛蕴含了近一致收敛。

证明. 设 $g_n = \sup_{k \geqslant n} |f_k - f|$，则 $\{g_n\}$ 几乎处处收敛于 0。由定理3.31，$\{g_n\}$ 依测度收敛于 0。因此存在子列 $\{n_k\}$，使得

$$\mu(\{g_{n_k} > 1/k\}) < \frac{1}{2^k}.$$

由推论3.33，$\{g_{n_k}\}$ 几乎处处收敛于 0。又当 $n > n_k$ 时 $|f_n - f| \leqslant g_{n_k}$，故 $\{f_n - f\}$ 近一致收敛于 0。 □

例 3.36. 下面的例子可以用来区分各种收敛模式：

(1) $f_n = \mathbf{1}_{[0,n]}$。

(2) $f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$。

(3) $f_n = n\mathbf{1}_{[0,1/n]}$。

(4) $f_n = \mathbf{1}_{[j/2^k.(j+1)/2^k]}$，其中 $n = 2^k + j$，$0 \leqslant j < k$。

利用 Urysohn 引理，还可以构造出相应的连续函数序列。需要注意的是 (4) 中 Riesz 的例子，该序列在 $[0,1]$ 上处处不收敛于 0，但依测度收敛于 0。另外，利用特征函数，还可以构造其他类型的序列以满足特定条件。

这些函数列还给出了前面某些命题由于缺失某些条件不成立的例子。比如，设 $X = \mathbb{R}$，$\mu(X) = \infty$，(2) 中的序列既不依测度收敛于 0，也不近一致收敛于 0，虽然它几乎处处收敛于 0。这表明定理3.31和 Egoroff 定理中，条件"$\mu(X) < \infty$"是必须的。 \\\\

思考题：在 Egorov 定理中，条件"$\mu(X) < \infty$"可以被"存在 $g \in L^1(\mu)$ 使得 $|f_n| \leqslant g$，$n \in \mathbb{N}$"代替。

思考题：设 $\mu(X) < \infty$。对 X 上的实可测函数 f 和 g 定义

$$d(f,g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu.$$

证明 d 定义了所有 X 上的实可测函数组成的空间 $\mathscr{L}$（模去几乎处处这个等价条件）上的一个度量，并且序列 f_n 依度量 d 收敛与 f 当且仅当 f_n 依测度 μ 收敛于 f。

思考题：设 $f, f_n \in L^1(\mu)$，$n \in \mathbb{N}$。假设

(1) f_n 几乎处处收敛于 f；

(2) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$。

证明 $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$，并举例说明若去掉条件 (2) 命题不成立。

第四章 Lebesgue 测度

4.1 Lebesgue 测度的构造

为了定义 $\mathbb{R}^n$ 上"自然"的与 Riemann 积分相容的 Lebesgue 积分，我们需要找到一种方法度量 $\mathbb{R}^n$ 中子集的大小。这个过程是定量的和仔细的。当然，可能存在不可被这种方式度量的子集。对于可以被度量的集合 A，我们赋予一个非负（广义）实数 $m(A)$，称作 A 的 Lebesgue 测度。在这里，我们固定 $n \in \mathbb{N}$ 为 Euclid 空间的维数。一个自然的要求是，对于 $\mathbb{R}^n$ 中几何体 A，我们引入的 Lebesgue 测度 $m(A)$ 与 A 的体积 $\mathrm{vol}\,(A)$ 相容。

整个构造过程是冗长的，我们将其分成若干步，贯穿于一下各节。需要注意的是，这个过程将充分体验所谓 Carathéodory 基于外测度的构造与扩张过程。我们将这一抽象理论放在附录中，作为参考。

4.1.1 Borel 集上的 Lebesgue 测度

第 0 步：$m(\varnothing) = 0$。

第 1 步：特殊矩体

定义 4.1. $\mathbb{R}^n$ 中的子集称作**特殊矩体**若它具有形式 $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$，$a_i \leqslant b_i$。我们称特殊矩体 I 为**退化的**若存在某 i 使得 $a_i = b_i$。

对于这种所有边均平行于坐标轴的特殊矩体 I，定义

$$m(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i). \tag{4.1}$$

命题 4.2. 设 $I \subset \mathbb{R}^n$ 为一特殊矩体，则下面的说法等价。

(1) $m(I) = 0$。

(2) $\mathring{I} = \varnothing$。

(3) I 包含于某维数小于 n 的 $\mathbb{R}^n$ 的仿射子空间中。

由此可以看出，对任意特殊矩体 I 为 $\mathring{I}$ 与其边（零测集）之无交并。

第 2 步：特殊多面体

定义 4.3. $\mathbb{R}^n$ 中的子集 P 称作**特殊多面体**若 $P=\bigcup_{k=1}^N I_k$，其中 $N\in\mathbb{N}$，每一 I_k 均为非退化特殊矩体，并且所有 P 的构成特殊矩体 I_k 的内部均两两不交。

若 $P=\bigcup_{k=1}^N I_k$，并且所有 P 的构成特殊矩体 I_k 的内部均两两不交，定义

$$m(P)=\sum_{k=1}^N m(I_k). \tag{4.2}$$

注 4.4. 上述定义的关键是考虑到 I_k 的边均落在某个 $\mathbb{R}^n$ 的低维仿射子空间中，从而对“测度”没有影响。另外，对于上述定义，有一个初等的但必须克服的困难：*对特殊多面体 P，$m(P)$ 与 P 的表示无关*。这个结论的证明是冗长的，参加 [18]。

命题 4.5. *特殊多面体定义的 m 满足一下性质*：

P1) 若 $P_1\subset P_2$，则 $m(P_1)\leqslant m(P_2)$。

P2) 若 $\mathring{P}_1\cap\mathring{P}_2=\varnothing$，则 $m(P_1)=m(P_2)$。

证明. 这个证明是初等的，但是很长。参见 [18]。 □

第 3 步：开集

对 $\mathbb{R}^n$ 中的非空开集 G，定义

$$m(G)=\sup\{m(P):P\subset G,\ P \text{ 为特殊多面体}\}. \tag{4.3}$$

注意，因为 G 非空，故必存在特殊多面体 $P\subset G$。

命题 4.6. *开集定义的 m 满足一下性质*：

O1) $0\leqslant m(G)\leqslant\infty$。

O2) $m(G)=0$ 当且仅当 $G=\varnothing$。

O3) $m(\mathbb{R}^n)=\infty$。

O4) 若 $G_1\subset G_2$，则 $m(G_1)\leqslant m(G_2)$。

O5) $m(\bigcup_{k=1}^\infty G_k)\leqslant\sum_{k=1}^\infty m(G_k)$。

O6) 若开集列 $\{G_k\}$ 两两不交，则 $m(\bigcup_{k=1}^\infty G_k)=\sum_{k=1}^\infty m(G_k)$。

O7) 若 P 为特殊多面体，则 $m(P)=m(\mathring{P}$。

4.2 Lebesgue 测度的不变性

4.3 关于 Lebesgue 测度的一些注记

4.3.1 不可测集

在这一小节，我们将借助选择公理证明 $\mathbb{R}^n$ 中存在 Lebesgue 不可测集。我先来看 Vitali 的一个简单的例子。

定理 4.7 (Vitali). *存在 $E \subset \mathbb{R}^n$，E 非 Lebesgue 可测集。*

证明. 不难验证，对 $x, x' \in \mathbb{R}^n$，有

$$x + \mathbb{Q}^n = x' + \mathbb{Q}^n \quad \text{或} \quad (x + \mathbb{Q}^n) \cap (x' + \mathbb{Q}^n) = \varnothing.$$

因此我们引入等价关系：$x + \mathbb{Q}^n \sim x' + \mathbb{Q}^n$ 当且仅当 $x + \mathbb{Q}^n = x' + \mathbb{Q}^n$，即 $x - x' \in \mathbb{Q}^n$。我们在商空间 $\mathbb{R}^n / \sim$ 中每个等价类（陪集 $\{x + \mathbb{Q}^n\}$）中选取一个代表元，得到集合 E。注意这里我们依赖于选择公理。若记 $\mathbb{Q}^n = \{r_k\}$，我们有

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x \in E} (x + \mathbb{Q}^n) = \bigcup_{r_k \in \mathbb{Q}^n} (r_k + E). \quad \text{（均为无交并）}$$

1) $m^*(E) > 0$。否则，$m(E) = 0$，且由 Lebesgue 测度的平移不变性，$m(r_k + E) = 0$。因此 $m(\mathbb{R}^n) = 0$。矛盾。

2) $m_*(E) = 0$。事实上，任给紧集 $K \subset E$，设 $D = B(0,1) \cap \mathbb{Q}^n$。则 $\bigcup_{r \in D} (r_k + K)$ 亦为无交并且有界，D 为无穷集。因此

$$\sum_{r \in D} m(K) = \sum_{r \in D} m(r + K) = m(\bigcup_{r \in D} (r_k + K)) < \infty.$$

因此 $m(K) = 0$。

综上，$0 = m_*(E) < m^*(E)$ 表明 E 非 Lebesgue 可测。 □

推论 4.8. *设 $A \subset \mathbb{R}^n$，A 可测且 $m(A) > 0$，则存在 $B \subset A$，B 不可测。*

证明. 设 E 定理4.7中的不可测集。注意到

$$A = \bigcup_{r_k \in \mathbb{Q}^n} (r_k + E) \cap A. \quad \text{（无交并）}$$

故必有某个 $B = (r_k + E) \cap A$ 满足 $m^*(B) > 0$。另一方面，

$$m_*(B) = m_*((r_k + E) \cap A) \leqslant m_*(r_k + E) = m_*(E) = 0.$$

故 B 非 Lebesgue 可测。 □

下面的 Banach-Tarski 悖论也给出了一个不可测集存在性的一个证明。

定理 4.9 (Banach-Tarski). *假设 $A, B \subset \mathbb{R}^3$ 为有界集，均具有非空的内部。则 A 和 B 存在有限的分解*

$$A = \bigcup_{k=1}^{N} A_k, \quad B = \bigcup_{k=1}^{N} B_k, \quad \text{（均为无交并）}$$

以及刚体运动 Φ_k（$1 \leqslant k \leqslant N$），使得对每一 k，$\Phi_k(A_k) = B_k$。

注 4.10. 在上述 Banach-Tarski 定理中，假设 A, B 均为 Lebesgue 可测集，并且 $m(A) \neq m(B)$，则上述分解中必有某 A_k 或 B_k 非 Lebesgue 可测集。否则与测度的可加性矛盾。当然，Banach-Tarski 定理的证明也依赖于选择公理。1970 年，Solovay 证明了（[20]）：*在 ZF 公理系统中（不包含选择公理）不能证明 $\mathbb{R}^1$ 中存在 Lebesgue 不可测集。*

4.3.2 Borel 集与 Lebesgue 可测集

4.3.3 Minkowski 和

设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$，$r \in \mathbb{R}$，定义

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad rA = \{ra : a \in A\}.$$

类似我们定义集合 $-A = (-1)A$，$A - B = A + (-1)B$。集合 $A + B$ 称作集合 A 和 B 的 **Minkowski 和**或**代数和**。

为了理解 Minkowski 和，我们先来看看下面的结果。

定理 4.11 (Steinhaus). *设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 可测，$m(A) > 0$，则 $A - A$ 包含了原点 0 的一个开邻域。*

证明. 由 Lebesgue 测度的逼近性质，存在紧集 $K \subset A$ 使得 $m(K) > 0$。选取 U 为开集，$K \subset U$，并且 $m(U) < 2m(K)$。由 K 的紧性，存在 $\varepsilon > 0$ 使得若 $|h| < \varepsilon$，则 $K + h \in U$。此时 $K \cup (K + h) \subset U$。故

$$m(K \cup (K + h)) \leqslant m(U) < 2m(K) \leqslant m(K) + m(K + h).$$

这意味着 $K \cap (K + h) \neq \varnothing$，即 $h \in K - K \subset A - A$。因此 $B(0, \varepsilon) \subset A - A$。 □

例 4.12. 注意到，在 Steinhaus 定理中，我们并没有断言 $A - A$ 为可测集！一般，对于可测集 $A, B \subset \mathbb{R}^n$，其 Minkowski 和是否一定可测呢？我们来看看下面的例子。

(1) 若 A, B 为开集，则 $A + B$ 为开集，从而可测。

(2) 若 A,B 为紧集，则 $A+B$ 为紧集，从而可测。

(3) 若 A,B 为闭集，则 $A+B$ 为 F_σ 集，从而可测。

(4) 若 A,B 为凸集，则 $A+B$ 为凸集，从而可测。

思考题：试解决下面关于 Minkowski 合集的一些问题:

1) 证明存在 $\mathbb{R}^1$ 中的闭集 A,B，$m(A)=m(B)=0$，但 $m(A+B)>0$。

2) 若 C 为 Cantor 三分集，$A=C$，$B=\frac{1}{2}C$，则 $A+B\supset[0,1]$。

3) 设 $I\subset\mathbb{R}^1$ 为有界闭区间，$A=I\times\{0\}$，$B=\{0\}\times I$，证明 $A+B=I\times I$。

一个相关的重要问题是如何刻画 $m(A)$, $m(B)$ 和 $m(A+B)$ 之间的关系。如果假设 $A,B,A+B$ 均可测, 上述思考题表明, 即便 $m(A)=m(B)=0$, 也可能有 $m(A+B)>0$。因此我们无望利用 $m(A)$ 和 $m(B)$ 来给出 $m(A+B)$ 的上界。但是相反的方向是可能的。

我们试图建立形如

$$m(A+B)^\alpha \geqslant c_\alpha(m(A)^\alpha+m(B)^\alpha),\quad \forall A,B\subset\mathbb{R}^n,$$

的一般不等式，这里 $C_\alpha>0$ 为常数。若设 A 为凸集，$B=\lambda A$ ($\lambda>0$)，此时 $A+B=A+\lambda A=(1+\lambda)A$ 则上式变成

$$(1+\lambda)^{n\alpha}\geqslant c_\alpha(1+\lambda^{n\alpha}),\quad \forall\lambda>0.$$

由我们熟知的不等式

$$(a+b)^\gamma\geqslant a^\gamma+b^\gamma,\quad a,b>0,\gamma\geqslant 1,$$

我们可以判断出 $n\alpha\geqslant 1$。因此，一个自然的猜想是

$$m(A+B)^{\frac{1}{n}}\geqslant m(A)^{\frac{1}{n}}+m(B)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.4}$$

定理 4.13 (Brunn-Minkowski 不等式 I)**.** *假设 $A,B\subset\mathbb{R}^n$，$A,B,A+B$ 均可测，则不等式(4.4)成立。*

证明（梗概）. 我们先假设 A,B 为特殊矩体，其边长分别为 $\{a_j\}$ 和 $\{b_j\}$。则 $A+B$ 亦为特殊矩体，其边长为 $\{a_j+b_j\}$。此时(4.4)变成

$$\left(\prod_{j=1}^n(a_j+b_j)\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant\left(\prod_{j=1}^n a_j\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{j=1}^n b_j\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{4.5}$$

注意到上式中的齐性：若将 a_j，b_j 分别用 $\lambda_j a_j$，$\lambda_j b_j$ 代替，则上式两边均乘以 $(r_1\cdot\cdots\cdot r_n)^{\frac{1}{n}}$。为此，我们只需取 $\lambda_j=(a_j+b_j)^{\frac{1}{n}}$，则(4.5)可归结为 $a_j+b_j=1$ 的情形，即

$$1\geqslant\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{a_j}{a_j+b_j}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{b_j}{a_j+b_j}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

利用算术-几何不等式平均不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{x_j}^{n}x_j\geqslant\left(\prod_{j=1}^{n}x_j\right)^{\frac{1}{n}},$$

取 x_j 分别为 $\frac{a_j}{a_j+b_j}$ 和 $\frac{b_j}{a_j+b_j}$，相加即证明了(4.5)。

我们接下来假设 A，B 为特殊多面体，我们固定其分划以及构成的特殊具体。不妨设构成 A 和 B 特殊矩体的个数总数为 k。由 Lebesgue 测度的平移不变性，不等式(4.4)在 A 和 B 的任意平移下不变。定义超平面 $\Pi_j=\{x=(x_1,\ldots,x_n):x_j=0\}$。我们通过垂直于 Π_j 的平移将 A 和 B 分别分离成两块，即

$$A^+=A\cap\{x_j\geqslant 0\},\quad A^-=A\cap\{x_j\leqslant 0\},$$
$$B^+=B\cap\{x_j\geqslant 0\},\quad B^-=B\cap\{x_j\geqslant 0\},$$

且

$$\frac{m(B^\pm)}{m(B)}=\frac{m(A^\pm)}{m(A)}.$$

事实上，我们可以先沿垂直于 Π_j 方向平移 A，使其构成特殊矩体的边落在 Π_j 上，再移动 B 并利用以下事实：B 沿垂直于 Π_j 的平移且被 Π_j 分离的 $B^\pm$ 的测度是连续变化的。另外，我们可以注意到 $A+B\supset(A^++B^+)\cup(A^-+B^-)$，并且右端的并是内部无交的。这是因为 A^++B^+ 与 A^-+B^- 被 Π_j 分离。而且 A^+ 与 B^+，或 A^- 与 B^- 的构成特殊矩体的总数小于 k。则可由归纳假设

$$\begin{aligned}
m(A+B)\geqslant& m(A^++B^+)+m(A^-+B^-)\\
\geqslant&\left(m(A^+)^{\frac{1}{n}}+m(B^+)^{\frac{1}{n}}\right)^n+\left(m(A^-)^{\frac{1}{n}}+m(B^-)^{\frac{1}{n}}\right)^n\\
=&m(A^+)\left(1+\left[\frac{m(B^+)}{m(A^+)}\right]^{\frac{1}{n}}\right)^n+m(A^-)\left(1+\left[\frac{m(B^-)}{m(A^-)}\right]^{\frac{1}{n}}\right)^n\\
=&(m(A^+)+m(A^-))\left(1+\left[\frac{m(B)}{m(A)}\right]^{\frac{1}{n}}\right)^n\\
=&m(A)\left(1+\left[\frac{m(B)}{m(A)}\right]^{\frac{1}{n}}\right)^n=m(A)^{\frac{1}{n}}+m(B)^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

这证明了当 A, B 为特殊多面体的情形不等式(4.4)成立。

若 A, B 为具有有限测度的开集，由 Lebesgue 测度的构造，任给 $\varepsilon > 0$ 存在特殊多面体 $A_\varepsilon \subset A$，$B_\varepsilon \subset B$，使得

$$m(A) < m(A_\varepsilon) + \varepsilon, \quad m(B) < m(B_\varepsilon) + \varepsilon.$$

由于 $A + B \supset A_\varepsilon + B_\varepsilon$，则对不等式

$$\begin{aligned} m(A+B)^{\frac{1}{n}} &\geqslant m(A_\varepsilon + B_\varepsilon)^{\frac{1}{n}} \geqslant m(A_\varepsilon)^{\frac{1}{n}} + m(B_\varepsilon)^{\frac{1}{n}} \\ &\geqslant (m(A) - \varepsilon)^{\frac{1}{n}} + (m(B) - \varepsilon)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 得到不等式(4.4)。

若 A, B 均为紧集，首先注意到 $A + B$ 亦为紧集。若定义

$$A^\varepsilon = \{x : d_A(x) < \varepsilon\},$$

则 A^ε 为测度有限的开集，且当 $\varepsilon \searrow 0$ 时 $A^\varepsilon \searrow A$。类似定义 B^ε 和 $(A+B)^\varepsilon$。又

$$A + B \subset A^\varepsilon + B^\varepsilon \subset (A+B)^{2\varepsilon}.$$

故对不等式

$$m((A+B)^{2\varepsilon})^{\frac{1}{n}} \geqslant m(A^\varepsilon + B^\varepsilon)^{\frac{1}{n}} \geqslant m(A^\varepsilon)^{\frac{1}{n}} + m(B^\varepsilon)^{\frac{1}{n}} \geqslant m(A)^{\frac{1}{n}} + m(B)^{\frac{1}{n}}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 得到不等式(4.4)。

一般情形，若 $A, B, A+B$ 均可测，类似用紧集从内部逼近 A 和 B 得到。 □

思考题： 证明定理4.13中，若不假设 $A, B, A+B$ 可测，则不等式当 m 换成 m_* 时成立。（提示：需要补齐上述定理的证明。）

4.3.4 Lebesgue 测度的正则性・Radon 测度・Riesz 表示定理

回忆前面我们讨论的 Lebesgue 测度的逼近性质，如果把 Lebesgue 看成限制在 Borel 集类上的 Borel 测度，我们可以抽象出一般测度的正则性概念。

定义 4.14. 设 μ 为 X 上的 Borel 测度，$E \subset X$ 为 Borel 集。测度 μ 称作**在 E 上外正则**若

$$\mu(E) = \inf\{\mu(G) : G \supset E, G \text{ 为开集}\}.$$

μ 称作**在 E 上内正则**若

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ 为紧集}\}.$$

若 μ 在任意 Borel 集上既为外正则也为内正则，则称 μ 为**正则**测度。

测度的正则性要求太高了，对非 σ-紧空间 X（即 X 可以表示成可数紧集之并），很难保证。

定理 4.15. *若 X 为局部紧 Hausdorff 空间且其任意开子集均为 σ-集，则 X 上的任意 Borel 测度 μ，若 μ 在任意紧集上有限，则 μ 为正则的。*

证明. 参见 [19, Theorem 2.18]，证明依赖于下面的 Riesz 表示定理。 □

为此我们引入以下概念：

定义 4.16. X 上的 Borel 测度称作 **Radon 测度**若 μ 在任意紧集上有限，对任意 Borel 集为外正则的，且对所有开集为内正则的。

回忆一下，若 $U \subset X$ 为开集，$f \in C_c(X)$，记号 $f \prec U$ 意味着 $0 \leqslant f \leqslant 1$ 且 $\text{supp}(f) \subset U$。

定理 4.17 (Riesz 表示定理)**.** *假设 X 为局部紧 Hausdorff 空间，$I : C_c(X) \to \mathbb{R}$ 为一正线性泛函，即若 $f \geqslant 0$ 则 $I(f) \geqslant 0$。则存在 X 上唯一的 Radon 测度 μ 使得*

$$I(f) = \int_X f \, d\mu, \quad \forall f \in C_c(X),$$

并且 μ 满足

$$\mu(U) = \sup \{I(f) : f \in C_c(X), f \prec U\}, \quad U \text{ 开},$$
$$\mu(K) = \inf \{I(f) : f \in C_c(X), f \geqslant \mathbf{1}_K\}, \quad K \text{ 紧}.$$

注 4.18. 事实上，上述 Riesz 表示定理蕴含了更强的结论。我们不仅得到了一个 Borel 测度 μ，而且得到一个 μ 的扩张 $\bar{\mu}$。对任意 $E \subset X$，定义

$$\mu^*(E) = \inf \{\mu(B) : B \in \mathscr{B}(X), B \supset E\}.$$

μ^* 为如(A.1)决定的外测度（命题A.2）。由定理A.12，若 μ 为 σ-有限的，则 $\bar{\mu}$ 为 μ 的完备化。

思考题

1. 证明 Lebesgue 测度作为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel 测度是正则的，从而是 Radon 测度。

2. 假设 X 为局部紧 Hausdorff 空间。证明 X 上的 Radon 测度 μ 在任意 σ-有限的 Borel 集上。从而 X 上的任意 σ-有限的 Radon 测度必为正则的。

3. 假设 X 为局部紧 Hausdorff 空间。μ 为 X 上 σ-有限的 Radon 测度，$E \subset X$ 为 Borel 集。

   (1) 任给 $\varepsilon > 0$，存在开集 U 和闭集 F，$F \subset E \subset U$ 且 $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$。

   (2) 存在 F_σ 集 A 和 G_δ 集 B，$A \subset E \subset B$ 且 $\mu(B \setminus A) = 0$。

4. 设 μ^* 为注4.18定义的外测度。证明若 $\{A_n\}$ 为一列单调递增的 X 中的子集列，则 $\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n) = \mu^*(\bigcup_n A_n)$。

4.4 可测函数的连续性

在这一节，我们假设 X 为局部紧 Hausdorff 空间且 μ 为 X 上的 Radon 测度。此时一个自然的问题是，Borel 可测函数与连续或半连续函数的关系。下面的 Luzin 定理和 Vitali-Carathéodory 定理分别刻画了这两种逼近性质。而且，这些结论对一般 σ-有限 Radon 测度空间 $(X, \mathscr{B}(X), \mu)$ 的完备化也是正确的。

定理 4.19 (Luzin). *假设 X 为局部紧 Hausdorff 空间且 μ 为 X 上的 Radon 测度，f 为 X 上实值 Borel 可测函数。$A \subset X$ 为 Borel 集，$\mu(A) < \infty$ 且 f 限制在 A^c 上恒为 0。则任给 $\varepsilon > 0$，存在 $g \in C_c(X)$，使得*

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon, \tag{4.6}$$

且 $\sup_{x\in X} |g(x)| \leqslant \sup_{x\in X} |f(x)|$。

证明. 我们首先假设 $0 \leqslant f < 1$，且 A 为紧集。注意到可测函数的构造定理，存在 Borel 可测的非负简单函数 s_n 单调递增逐点收敛于 f。令 $t_1 = s_1$，$t_k = s_k - s_{k-1}$（$k \geqslant 2$），则 $f = \sum_{k\geqslant 1} t_k$。事实上每一 $2^k t_k$ 均为某 Borel 可测集 $E_k \subset A$ 上的特征函数，即

$$f = \sum_{k\geqslant 1} 2^{-k} \mathbf{1}_{E_k}.$$

固定开集 V 使得 $\overline{V}$ 紧且 $A \subset V$。对每一 k，存在开集 V_k 和紧集 K_k 使得 $K_k \subset E_k \subset V_k \subset V$，且 $\mu(V_k \setminus K_k) < 2^{-k}\varepsilon$。由 Urysohn 引理，存在连续函数 h_k，$K_k \prec h_k \prec V_k$。定义

$$g = \sum_{k\geqslant 1} 2^{-k} h_k.$$

则 g 连续且 $\operatorname{supp}(g) \subset \overline{V}$，且 $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} \subset \bigcup_{k\geqslant 1}(V_k \setminus K_k)$。因此(4.6)成立。

很显然，我们证明了当 f 有界且 A 紧时(4.6)成立。如果去掉 A，由 μ 的正则性，存在紧集 $K \subset A$ 且 $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$。因此稍微修改上面的证明，去掉集合 $A \setminus K$，(4.6)成立。若 f 无界，定义 $B_k = \{x : |f(x)| > k\}$，则 $\bigcap_{k\geqslant 1} B_k = \varnothing$ 且 $\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$。对充分大的 k 考虑函数 $(1 - \mathbf{1}_{B_k}) \cdot f$，则得到了(4.6)一般情形的证明。

对于最后一个结论，若 $R = \sup_{x\in X} |f(x)| = \infty$，平凡。否则，我们借助函数

$$\Phi(z) = \begin{cases} z, & |z| \leqslant R, \\ R \cdot \frac{z}{|z|}, & |z| > R, \end{cases}$$

并定义 $g_1 = \Phi \circ g$。则函数 g_1 为满足(4.6)和最后的结论。 □

注 4.20. 关于上述 Luzin 定理，我们有以下说明：

1) 上述 Luzin 定理可以运用到 Radon 测度 μ 完备化的测度 $\bar{\mu}$ 上。假设 $(X, \mathfrak{M}^*, \bar{\mu})$ 为 Radon 测度空间 $(X, \mathscr{B}(X), \mu)$ 的完备化（见注4.18）。因为若 f 为 $\mathfrak{M}^*$-可测函数，则存在 Borel 可测函数 g 使得 $f = g$，$\bar{\mu}$-a.e.。

2) 特别，上述 Luzin 定理运用到 $X = \mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度空间，Lebesgue 可测函数 f 以及 Lebesgue 可测集 A，结论也是成立的。

3) 若去掉上述 Luzin 定理中集合 A 的限制，当 Radon 测度空间 $(X, \mathscr{B}(X), \mu)$ 为 σ-有限时，除去 g 具有紧支集这一性质，其他结论均成立。

定理 4.21 (Vitali-Carathéodory)**.** *假设 X 为局部紧 Hausdorff 空间且 μ 为 X 上的 Radon 测度，f 为 X 上实值 Borel 可测函数，且 $f \in L^1(X, \mathscr{B}(X), \mu)$。则任给 $\varepsilon > 0$，存在上半连续函数 v 和下半连续函数 u，使得 $v \leqslant f \leqslant u$，使得*

$$\int_X (u - v)\, d\mu < \varepsilon.$$

证明. 首先假设 $f \geqslant 0$。由定理4.19的证明，存在 Borel 可测集列 $\{E_k\}$ 和正数列 $\{\alpha_k\}$，使得

$$f = \sum_{k\geqslant 1} \alpha_k \mathbf{1}_{E_k}.$$

因为 $f \in L^1$，由单调收敛定理，$\int_X f\, d\mu = \sum_{k\geqslant 1} \alpha_k \mu(E_k) < \infty$。故存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k \mu(E_k) < \varepsilon/2. \tag{4.7}$$

由正则性，对任意 k，存在紧集 K_k 和开集 V_k，使得 $K_k \subset E_k \subset V_k$，并且

$$\alpha_k \mu(V_k \setminus V_k) < 2^{-(k+1)}\varepsilon. \tag{4.8}$$

定义

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{1}_{V_k}, \quad v = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{1}_{K_k}.$$

则 v 为上半连续函数，u 为且下半连续函数，且

$$u - v = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{1}_{V_k} - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{1}_{K_k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (\mathbf{1}_{V_k} - \mathbf{1}_{K_k}) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{1}_{E_k}.$$

因此

$$\int_X (u - v)\, d\mu \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu(V_k \setminus V_k) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \alpha_k \mu(E_k) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

一般，$f = f^+ - f^-$。存在上半连续函数 $v^\pm$ 和下半连续函数 $u^\pm$，$v^\pm \leqslant f^\pm \leqslant u^\pm$，且 $\int_X (u^\pm - v^\pm)\, d\mu < \varepsilon/2$。因为 $v = v^+ - u^- \leqslant f^+ - f^- \leqslant u^+ - v_- = u$，则 v 为上半连续函数，u 为且下半连续函数且 $\int_X (u - v)\, d\mu \leqslant \int_X (u^+ - v_-) - (v^+ - u^-)\, d\mu = \int_X (u^+ - v^+) + (u^- - v^-)\, d\mu < \varepsilon$。 □

注 4.22. 同注4.20，上述 Vitali-Carathéodory 定理对于 Lebesgue 测度空间亦成立（甚至更一般 σ-有限 Radon 测度空间 $(X, \mathscr{B}(X), \mu)$ 的完备化）。同时，我们还注意到，在 f 非负情形，$v = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{1}_{K_k}$ 是有界的，$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{1}_{V_k}$ 下有界，而且 $u, v \in L^1$。从而一般我们有 $u, v \in L^1$，u 下有界，v 上有界。

思考题

1. 在 Vitali-Carathéodory 定理中，如果 $v \leqslant f \leqslant u$，$u$ 为上半连续，v 为下半连续，定理是否成立？你可以考虑 $[0,1]$ 上的正测 Cantor 集 K 的特征函数 $\mathbf{1}_K$。

4.5 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的关系

为了在 Lebesgue 积分的框架下重新审视 Riemann 积分，我们先来回顾一下有界函数 $f : I \to \mathbb{R}$（$I \subset \mathbb{R}^n$ 为一特殊矩体）的 Riemann 积分的定义。我们很方便采用 Darboux 的刻画。

定义 4.23. 设 $I \subset \mathbb{R}^n$ 为（非退化）特殊矩体，若 $I = \bigcup_{j=1}^{N} I_j$，$I_j$ 均为非退化矩体且内部两两不交。则称 $\{I_j\}_{j=1}^{N}$ 为 I 的一个**分划**。若 $f : I \to \mathbb{R}$ 为一有界函数，f 称作**阶梯函数**若存在 I 的一个分划 $\{I_j\}_{j=1}^{N}$，使得 f 限制在每一 $\mathring{I}_j$ 上为常值。

注 4.24. 若有界函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 为一阶梯函数，很明显它是 Lebesgue 可测的，实际上除去一个零测集（所有 I_j 边界上的点均落在有限个低维仿射子空间中），它是一特殊的简单函数并且几乎处处连续。并且阶梯函数 f 的 Riemann 积分与 Lebesgue 积分相等。

定义 4.25. 有界函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 称作 **Riemann 可积**若任给 $\varepsilon > 0$，存在 I 上的阶梯函数 σ 和 τ，满足

$$\sigma \leqslant f \leqslant \tau, \quad \int_I (\tau - \sigma)\, dm < \varepsilon.$$

若 f 为 Riemann 可积，定义其 Riemann 积分

$$\begin{aligned}(R)\int_I f\, dm &= \sup\left\{\int_I \sigma\, dm : \sigma \text{ 为阶梯函数且 } \sigma \leqslant f\right\}\\ &= \inf\left\{\int_I \tau\, dm : \tau \text{ 为阶梯函数且 } \tau \geqslant f\right\}.\end{aligned}$$

定理 4.26. *设 f 为特殊矩体 I 上的有界函数。*

(1) *f 为 Riemann 可积当且仅当 f 几乎处处连续。*

(2) *若 f 为 Riemann 可积，则 f 为 Lebesgue 可积且*

$$(R)\int_I f\, dm = \int_I f\, dm.$$

证明. 首先假设 f 为 Riemann 可积。由定义，存在阶梯函数序列 $\{\sigma_k\}$ 和 $\{\tau_k\}$ 使得

$$\sigma_k \leqslant f \leqslant \tau_k, \quad \int_I (\tau_k - \sigma_k)\, dm < \frac{1}{k}.$$

由于阶梯函数几乎处处连续，则

$$\sigma_k \leqslant \underline{f} \leqslant \overline{f} \leqslant \tau_k, \quad a.e..$$

定义 $g = \sup_k \sigma_k$，$h = \inf_k \tau_k$。则 g, h 均 Lebesgue 可测，且

$$g \leqslant \underline{f} \leqslant \overline{f} \leqslant h, \quad a.e..$$

由于 $0 \leqslant h-g \leqslant \tau_k - \sigma_k$（$k \in \mathbb{N}$），则

$$\int_I (h-g)\, dm \leqslant \int_I (\tau_k - \sigma_k)\, dm < \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

故 $\int_I (h-g)\, dm = 0$，从而 $g = h$，a.e.。因此 $g = \underline{f} = \overline{f} = h$，a.e.。从而 f 几乎处处连续。这就证明了 (1) 的一半。

我们先来证明 (2)。因为 $f = g = h$，a.e.，故 f 为 Lebesgue 可测并且

$$(R)\int_I f\, dm \leqslant \int_I \tau_k\, dm < \int_I \sigma_k\, dm + \frac{1}{k} \leqslant \int_I f\, dm + \frac{1}{k}.$$

由 k 的任意性，则 $(R)\int_I f\, dm \leqslant \int_I f\, dm$。相反的不等号类似。

现在我们来证明 (1) 的另一半。假设 f 几乎处处连续。我们将 I 分划成 2^{nk} 个全等的特殊矩体，并定义 I 上的阶梯函数如下：若 J 为任意这样的小特殊矩体，定义 $\sigma_k|_J = \inf_J f$。因为 f 有界，不妨设 $\alpha \leqslant f \leqslant \beta$，则在 ∂J 上定义 $\sigma_k = \alpha$。不难看出，除去相关特殊矩体的边界上，$\sigma_k \leqslant \sigma_{k+1}$。因此

$$\sigma_k \leqslant \sigma_{k+1},\ a.e. \quad 且 \quad \sigma_k \leqslant f \quad (k \in \mathbb{N}).$$

下面我们证明

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k \geqslant \underline{f}, \quad a.e.. \tag{4.9}$$

事实上, 假设 x 非任意上述 σ_k 定义中涉及的小特殊矩体的边界点 (这样的点构成零测集)。若 $\underline{f}(x) > a$, 则存在 x 的某邻域上, $f > a$。故存在 $N \in \mathbb{N}$, 对 $k \geqslant N$, σ_k 定义中包含 x 的特殊矩体含于该邻域。因此对 $k \geqslant N$, $\sigma_k(x) > a$。由于 $\sigma_k(x)$ 单调递增，故 $\lim_{k\to\infty} \sigma_k \geqslant a$。这就证明了(4.9)。

类似，存在阶梯函数序列 $\{\tau_k\}$，使得

$$\tau_k \geqslant \tau_{k+1},\ a.e. \quad 且 \quad \tau_k \geqslant f \quad (k \in \mathbb{N}),$$

满足

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k \leqslant \overline{f}, \quad a.e.. \tag{4.10}$$

因为 f 几乎处处连续，$f = \underline{f} = \overline{f}$，a.e.。故由(4.9)和(4.10)，

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \lim_{k\to\infty} \tau_k = f, \quad a.e..$$

因为上述函数均有上界 β 和下界 α，由控制收敛定理，

$$\lim_{k\to\infty} \int_I \sigma_k\, dm = \lim_{k\to\infty} \int_I \tau_k\, dm = \int_I f\, dm.$$

这就证明了 $\lim_{k\to\infty} \int_I (\sigma_k - \tau_k)\, dm = 0$。这就证明了 f 为 Riemann 可积。 □

最后因为一些历史的趣味，我们来探讨一下所谓 Jordan 容量。

定义 4.27. 有界集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 称作 **Jordan 可测**若 $\mathbf{1}_A$ 为 Riemann 可积。由于历史的原因，此时我们称 $m(A)$ 为 A 的 **Jordan 容量**。

定理 4.28. *有界集 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为 Jordan 可测当且仅当 $m(\partial A) = 0$。*

证明. 假设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为有界集。由定理4.26，A 为 Jordan 可测当且仅当 $\mathbf{1}_A$ 几乎处处连续。我们容易看出

$$x \in \mathbb{R}^n \text{ 为 } \mathbf{1}_A \text{ 的连续点} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \overset{\circ}{A} \text{ 或 } x \in (A^c)^\circ.$$

因此 A 为 Jordan 可测当且仅当 $(\overset{\circ}{A} \cup (A^c)^\circ)^c$ 为零测集。由关系 $\partial A = (\overset{\circ}{A} \cup (A^c)^\circ)^c$，定理得证。 □

思考题

1. 证明 $[a, b]$ 上的单调函数是 Riemann 可积的。
2. 设 $K \subset [0, 1]$ 为正测 Cantor 集，证明 $\mathbf{1}_K$ 不是 Jordan 可测的，也不存在连续函数 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 使得 $f = \mathbf{1}_K$，a.e.。
3. 证明存在 $\mathbb{R}^1$ 上的 Jordan 可测集但非 Borel 可测。

4.6 $\mathbb{R}^n$ 上的 Fubini 定理

4.6.1 Fubini-Tonelli 定理

设 l, m 为正整数，$l + m = n$。$\mathbb{R}^n$ 可以表示成 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$，即任给 $z \in \mathbb{R}^n$，存在唯一的 $x \in \mathbb{R}^l$，$y \in \mathbb{R}^m$，使得 $z = (x, y)$。固定 $y \in \mathbb{R}^m$，$f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$，定义 $f_y : \mathbb{R}^l \to [-\infty, +\infty]$，

$$f_y(x) = f(x, y)$$

称作 f 的 **y-截面**。对 $A \subset \mathbb{R}^n$，我们定义 A 的 y-截面为

$$A_y = \{x \in \mathbb{R}^l : (x.y) \in A\}.$$

容易验证 $(\mathbf{1}_A)_y = \mathbf{1}_{A_y}$。

给的 $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ 及 $y \in \mathbb{R}^m$，定义

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}^l} f_y(x)\, dx.$$

这里我们用 dx 代替关于 $\mathbb{R}^l$ 上的 Lebesgue 测度 dm_l 是为了便于读者理解。此时有两种情况：

(I) $f_y \geqslant 0$，$0 \leqslant F(y) \leqslant +\infty$。

(II) $f_y \in L^1(\mathbb{R}^l)$，此时 $F(y)$ 存在且 $-\infty < F(y) < +\infty$。

据此我们希望得到重积分等于累次积分的结论

$$\int_{\mathbb{R}^m} F(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,dz.$$

综上，我们可以看出，上式右端成立我们需要 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 可测甚至可积，而右端又必须使得 f_y 可测，必须保证 $F(y)$ 对几乎所有的 y 有定义，并且 F 在 $\mathbb{R}^m$ 上 Lebesgue 可测甚至可积。

例 4.29. 设 $A \subset \mathbb{R}^1$ 为不可测集，$y_0 \in \mathbb{R}^1$，$E = A \times \{y_0\}$。则 $E \subset \mathbb{R}^1 \times \{y_0\}$ 从而为 $\mathbb{R}^2$ 中的 Lebesgue 可测集，但对 $y_0 \in \mathbb{R}^1$，E 的 y_0-截面 $E_{y_0} = A$ 不可测。运用到函数 $\mathbf{1}_E$，则其 y_0-截面 $(\mathbf{1}_E)_{y_0} = \mathbf{1}_{E_{y_0}}$ 不是 $\mathbb{R}^1$ 中的可测函数。这说明上面分析的条件“f_y 可测”并不能对所有的 y 有保证。从一个侧面，也说明下面的 Fubini-Tonelli 定理是一个深刻的定理。 \\\\

定理 4.30 (Fubini-Tonelli（非负情形）)**.** *设 $f \to [0, +\infty]$ 为 Lebesgue 可测。则对几乎所有的 $y \in \mathbb{R}^m$，函数 $f_y : \mathbb{R}^l \to [0, +\infty]$ 为 Lebesgue 可测，故*

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}^l} f_y(x)\,dx$$

存在。并且 F 在 $\mathbb{R}^m$ 上可测，

$$\int_{\mathbb{R}^m} F(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,dz.$$

证明. 证明的关键是我们必须对特征函数 $\mathbf{1}_A$ 证明。此时 A 为 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集，

$$\int_{\mathbb{R}^m} m(A_y)\,dm = m(A). \tag{4.11}$$

历史上(4.11)称作 Cavalieri 原理或祖暅原理。

我们先证明(4.11)。证明是冗长的，我们将之分解成如下步骤。

(1) 假设 J 为特殊矩体，$J = J' \times J''$。J' 和 J'' 分别为 $\mathbb{R}^l$ 和 $\mathbb{R}^m$ 中的特殊矩体。则任给 $y \in \mathbb{R}^m$，

$$J_y = \begin{cases} J' & \text{若 } y \in J'', \\ \varnothing & \text{若 } y \notin J'', \end{cases} \quad \text{且} \quad m(J_y) = \begin{cases} m(J') & \text{若 } y \in J'', \\ 0 & \text{若 } y \notin J''. \end{cases}$$

即 $m(J_y) = m(J')\mathbf{1}_{J''}(y)$。因此

$$\int_{\mathbb{R}^n} m(J_y)\,dy = m(J')m(J'') = m(J).$$

(2) 假设 $G \subset \mathbb{R}^n$ 为开集。则存在两两不交的特殊矩体（不必为闭）J_k，使得 $G = \bigcup_k J_k$。故任给 $y \in \mathbb{R}^m$，$G_y = \bigcup_k (J_k)_y$（仍为无交并）。故 $m(G_y) = \sum_k m((J_k)_y)$，再由单调收敛定理和 (1)

$$\int_{\mathbb{R}^m} m(G_y)\,dy = \sum_k \int_{\mathbb{R}^m} m((J_k)_y)\,dm = \sum_k m(J_k) = m(G).$$

(3) 假设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集。选取有界开集 $G \supset K$，则对开集 $G \setminus K$ 运用 (2) 并注意 $(G \setminus K)_y = G_y \setminus K_y$，有

$$\int_{\mathbb{R}^m} m(G_y \setminus K_y)\,dy = m(G \setminus K),$$
$$\int_{\mathbb{R}^m} m(G_y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^m} m(K_y)\,dy = m(G) - m(K)$$

在对 G 运用 (2) 并注意到 $m(G) < \infty$，则

$$\int_{\mathbb{R}^m} m(K_y)\,dy = m(K).$$

(4) 若 $\{K_j\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中单调递增的紧集序列，定义 $B = \bigcup_j K_j$。因为 $B_y = \bigcup_j (K_j)_y$，故 B_y 可测且 $m(K_j) = \lim_{j\to\infty} m((K_j)_y)$。由单调收敛定理，

$$\int_{\mathbb{R}^m} m(B_y)\,dy = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} m((K_j)_y)\,dy = \lim_{j\to\infty} m(K_j) = m(B).$$

(5) 若 $\{G_j\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中单调递减的有界开集序列，定义 $C = \bigcap_j G_j$。选取紧集 $K \supset G_1$，对 $K \setminus C$ 运用 (4) 并注意到 $K \setminus C = \bigcup_j (K \setminus G_j)$，

$$\int_{\mathbb{R}^m} m(K_y \setminus C_y)\,dy = m(K \setminus C),$$
$$\int_{\mathbb{R}^m} m(K_y)\,dy - \int_{\mathbb{R}^m} m(C_y)\,dy = m(K) - m(C).$$

再对 K 运用 (4)，故有

$$\int_{\mathbb{R}^m} m(C_y)\,dy = m(C).$$

(6) （关键一步）设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为有界可测集，则存在单调递增的紧集列 $\{K_j\}$ 和单调递减的有界开集列 $\{G_j\}$，使得

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset A \subset \cdots \subset G_2 \subset G_1,$$

且

$$\lim_{j\to\infty} m(K_j) = m(A) = \lim_{j\to\infty} m(G_j).$$

定义 $B=\bigcup_j K_j$ 和 $C=\bigcap_j G_j$，则 $B\subset A\subset C$ 且 $m(B)=m(A)=m(C)$。综合 (4) 和 (5)，

$$\int_{\mathbb{R}^m} m(B_y)\,dy=m(B),\quad \int_{\mathbb{R}^m} m(C_y)\,dy=m(C).$$

两式相减得到

$$\int_{\mathbb{R}^m}(m(C_y)-m(B_y))\,dy=0.$$

由于 $m(C_y)-m(B_y)\geqslant 0$，故对几乎所有的 y 有 $m(C_y)-m(B_y)=0$。对这样的 y，$B_y\subset A_y\subset C_y$，因此 A_y 为 B_y 与某零测集之并，从而可测，且 $m(A_y)=m(B_y)=m(C_y)$。所以，$m(A_y)$ 关于 y 为 Lebesgue 可测，且

$$\int_{\mathbb{R}^m} m(A_y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^m} m(B_y)\,dy=m(B)=m(A).$$

（这里特别提醒 A_y 不必对所有的 y 均可测，请参考例*4.29*。）

(7) 我们断言：*若定理对 $\mathbb{R}^n$ 上单调递增的非负可测函数 $\{f_j\}$ 均成立，则对 $f=\lim_{j\to\infty}f_j$ 成立。*

事实上，因为 $(f_j)_y$ 单调递增收敛于 f_y，故 f_y 对几乎所有的 y 均可测。故对几乎所有的 $y\in\mathbb{R}^m$，由单调收敛定理，

$$F(y)=\int_{\mathbb{R}^l} f_y(x)\,dx=\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^l}(f_j)_y(x)\,dx=\lim_{j\to\infty}F_j(y),$$

其中 $F_j(y)=\int_{\mathbb{R}^l}(f_j)_y(x)\,dx$。注意上述极限亦为单调递增取得，又 F_j 均可测，故 F 可测。再次运用单调收敛定理

$$\int_{\mathbb{R}^m}F(y)\,dy=\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m}F_j(y)\,dy=\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_j(z)\,dz=\int_{\mathbb{R}^n}f(z)\,dz.$$

(8) 我们去掉 (6) 中 A 有界的假设。事实上，我们只需令 $f_j=\mathbf{1}_{A\cap B(0,j)}$，再运用 (6) 和 (7) 即可。

(9) 一般情形，$f:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty]$ 可测。由 (8)，定理对任意非负可测简单函数成立。存在单调递增的非负简单函数序列 $\{s_j\}$ 逐点收敛于 f，定理对每一 s_j 均成立。在利用 (7) 即可。 □

定理 4.31 (Fubini-Tonelli（可积情形）)**.** *设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$。则对几乎所有的 $y\in\mathbb{R}^m$，函数 $f_y\in L^1(\mathbb{R}^l)$，故*

$$F(y)=\int_{\mathbb{R}^l}f_y(x)\,dx$$

有定义，并且

$$\int_{\mathbb{R}^m}F(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}f(z)\,dz.$$

证明. 对 $f=f^+-f^-$，运用定理4.30。则对几乎所有的 $y\in\mathbb{R}^m$，$(f^\pm)_y$ 均可测。定义

$$G(y)=\int_{\mathbb{R}^l}(f^-)_y\,dx,\quad H(y)=\int_{\mathbb{R}^l}(f^+)_y\,dx.$$

则有

$$\int_{\mathbb{R}^m}G(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}f^-(z)\,dz,\quad \int_{\mathbb{R}^m}H(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}f^+(z)\,dz.$$

上述积分均有限，故 $G(y),H(y)<+\infty$ 对几乎所有的 $y\in\mathbb{R}^m$。对这样的 y，

$$\int_{\mathbb{R}^l}(f^-)_y\,dx<+\infty,\quad \int_{\mathbb{R}^l}(f^+)_y\,dx<+\infty.$$

这表明 $f_y\in L^1(\mathbb{R}^l)$。并且对这样的 y，因为 $F(y)=H(y)-G(y)$，故 $F\in L^1(\mathbb{R}^m)$ 且

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m}F(y)\,dy&=\int_{\mathbb{R}^m}H(y)\,dy-\int_{\mathbb{R}^m}G(y)\,dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f^+(z)\,dz-\int_{\mathbb{R}^n}f^-(z)\,dz=\int_{\mathbb{R}^n}f(z)\,dz.\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

注 4.32. 若将 $f(z)dz$ 写成 $f(x,y)dxdy$，则 Fubini 定理表明累次积分和重积分在一定条件下（比如 $f\geqslant 0$ 可测或 $f\in L^1$）相等：

$$\int_{\mathbb{R}^m}dy\int_{\mathbb{R}^l}f(x,y)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\,dxdy. \tag{4.12}$$

当然此时两个累次积分相等。在实际应用中，定理4.31的条件一般并不好直接验证。但是，我们可以这样使用这两个 Fubini 定理。如果我们能够验证

$$\int_{\mathbb{R}^m}dy\int_{\mathbb{R}^l}|f(x,y)|\,dx<\infty,$$

根据定理4.30，$f\in L^1(\mathbb{R}^m)$，因此我们就可以利用定理4.31来保证(4.12)。另外我们还需要注意到，上面的讨论中，我们还需要验证 $f(x,y)$ 整体是可测的。关于这一点，一个最常见的条件是所谓的 Carathéodory 条件（参见思考题）。

4.6.2 Fubini 定理的应用

Fubini 定理（以及相关测度空间的乘积问题）是测度论中十分基本的课题。它的应用是十分基本而广泛的。我们下面给出一些例子。我们先从几个测度论方面基本的应用开始。

例 4.33. 设 E_1, E_2 分别为 $\mathbb{R}^l$ 和 $\mathbb{R}^m$ 中的 *Lebesgue* 可测集，则 $E_1 \times E_2$ 为 $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$ 中的 *Lebesgue* 可测集，且有 $m(E_1 \times E_2) = m(E_1)m(E_2)$。

证明. 首先证明 $E_1 \times E_2$ 为 $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$ 中的可测集。由 Lebesgue 测度的构造，存在 A 和 B 为紧集或零测集，使得 $E_1 \times E_2$ 为至多可数这样的 $A \times B$ 之并。

1) 若 A 为零测集。任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\mathbb{R}^l$ 中的特殊矩体 $\{I_k\}$ 及 $\mathbb{R}^m$ 中的特殊矩体 $\{J_i\}$，使得

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supset A, \quad \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) < \varepsilon,$$
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \supset B, \quad \sum_{i=1}^{\infty} m(J_i) < \infty.$$

显然 $E_1 \times E_2$ 被 $\{I_k \times J_i\}$ 所覆盖，故

$$m^*(A \times B) \leqslant m\left(\bigcup_{k,i} I_k \times J_i\right) \leqslant \sum_{k,i} m(I_k \times J_i) \leqslant \varepsilon \cdot \sum_{i} m(J_i).$$

由 ε 的任意性，$A \times B$ 为 $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$ 中的零测集。

2) 若 A, B 均为紧集，则 $A \times B$ 为紧集。

综上，$E_1 \times E_2$ 为 $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$ 中的可测集。并且，注意到 $\mathbf{1}_{E_1 \times E_2}(x, y) = \mathbf{1}_{E_1}(x) \cdot \mathbf{1}_{E_2}(y)$，则由 Fubini 定理

$$\begin{aligned} m(E_1 \times E_2) &= \int_{\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m} \mathbf{1}_{E_1 \times E_2}(x, y)\, dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^l} \mathbf{1}_{E_1}(x)\, dx \cdot \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{1}_{E_2}(y)\, dy = m(E_1)m(E_2). \end{aligned}$$

这就完成的证明。 □

例 4.34. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测，$f : E \to [0, +\infty)$ 可测。则 f 在 E 上的函数图像

$$G_E(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in E, y = f(x)\}$$

为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的零测集。

证明. 不妨设 $m(E) < \infty$。任给 $\delta > 0$，定义集合

$$E_k = \{x : k\delta \leqslant f(x) < (k+1)\delta\}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

则 $G_E(f) = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_{E_k}(f)$。故

$$m^*(G_E(f)) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} m^*(G_{E_k}(f)) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \delta \cdot m(E_k) = \delta m(E).$$

由 δ 的任意性，$m^*(G_E(f)) = 0$。

一般情形，我们考虑 $A_j = E \cap B(0,j)$，再令 $j \to \infty$ 得到。 □

定义 4.35. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为 σ-有限的测度空间，$f : X \to [0, +\infty]$ 可测。函数

$$t \mapsto \mu\{f > t\} = \mu(\{x \in X : f(x) > t\}), \quad t \in [0, +\infty)$$

称作 f **（关于测度 μ 的）分布函数**。分布函数单调递减，从而 Borel 可测。

例 4.36. 设 m 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度，$f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ 可测，$m\{f > t\}$ 为 m 和 f 决定的分布函数。$\phi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ 单调，在 $(0, +\infty)$ 上连续可微，$\phi(0) = 0$ 且 $\lim_{t\to+\infty} = \phi(+\infty)$。则

$$\int_X (\phi \circ f)\, dm = \int_0^{+\infty} m\{f > t\}\phi'(t)\, dt. \tag{4.13}$$

证明. 设 $E = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) : f(x) > t\}$。集合 E 的可测性由思考题可知。任给 t，$E_t = \{x \in X : f(x) > t\}$ 可测。则 f 关于 m 的分布函数

$$m(E_t) = \int_X \mathbf{1}_E(x,t)\, dm(x)$$

两边乘以 $\phi'(t)$ 然后积分，并由 Fubini 定理，

$$\int_0^\infty m(E_t)\phi'(t)\, dt = \int_X dm(x) \int_0^\infty \mathbf{1}_E(x,t)\phi'(t)\, dt.$$

注意 $\mathbf{1}_E(x,t) = \mathbf{1}_{\{t:0\leqslant t<f(x)\}}(t)$ 和条件 $\phi(0) = 0$，因此

$$\int_0^\infty m(E_t)\phi'(t)\, dt = \int_X dm(x) \int_0^{f(x)} \phi'(t)\, dt = \int_X (\phi \circ f)(x)\, dm(x).$$

这就完成了证明。 □

注 4.37. 公式(4.13)在概率论中是基本的。

1) 实际上，这个公式对于 σ-有限的测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$，并且 ϕ 在任意区间 $[0, T]$，$T > 0$，上绝对连续时，也是成立的。

2) 取 $\phi(t) = t^p$，$t > 0$，$p \geqslant 1$。则 $\phi'(t) = pt^{p-1}$，从而公式(4.13)变成

$$\int_X f^p\, d\mu = p \int_0^{+\infty} \mu\{f > t\} t^{p-1}\, dt.$$

这建立了分布函数与数学期望之间的联系。

另一个重要的应用是卷积。

定义 4.38. 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$，定义函数

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

我们称 $f * g$ 为 f 和 g 的卷积。

定理 4.39. 设 $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$。则对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,dy < \infty.$$

对这样的 x，$(f * g)(x)$ 有限（卷积的定义是有意义的）。$f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$，且

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{4.14}$$

证明. 不失一般性，我们假设 f, g 均为 Borel 可测。事实上，存在 Borel 可测函数 f_0 和 g_0，使得 $f = f_0$，$g = g_0$，a.e.。而卷积定义中的积分，对任意固定的 x，用 f_0, g_0 代替 f, g 代替不会改变。

定义 $F(x,y) = f(x-y)g(y)$，则 F 为 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的 Borel 可测函数。事实上，定义函数 $\phi(x,y) = x - y$，$\psi(x,y) = y$，则 $\phi, \psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$。则 $f(x-y) = (f \circ \phi)(x,y)$，$g(y) = (g \circ \psi)(x,y)$。$f \circ \phi$ 和 $g \circ \psi$Borel 可测，故乘积亦 Borel 可测。

对非负可测函数 $|F|$ 运用 Fubini 定理，并由 Lebesgue 测度的平移不变性，则

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |F(x,y)|\,dxdy = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dx = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

这说明 $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$，并且 $f * g$ 几乎处处有限。再次运用 Fubini 定理，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)|\,dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dx = \|f\|_1 \|g\|_1.\end{aligned}$$

这就证明了(4.14)。 □

注 4.40. 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中，卷积实际上定义了一个乘法。Young 不等式(4.14)保证了赋予了卷积为乘法后，$L^1(\mathbb{R}^n)$ 构成一个交换实 Banach 代数。在下一章，我们首先将说明 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 为完备的赋范线性空间，即 Banach 空间。一个 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 称作 **Banach 代数**如果赋予了乘法 $*$，并且满足

(1) 满足 Young 不等式：任给 $x, y \in X$，$\|x * y\| \leqslant \|x\|\|y\|$。

(2) 乘法 $*$ 满足结合律、分配律和数乘的关系：对任给 $x,y,z\in X$，$\alpha\in\mathbb{R}$，

$$x*(y*z)=(x*y)*z,$$
$$x*(y+z)=x*y+x*z,\quad (y+z)*x=y*x+z*x,$$
$$(\alpha x)*y=x*(\alpha y)=\alpha(x*y).$$

如果考虑复值的 $L^1(\mathbb{R}^n)$，Fourier 变换建立了复 Banach 代数 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 到复 Banach 代数 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 的代数同构。Banach 代数 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 不存在乘法单位元。也就是说，不存在 $e\in L^1(\mathbb{R}^n)$，使得 $e*f=f*e=f$ 对任意 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$。如果将 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 加入乘法单位元，该单位元恰为原点处的 Dirac 测度 μ_0。

Fubini 定理的另一大类应用是实际的计算。

例 4.41. 计算

$$\int_E y\sin(x)e^{-xy}\,dxdy,$$

其中 $E=\{(x,y):0<x<\infty,0<y<1\}$。

由于 $f(x,y)=y\sin(x)e^{-xy}$ 连续，故 Borel 可测。我们试着先做一个累次积分

$$F(y)=\int_0^\infty y\sin(x)e^{-xy}\,dx=\frac{y}{y^2+1}.$$

故我们有

$$\int_0^1 F(y)\,dy=\frac{1}{2}\log 2.$$

从而计算得到上面的积分。

为了严格，我们必须验证 f 可积。因为 $|f(x,y)|\leqslant ye^{-xy}$，故

$$\int_E |f(x,y)|\,dxdy\leqslant\int_E ye^{-xy}\,dxdy=\int_0^1 dy\int_0^\infty ye^{-xy}\,dx=1.$$

若我们计算另一个累次积分，

$$\int_0^1 y\sin(x)e^{-xy}\,dy=\frac{\sin(x)}{x}\cdot\left(\frac{1-e^{-x}}{x}-e^{-x}\right).$$

于是我们有看似很复杂的等式

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\cdot\left(\frac{1-e^{-x}}{x}-e^{-x}\right)\,dx=\frac{1}{2}\log 2.$$

反过来这个过程是不容易猜出 $f(x,y)$ 的形式的。 \\\\

思考题

1. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测，$f : E \to [0, +\infty)$。定义

$$H_E(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

证明 f 为 Lebesgue 可测当且仅当 $H_E(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 可测。此时 $m(H_E(f)) = \int_E f\, dm$。

2. 假设 $f : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$，$E \subset \mathbb{R}^l$ 为一稠密子集。若 $f(x, \cdot)$ 对所有 $x \in E$ 在 $\mathbb{R}^m$ 上 Lebesgue 可测，$f(\cdot, y)$ 对几乎所有的 $y \in \mathbb{R}^m$ 连续，则 f 在 $\mathbb{R}^{l+m}$ 上 Lebesgue 可测。

3. 利用 $f(x, y) = xe^{-x^2(1+y^2)}$ 计算

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4. 利用 $f(x, y) = \sin(x)e^{-xy}$，计算

$$\int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \cos(a) \int_0^\infty \frac{e^{-ay}}{1 + y^2}\, dy - \sin(a) \int_0^\infty \frac{ye^{-ay}}{1 + y^2}\, dy.$$

5. 利用上一题计算

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

6. 证明 $\frac{\sin(x)}{x}$ 非 $(0, \infty)$ 上的可积函数。

4.7 习题

1 (测度的支集)**.** 设 μ 为局部紧 Hausdorff 空间 X 上的 Radon 测度，集合

$$\operatorname{supp}(\mu) = \{x \in X : \text{任给开集 } U,\ x \in U,\ \text{有 } \mu(U) > 0\}$$

称作 μ **的支集**。

(1) 证明 $\operatorname{supp}(\mu)^c$ 恰为 X 中最大的 μ-零测开集，即 $\operatorname{supp}(\mu)^c$ 为 X 中所有零测开集之并。(为什么仍为零测集?)

(2) 证明 $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ 当且仅当对所有 $f \in C_c(X, [0, 1])$，$f(x) > 0$，有 $\int_X f\, d\mu > 0$。

(3) 设 $0 < \lambda < \infty$，且 $\mu(X) = \lambda$，则对 $\operatorname{supp}(\mu)$ 的任意紧的真子集 K，$\mu(K) < \lambda$。

(4) 对 $\mathbb{R}^n$ 上任意紧子集，构造概率测度 μ 使得 $\operatorname{supp}(\mu) = K$。

(5) 设 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 非负，m 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度，$\mu(E) = \int_E f\, dm$ 定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的有限 Borel 测度。证明 $\operatorname{supp}(f) = \operatorname{supp}(\mu)$。

第五章　L^p 空间

对任意测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$，$p > 0$，我们将初步研究一类函数空间，称作 L^p-空间。这是一类基本的工作函数空间，在分析学中扮演着重要的角色。如果研究更多的性质，后面我们将把我们的注意力集中在正则的测度空间上，比如 Lebesgue 测度空间。

定义 5.1. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为一测度空间，$p > 0$。对任意 X 上的可测函数 f，我们引入

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

所有满足 $\|f\|_p < \infty$ 的 f 组成的函数空间记作 $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$，简记作 $L^p(X)$ 或 $L^p(\mu)$。这类函数空间我们一般称作 L^p **空间**。特别，如果集合 X 上考虑计数测度，此时的 L^p 空间记作 $\ell^p(X)$，称作 ℓ^p **空间**。

我们将更多关心当 $p \geqslant 1$ 时的 L^p 空间。我们将看到，此时 $\|\cdot\|_p$ 给出了 $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上的一个范数。本章的主要目标是验证赋予该范数，$(L^p(X, \mathfrak{M}, \mu), \|\cdot\|_p)$，$p \geqslant 1$ 为一 Banach 空间。因此，这一章也可以看做泛函分析的一个很好的研究对象。

与之对应的，当 $0 < p < 1$ 时，$L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$（作为一拓扑线性空间）是不可以赋范的。

5.1　凸不等式

当 $p \geqslant 1$ 时的 L^p 空间理论的一个重要特征是与凸性相关的。为建立相关理论，我们需要一些重要的凸不等式。

我们回忆一些基本的凸性相关的概念。

定义 5.2. 集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ 称作**凸集**若任给 $x, y \in C$，$\lambda \in [0,1]$，$\lambda x + (1-\lambda) y \in C$。假设 $C \subset \mathbb{R}^n$ 为凸集，函数 $f : C \to \mathbb{R}$ 称作**凸函数**若任给 $x, y \in C$，$\lambda \in [0,1]$，

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \tag{5.1}$$

若上面的不等式取得严格不等号，则称 f 为**严格凸**。类似 $f : C \to \mathbb{R}$ 称作**凹函数**若 $-f$ 为凸函数。

定理 5.3 (Jensen 不等式)**.** 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为一概率测度空间，$f \in L^1(\mu)$。假设 f 的值域包含于 (a, b)，$\phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ 为凸函数。则

$$\phi\left(\int_X f\, d\mu\right) \leqslant \int_X (\phi \circ f)\, d\mu.$$

注 5.4. 不排除 $a = -\infty$ 和 $b = +\infty$ 的情况。并且 $\phi \circ f$ 有可能不属于 $L^1(\mu)$，但此时 $\phi \circ f$ 的积分为 $+\infty$。

证明. 令 $t = \int_X f\, d\mu$，则 $a < t < b$。由 ϕ 的凸性，则

$$\frac{\phi(t) - \phi(s)}{t - s} \leqslant \beta \leqslant \frac{\phi(r) - \phi(t)}{r - t}, \quad a < s < t < r < b,$$

其中 $\beta = \sup_{s<t} \frac{\phi(t)-\phi(s)}{t-s}$。上面两个不等式综合起来得到，

$$\phi(s) \geqslant \phi(t) + \beta(s - t), \quad a < s < b.$$

将 $s = f(x)$ 带入上式并积分得

$$\begin{aligned}\int_X \phi(f(x))\, d\mu(x) \geqslant & \int_X \phi(t)\, d\mu(x) + \beta \int_X (f(x) - t)\, d\mu(x) \\ &= \phi(t) + \beta\left(\int_X f(x)\, d\mu(x) - t\right) \\ &= \phi\left(\int_X f(x)\, d\mu(x)\right).\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

由 Jensen 不等式可以推导出许多大家熟悉的不等式。这里设 $\mathbf{N} = \{1, \ldots, n\}$。

(1) 在可测空间 $(\mathbf{N}, \mathscr{P}(\mathbf{N}))$ 上引入概率测度 μ，使得 $\mu(\{i\}) = \lambda_i > 0$ 且 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$。设 $f : \mathbf{N} \to \mathbb{R}$，则 f 可测，且 f 由 $f(i) = x_i \in \mathbb{R}$，$i \in \mathbf{N}$ 决定。则 $\int_{\mathbf{N}} f\, d\mu = \sum_{i\in\mathbf{N}} \lambda_i x_i$，而 $\int_X \phi \circ f\, d\mu = \sum_{i\in\mathbf{N}} \lambda_i \phi(x_i)$。此时 Jensen 不等式变成：任给 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$，$\lambda_i \geqslant 0$（$i \in \mathbf{N}$）且 $\sum_{i\in\mathbf{N}} \lambda_i = 1$，

$$\phi(\sum_{i\in\mathbf{N}} \lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i\in\mathbf{N}} \lambda_i \phi(x_i).$$

(2) 考虑 $\phi(t) = e^t$。则上式变成

$$e^{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n} \leqslant \lambda_1 e^{x_1} + \cdots + \lambda_n e^{x_n}.$$

若令 $y_i = e^{x_i}$，则 $y_i > 0$ 且

$$y_1^{\lambda_1} \cdot \cdots \cdot y_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n. \tag{5.2}$$

特别，取 $\lambda_i = \frac{1}{n}$，则得到算术-几何平均不等式

$$(y_1 \cdot \cdots \cdot y_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_n).$$

(3) 在(5.2)中取 $n = 2$，$\lambda_1 = \frac{1}{p}$，$\lambda_2 = \frac{1}{q}$，$a = y_1^{\frac{1}{p}}$，$b = y_2^{\frac{1}{q}}$。则(5.2)变成：任给 $a, b \geqslant 0$，$p, q > 1$ 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \tag{5.3}$$

不等式(5.3)称作 **Young 不等式**。它是我们推到 Hölder 不等式的关键。

一个与(5.3)相关的问题是凸函数的所谓 Fenchel-Legendre 对偶。

定义 5.5. 函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 称作**超线性**的若当 $|x| \to +\infty$ 时 $f(x)/|x| \to +\infty$。假设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为超线性的凸函数，定义 $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{y \cdot x - f(x)\}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

函数 f^* 称作函数 f **在凸分析意义下的对偶**或 **Fenchel-Legendre 对偶**。

注 5.6. 注意到我们在定义中加上了 f 为超线性的的限制，这是因为此时 f^* 处处有限。首先我们知道*若 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是超线性的连续函数，则对任意 $M \in \mathbb{R}$，下水平集 $\Lambda_M = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leqslant M\}$ 若非空则为有界集，从而为紧集*。事实上，我们不妨对 $M > 0$ 证明。由超线性，则任给 $M > 0$，存在 $R > 0$，使得若 $|x| > R$ 则 $g(x)/|x| > M$。换句话说，$g(x)/|x| \leqslant M \Longrightarrow |x| \leqslant R$。任给 $x \in \Lambda_M$，若 $|x| > 1$，则 $g(x) \leqslant M \Longrightarrow g(x)/|x| \leqslant M/|x| < M$，因此 $|x| \leqslant R$。这说明，对 $R_1 = \max\{1, R\}$，$\Lambda_M \subset \overline{B(0, R_1)}$。这儿"对任意 M，Λ_M 有界"一般称作**强制性**条件。超线性条件蕴含了强制性条件。

因此若 f 为超线性的凸函数，则任给 $y \in \mathbb{R}^n$，$f^*(y)$ 定义右端的 sup 可以取到。这是因为：*若 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为下半连续且满足强制性条件，则存在 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $g(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} g(y)$*。事实上，设 $M = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} g(y)$，则 $M < +\infty$，且 $\inf_{y \in \mathbb{R}^n} g(y) = \inf_{y \in \Lambda_{M+1}} g(y)$。又 Λ_{M+1} 为紧集，故存在 $x \in \Lambda_{M+1}$，使得 $g(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} g(y)$。

若 f 进而连续可微，此时最大值在满足 $y = f'(x)$（历史上称作 **Legendre 变换**）的点 x 处取得。若 f 为 C^2 函数，严格凸性保证了 $f'' > 0$，因此由隐函数定理，f' 为一 C^1-微分同胚。从而上述最大值点是唯一的。

由定义，我们立刻有如下 **Fenchel-Young 不等式**

$$f(x)+f^*(y)\geqslant y\cdot x.$$

例 5.7. 假设 $p,q>1$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。定义函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为 $f(x)=\frac{1}{p}|x|^p$。f 为超线性的凸函数并且连续可微。由注5.6，下面我们来计算 f^*。为找到定义中的极大点，我们对 $y\geqslant 0$ 解方程 $y=f'(x)$，则 $y=x^{p-1}$（此时 $x\geqslant 0$）。解得 $x=y^{\frac{1}{p-1}}$。因此

$$f^*(y)=y\cdot y^{\frac{1}{p-1}}-\frac{1}{p}\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)^p=\left(1-\frac{1}{p}\right)y^{\frac{p}{p-1}}=\frac{1}{q}y^q.$$

这也证明了 Young 不等式(5.3)。特别，我们还可以看出，Young 不等式(5.3)等号成立的条件恰为 $y=f'(x)$，即 $y=x^{p-1}$。

思考题：证明函数 $f(x)=x\log(x)-x$，$x>0$ 是凸函数。若定义

$$g(y)=\sup_{x>0}\{xy-f(x)\},\quad y>0.$$

则 $g(y)=e^y$。由此证明不等式

$$x\log(x)-x+1\geqslant 0,\quad x>0.$$

定义 5.8. 设 $p>1$，$q>0$ 由 $p^{-1}+q^{-1}=1$ 决定，则 q 称作 p 的**共轭指数**。事实上，$q>1$。当 $p=1$ 时，我们约定 p 的共轭指数为 $q=\infty$。

定理 5.9 (Hölder 不等式)**.** 设 $p>1$，q 为 p 的共轭指数，f,g 为测度空间 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 上的非负可测函数。则

$$\int_X fg\,d\mu\leqslant\left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

证明. 假设 $A=\left(\int_X f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$，$B=\left(\int_X g^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$。若 $A=0$，则 $f=0$，a.e.，故 $fg=0$，a.e.，平凡。若 $A>0$ 但 $B=\infty$，不等式右端为 ∞，仍然平凡。因此我们假设 $A,B\in(0,\infty)$。此时，定义

$$F=\frac{f}{A},\quad G=\frac{g}{B}.$$

由 Young 不等式，则 $FG\leqslant\frac{1}{p}F^p+\frac{1}{q}G^q$，两边积分得到

$$\begin{aligned}\int_X FG\,d\mu&\leqslant\frac{1}{p}\int_X F^p\,d\mu+\frac{1}{q}\int_X G^q\,d\mu=\frac{1}{p}\int_X\frac{f^p}{A^p}\,d\mu+\frac{1}{q}\int_X\frac{g^q}{B^q}\,d\mu\\&=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.\end{aligned}$$

这就表明了 $\int_X fg\,d\mu\leqslant AB$。 □

定理 5.10 (Minkowski 不等式)**.** 设 $p>1$。f,g 为测度空间 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 上的非负可测函数。则

$$\left\{\int_X (f+g)^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{\int_X f^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_X g^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{p}}$$

证明. 假设 q 为 p 的共轭指数。对等式

$$(f+g)^p = f\cdot(f+g)^{p-1} + g\cdot(f+g)^{p-1}$$

两边积分并运用 Hölder 不等式，得到

$$\begin{aligned}
&\int_X (f+g)^p\,d\mu\\
\leqslant &\int_X f\cdot(f+g)^{p-1}\,d\mu + \int_X g\cdot(f+g)^{p-1}\,d\mu\\
\leqslant &\left(\left\{\int_X f^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_X g^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{p}}\right)\cdot\left\{\int_X (f+g)^{q(p-1)}\,d\mu\right\}^{\frac{1}{q}} \qquad (5.4)\\
= &\left(\left\{\int_X f^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_X g^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{p}}\right)\cdot\left\{\int_X (f+g)^{p}\,d\mu\right\}^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

若 $\int_X (f+g)^p\,d\mu = 0$，则不等式平凡。若 $\int_X (f+g)^p\,d\mu = \infty$，由不等式

$$2^{-p}(f+g)^p \leqslant \frac{1}{2}(f^p+g^p)$$

则 $\int_X f^p\,d\mu$ 与 $\int_X g^p\,d\mu$ 至少有一为 ∞。从而不等式亦平凡。现在，不等式(5.4)两边除以 $\left\{\int_X (f+g)^p\,d\mu\right\}^{\frac{1}{q}}$，得证。 □

注 5.11. 探究上述 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式等号成立的条件，有时是十分有意义的。

(1) 从 Hölder 不等式的证明中可以看出，等号成立当且仅当 $\int_X FG\,d\mu = 1$。这意味着 Young 不等式 $FG \leqslant \frac{1}{p}F^p + \frac{1}{q}G^q$ 必须几乎处处等号成立。由例5.7，我们知道这等价于说“$G = F^{p-1}$，a.e.”。综上，*Hölder* 不等式等号成立当且仅当 $G^q = F^p$，*a.e.*。

(2) 同理，在 Minkowski 不等式的证明中，如果 $A,B<\infty$，则 *Minkowski* 不等式等号成立当且仅当存在不全为 0 的常数 α 和 β，使得 $\alpha f^p = \beta g^q$，*a.e.*。

思考题

1. 证明任给 $\varepsilon > 0$，存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得

$$xy \leqslant \varepsilon x^2 + C_\varepsilon y^2, \quad \forall x, y > 0.$$

   请给出 C_ε 的一个表达式。

2. 假设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为超线性凸函数，f^* 为其 Fenchel-Legendre 对偶。

   (1) f^* 亦为超线性凸函数。

   (2) 若 f 严格凸，则 f^* 可微。若 f 可微，则 f^* 严格凸。

   (3) $f^{**} = (f^*)^* = f$。

3. 设 f 为 $\mathbb{R}^{l+m}$ 上非负可测函数。$p \geqslant 1$，证明

$$\left[\int_{\mathbb{R}^l}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dy\right)^p\,dx\right]^{1/p} \leqslant \int_{\mathbb{R}^m}\left[\int_{\mathbb{R}^l} f(x,y)^p\,dx\right]^{1/p}\,dy.$$

   粗略地说，"和的 p-模小于等于 p-模的和"。

5.2 L^p 空间

若 $p \geqslant 1$，Minkowski 不等式表明 $\|\cdot\|_p$ 为 $L^p(\mu)$ 上的一个范数。换句话说，$\|\cdot\|_p$ 满足：若 $f, g \in L^p(\mu)$，则

(1) $\|f\|_p \geqslant 0$，且 $\|f\|_p = 0$ 当且仅当 $f = 0$，a.e.。

(2) 任给 $\alpha \in \mathbb{R}$，$\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$。

(3) $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$。

因此 $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ 为一**赋范线性空间**。但对 $0 < p < 1$，$\|\cdot\|_p$ 不为 $L^p(\mu)$ 上的范数。若定义

$$d(f,g) = \int_X |f - g|^p\,du, \quad f, g \in L^p(\mu),$$

则 d 为 $L^p(\mu)$ 上的一个度量。此时 $(L^p(\mu), d)$ 为一**度量线性空间**。

定义 5.12. 设 f 为测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上的非负可测函数。$S = \{a \in \mathbb{R} : \mu(\{f > a\}) = 0\}$。定义 $\beta = \infty$ 若 $S = \varnothing$，否则 $\beta = \inf S$。因为

$$\{f > \beta\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{f > \beta + \frac{1}{k}\},$$

故 $\beta \in S$。我们称 β 为 f (**关于** μ) **的本性上确界**。若 f 为 X 上的实可测函数，定义 $\|f\|_\infty$ 为 $|f|$ 的本性上确界。我们称 $f \in L^\infty(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 若 $\|f\|_\infty < \infty$。若 μ 为 X 上的计数测度，此时的 L^∞ 空间记作 $\ell^\infty(X)$。

容易验证 $\|\cdot\|_\infty$ 为一范数，并且 $\|f\|_\infty \leqslant \lambda$ 当且仅当 $|f| \leqslant \lambda$，a.e.。

定理 5.13. 设 f 为测度空间 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 上的非负可测函数，$1 \leqslant p \leqslant \infty$。则 $L^p(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为完备的赋范线性空间，即 ***Banach*** **空间**。

证明. 定理的证明在 $1 \leqslant p < \infty$ 与 $p = \infty$ 情形是不同的。我们首先假设 $p \in [1, \infty)$。设 $\{f_n\}$ 为 $L^p(\mu)$ 中的 Cauchy 序列。则存在子列 $\{f_{n_i}\}$ 满足

$$\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\| < 2^{-i}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

设

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|, \qquad g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|.$$

显然对任给 k 有 $\|g_k\|_p < 1$。则由 Fatou 引理，$\|g\|_p \leqslant 1$。故 g 几乎处处有限。所以对几乎所有的 x，级数

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$$

绝对收敛。记 f 为这个极限函数，即 $f = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}$，a.e.。

下面证明 f 即为 $\{f_n\}$ 在 L^p 下的极限。任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得若 $m, n < N$，则 $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$。由 Fatou 引理

$$\int_X |f - f_m|^p \, d\mu \leqslant \liminf_{i\to\infty} \int_X |f_{n_i} - f_m|^p \, d\mu < \varepsilon^p.$$

故 $f - f_m \in L^1(\mu)$，从而 $f \in L^p(\mu)$。并且，当 $m \to \infty$ 时，$\|f - f_m\|_p \to 0$。

考虑 $p = \infty$ 的情形。设 $\{f_n\}$ 为 $L^\infty(\mu)$ 中的 Cauchy 序列，定义

$$\begin{aligned} A_k &= \{x \in X : |f_k(x)| \geqslant \|f_k\|_\infty\} \\ B_{m,n} &= \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \|f_n - f_m\|_\infty\}. \end{aligned}$$

则对 $E = \bigcup_{k,m,n\in\mathbb{N}} (A_k \cup B_{m,n})$，$\mu(E) = 0$。在 E^c 上，$\{f_n\}$ 一致收敛于有界函数 f，在 E 上定义 $f = 0$。则 $f \in L^\infty(\mu)$ 并且 $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$。 □

我们的证明实际上蕴含了一个有用的结论。

推论 5.14. 若 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，$\{f_n\} \subset L^p(\mu)$ 为 *Cauchy* 列，收敛于 f，则必存在子列 $\{f_{n_i}\}$ 几乎处处收敛于 f。

定理 5.15. 若 $1 \leqslant p < \infty$，且

$$\mathcal{S} = \{s : X \to \mathbb{R} : s \text{ 为 } X \text{ 上的简单函数且 } \mu(\{s \neq 0\}) < \infty\}.$$

则 $\mathcal{S} \subset L^p(\mu)$ 并在 $L^p(\mu)$ 中稠密。

证明. 结论 $\mathcal{S} \subset L^p(\mu)$ 是显然的。假设 $f \in L^p(\mu)$ 且 $f \geqslant 0$，设简单函数序列 $\{s_n\}$ 由定理**??**决定，则 $0 \leqslant s_n \leqslant f$，从而 $s_n \in L^p(\mu)$，$s_n \in \mathcal{S}$。因为 $|f - s_n| \leqslant f$，由控制收敛定理，当 $n \to \infty$ 时 $\|f - s_n\|_p \to 0$。因此 f 包含于 $\mathcal{S}$ 的 L^p-闭包。一般情况由此得到。 □

5.3 连续函数逼近 L^p 函数

在本节，我们假设 X 为局部紧 Hausdorff 空间，且 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为 σ-有限的 Radon 测度空间（μ 正则）。Lebesgue 测度空间满足这些条件。定理5.15刻画了 $L^p(\mu)$ 的一个常见的稠密子集 $\mathcal{S}$。注意到 $C_c(X) \subset L^p(\mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$。

定理 5.16. *若 $1 \leqslant p < \infty$，则 $C_c(X)$ 为 $L^p(\mu)$ 的稠密子集。*

证明. 由定理5.15，我们仅需说明 $\mathcal{S}$ 中元可用 $C_c(X)$ 中元逼近。设 $s \in \mathcal{S}$，由 Luzin 定理，任给 $\varepsilon > 0$，存在 $g \in C_c(X)$，使得对 $E = \{g \neq f\}$，$\mu(E) < \varepsilon$，且 $|g| \leqslant \|s\|_\infty$。因此

$$\|g - s\|_p^p = \int_E |g - s|^p \, d\mu + \int_{E^c} |g - s|^p \, d\mu = \int_E |g - s|^p \, d\mu < 2\|s\|_\infty^p \varepsilon.$$

这就证明了结论。 □

注 5.17. 定理5.16实际上说明：*当 $1 \leqslant p < \infty$ 时，$C_c(X)$ 在范数 $\|\cdot\|_p$ 下的完备化恰为 $L^p(\mu)$*。但是这个结论对 $p = \infty$ 时是不成立的。事实上，$C_c(X)$ *在范数 $\|\cdot\|_\infty$ 下的完备化恰为 $C_0(X)$*。

当我们考虑 Lebesgue 测度空间时，是否我们可以给出一个构造性的逼近过程来用 $C_c(\mathbb{R}^n)$（甚至 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$）中元来逼近 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中元呢？这里我们注意到定理5.16中的逼近是非构造性的。

我们来回忆一下前面我们提到的卷积。为简洁起见，我们定义两个算子：任给 $\mathbb{R}^n$ 上的实函数 f，令

$$(\tau_a f)(x) = f(x - a), \quad \check{f}(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $a \in \mathbb{R}^n$。

任给 $a, b \in \mathbb{R}^n$，明显地有

$$\tau_a(\tau_b f) = \tau_{a+b} f, \quad \tau_a \check{f} = (\tau_{-a} f)\check{}, \quad \tau_0 f = f.$$

我们验证一下上面第二个等式。设 $g = \check{f}$，则 $g(x) = f(-x)$ 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$，因此 $\tau_a \check{f}(x) = \tau_a g(x) = g(x - a) = f(a - x)$。另一方面，设 $(\tau_{-a} f)\check{} = h$，则

$\check{h} = \tau_{-a} f$，即任给 $x \in \mathbb{R}^n$，$\check{h}(x) = \tau_{-a} f(x) = f(x+a)$。从而任给 $x \in \mathbb{R}^n$，$h(x) = f(a-x)$。

由 Lebesgue 测度在刚体运动下的不变性，算子 $f \mapsto \tau_a f$ 和 $f \mapsto \check{f}$ 建立了 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的等距同构。若 f, g 为 $\mathbb{R}^n$ 上的实函数，且卷积 $f * g$ 有意义，则

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_x \check{f}) g \, dm.$$

引理 5.18 (积分的平均连续性)**.** 设 $1 \leqslant p < \infty$，$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$。则映射 $a \mapsto \tau_a f$ 为一致连续的。

证明. 注意到 $\{\tau_a\}$ 构成了 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的等距同构组成的 Abel 群，故

$$\|\tau_a f - \tau_b f\|_p = \|\tau_{a-b} f - f\|_p, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n.$$

因此只需证明映射 $a \mapsto \tau_a f$ 在 0 处连续。

先假设 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$，从而 f 一致连续。故任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得若 $|y - y'| < \delta$，则 $|f(y) - f(y')| < \varepsilon$。因此若 $|a| < \delta$，则

$$\|\tau_a f - f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-a) - f(x)|^p \, dm(x) \right)^{1/p} \leqslant \varepsilon \cdot [2m(\operatorname{supp}(f))]^{1/p}$$

故 $a \mapsto \tau_a f$ 在 0 处连续。

一般地，设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$。任给 $\varepsilon > 0$，存在 $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$，使得 $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$。对 g，存在 $\delta > 0$ 使得若 $|a| < \delta$，则 $\|\tau_a g - g\|_p < \varepsilon/3$。因此

$$\|\tau_a f - f\|_p \leqslant \|\tau_a f - \tau_a g\|_p + \|\tau_a g - g\|_p + \|g - f\|_p < \varepsilon.$$

证毕。 □

注 5.19. 上述引理称作**积分平均连续性**是因为当 $p = 1$，引理表明

$$\lim_{a \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+a) - f(x)| \, dm(x) = 0.$$

设 $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\phi \geqslant 0$，$\int_{\mathbb{R}^n} \phi \, dm = 1$。对任意 $k \in \mathbb{N}$ 定义

$$\phi_k(x) = k^n \phi(kx), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.5}$$

则 $\phi_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$，$\phi_k \geqslant 0$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k \, dm = 1$。序列 $\{\phi_k\}$ 称作 **Dirac 测度的逼近序列**。这是因为

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f \phi_k \, dm = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_0 = f(0), \quad \forall f \in C_c(\mathbb{R}^n).$$

这里 μ_0 为 $0 \in \mathbb{R}^n$ 处的 Dirac 测度。注意到，当 $k \to \infty$ 时，$\operatorname{supp}(\phi_k)$ 收缩到 $\{0\}$。

引理 5.20. 设 $1 \leqslant p < \infty$，$f \in C_c(\mathbb{R}^n)$，$g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且具有紧支集。则

$$\text{supp}\,(f * g) \subset \text{supp}\,(f) + \text{supp}\,(g).$$

证明. 任给 $x \in \mathbb{R}^n$，首先我们有等式

$$\text{supp}\,(\tau_x \check{f}) \cap \text{supp}\,(g) = (x - \text{supp}\,(f)) \cap \text{supp}\,(g) \tag{5.6}$$

事实上，假设 $y \in \text{supp}\,(\tau_x \check{f}) \cap \text{supp}\,(g)$，则存在序列 $\{z_i\}$，$|f(x - z_i)| > 0$，且 $\lim_{i\to\infty} z_i = y$。令 $w_i = x - z_i$，则 $|f(w_i)| > 0$，因此 $w_i \in \text{supp}\,(f)$。且 $y = x - \lim_{i\to\infty} w_i$，因此 $y \in x - \text{supp}\,(f)$。

假设 $x \notin \text{supp}\,(f) + \text{supp}\,(g)$，则由(5.6)，$(x - \text{supp}\,(f)) \cap \text{supp}\,(g) = \varnothing$。从而 $\text{supp}\,(\tau_x \check{f}) \cap \text{supp}\,(g)$。因此 $(f * g)(x) = 0$。又 $\text{supp}\,(f) + \text{supp}\,(g)$ 为紧集，故 $x \notin \text{supp}\,(f * g)$。 □

注 5.21. 若 f, g 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，使得 $f * g$ 有定义，则

$$\text{supp}\,(f * g) \subset \overline{\text{supp}\,(f) + \text{supp}\,(g)}.$$

特别,若 f 和 g 中有一个具有紧支集,则引理中的包含关系成立。这是因为*若 F 为闭集, K 为紧集, 则 $F+K$ 为闭集*。事实上,假设 $\{z_i\}$ 为 $F+K$ 中的序列, $\lim_{i\to\infty} z_i = z$, 其中 $z_i = x_i + y_i$, $x_i \in F$ 且 $y_i \in K$。K 的紧性表明存在子列 $\{i_k\}$，使得 $\lim_{k\to\infty} y_{i_k} = y \in K$。从而 $\lim_{k\to\infty} x_{i_k} = \lim_{k\to\infty}(z_{i_k} - y_{i_k}) = x$ 存在。再由 F 的闭性，$x \in F$。因此 $z = x + y \in F + K$。

定理 5.22. 设 $1 \leqslant p < \infty$，$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$，$\{\phi_k\}$ 为 *Dirac* 测度的逼近序列。则 $f * \phi_k \in C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$，$k \in \mathbb{N}$，且

$$\lim_{k\to\infty} \|f * \phi_k - f\|_p = 0.$$

证明. 设 $p \geqslant 1$，$q \in [1, \infty]$ 为 p 的共轭指数。注意到任给 $r \in [1, \infty]$，$\phi_k \in C_c(\mathbb{R}^n) \subset L^r(\mathbb{R}^n)$，由 Hölder 不等式

$$|(f * \phi_k)(x) - (f * \phi_k)(x')| \leqslant \|\tau_x \check{f} - \tau_{x'} \check{f}\|_p \|\phi_k\|_q.$$

由引理5.18的积分平均连续性，从而 $f * \phi_k$ 一致连续。考虑 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的稠密子集

$$\mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n) = \{s : s \text{ 为 } \mathbb{R}^n \text{ 中具有紧支集的简单函数}\}.$$

任给 $\{s_j\} \subset \mathcal{S}_1(\mathbb{R}^n)$，且 $\lim_{j\to\infty} \|s_j - f\|_p = 0$。因为 ϕ_k 具有紧支集，由引理5.20，$\phi_k * s_j \in C_c(\mathbb{R}^n)$，并且

$$|(\phi_k * s_j)(x) - (\phi_k * f)(x)| \leqslant \|\tau_x \check{s}_j - \tau_x \check{f}\|_p \|\phi_k\|_q = \|s_j - f\|_p \|\phi_k\|_q.$$

因此 $\lim_{j\to\infty}\|\phi_k * s_j - \phi_k * f\|_\infty = 0$。这说明 $\phi_k * f \in C_0(\mathbb{R}^n)$。另一方面，因为

$$\begin{aligned}\|\phi_k * s_j - \phi_k * f\|_p^p &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\tau_x\check{\phi}_k|^p |s_j - f|^p \, dm(x) \leqslant M_k \int_{\mathbb{R}^n} |s_j - f|^p \, dm(x) \\ &= M_k \|s_j - f\|_p^p,\end{aligned}$$

故 $\lim_{j\to\infty}\|\phi_k * s_j - \phi_k * f\|_p = 0$。综上 $\phi_k * f \in C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$。注意 $\phi_k * f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ 也可直接由 $\phi_k * f$ 的一致连续性与 $\phi_k * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 得到。

因为 $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k \, dm = 1$，并由积分形式的 Minkowski 不等式，我们有

$$\begin{aligned}\|f * \phi_k - f\|_p &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_x\check{f} - f(x)|\phi_k \, dm\right]^p dm(x)\right)^{1/p} \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_x\check{f} - f(x)|^p \phi_k^p \, dm(x)\right]^{1/p} dm \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_x\check{f} - f(x)|^p \, dm(x)\right]^{1/p} \phi_k \, dm \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_y f - f\|_p \phi_k \, dm.\end{aligned}$$

设 $B_r = \overline{B(0,r)}$，$A_r = \mathbb{R}^n \setminus B_r$。由引理5.18，任给 $\varepsilon > 0$，存在 $r > 0$ 使得若 $y \in B_r$，则

$$\|\tau_y f - f\|_p < \varepsilon.$$

由三角不等式，$\|\tau_y f - f\|_p \leqslant 2\|f\|_p$，并回忆 $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k \, dm = 1$，则有

$$\begin{aligned}\|f * \phi_k - f\|_p &\leqslant \int_{B_r} \|\tau_y f - f\|_p \phi_k \, dm + \int_{A_r} \|\tau_y f - f\|_p \phi_k \, dm \\ &\leqslant \varepsilon + 2\|f\|_p \int_{A_r} \phi_k \, dm.\end{aligned}$$

我们知道，存在 $N \in \mathbb{N}$，当 $k > N$ 时，supp $(\phi_k) \subset B_r$，从而 $\int_{A_r} \phi_k \, dm = 0$。这就完成了证明。 □

思考题

1. 设 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $x \in \mathbb{R}^n$ 处连续，则 $\lim_{k\to\infty}(f * \phi_k)(x) = f(x)$。若 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 一致连续，则 $\{f * \phi_k\}$ 一致收敛于 f。

5.4 习题

2. 设 $p>0$。证明任给 $\varepsilon>0$ 存在 $C_\varepsilon>0$ 使得

$$||a+b|^p-|b|^p|\leqslant \varepsilon|b|^p+C_\varepsilon|a|^p,\quad \forall a,b\in\mathbb{R}.$$

3. 设 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 为测度空间，$p>0$。X 上的实可测函数序列 $\{f_n\}$ 几乎处处收敛于 f。假设存在 $C>0$ 使得

$$\int_X |f_n|^p\,d\mu\leqslant C,\quad n\in\mathbb{N}.$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_X ||f_n|^p-|f_n-f|^p-|f|^p|\;d\mu=0.$$

4. 设 $p_0\in(0,+\infty)$，$f\in L^{p_0}(X,\mu)$，证明

$$\lim_{p\to 0^+}\int_X |f|^p\,d\mu=\mu(\{x\in X: f(x)\neq 0\}).$$

5. 假设存在 $0<r<\infty$ 使得 $f\in L^r(X,\mu)$，证明

$$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty.$$

举例说明若去掉条件“存在 $0<r<\infty$ 使得 $f\in L^p(X,\mu)$”，结论不成立。

6. 设 (X,μ) 为概率测度空间，存在 $r>0$ 和非负可测函数 $f\in L^r(X,\mu)$ 使得 $\log(f)\in L^1(X,\mu)$（我们约定 $\log(0)=-\infty$）。定义 $[0,r]$ 上的函数 F:

$$F(p)=\int_X f^p\,d\mu,\quad p\in(0,r];\qquad F(0)=1.$$

证明 F 在 $[0,r)$ 上右可微并计算 F 的右导数。

7. 设 $1\leqslant p<r<q<\infty$ 且 $f\in L^p\cap L^q$。证明 $f\in L^r$ 且

$$\log\|f\|_r\leqslant \frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\log\|f\|_p+\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\log\|f\|_q.$$

第六章　微分

6.1　Lebesgue 微分定理

6.1.1　Vitali 覆盖定理

任给 $E \subset \mathbb{R}^n$，$\{B(x,r_x)\}_{x\in E}$ 为 E 的一个开覆盖。我们引入覆盖定理试图克服下面看似矛盾的困难：

(1) 在 $\{B(x,r_x)\}_{x\in E}$ 中选取一族互不相交的球（从而至多可数）。

(2) E 被这些球覆盖。

显然这两点一般不可能同时成立。但我们可以放宽一些 (1) 和 (2) 中的条件。Vitali 的覆盖定理修改了 (2)，而 Besicovitch 的覆盖定理修改了 (1)。

为方便起见，设 B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开球（或闭球），记 $r(B)$ 为 B 的半径。对 $0 < a < \infty$，记 aB 为 B 的同心开球并且 $r(aB) = ar(B)$。

定理 6.1 (Vitali 覆盖定理 I). *设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为有界集。设 $\mathscr{F}$ 为一族以 E 中点为中心的开球，且 E 中每一点均有 $\mathscr{F}$ 中开球以该点为中心。则存在可数（可能有限）的开球列 $\{B_\alpha\} \subset \mathscr{F}$ 使得*

(1) *$\{B_\alpha\}$ 两两不交。*

(2) *$E \subset \bigcup_{\alpha\geqslant 1} 3B_\alpha$。*

证明. 不妨设 $\sup_{B\in\mathscr{F}} r(B) < \infty$。我们运用归纳法来选取这样的球：假设 $B_1, B_2, \ldots, B_{\alpha-1}$ 已经选好，$\alpha \geqslant 1$，定义

$$d_\alpha = \sup\{r(B) : B \in \mathscr{F}, B \cap (\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta) = \varnothing\}.$$

若无 $B \in \mathscr{F}$ 使得 $B \cap (\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta) = \varnothing$，则该过程终止至 $B_{\alpha-1}$。否则，选取 $B_\alpha \in \mathscr{F}$，使得

$$r(B_\alpha) > \frac{1}{2} d_\alpha, \qquad B_\alpha \cap (\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta) = \varnothing.$$

注意，第一个球也可以按照这种方法选取。因为 $0 < d_\alpha < \infty$，故这个过程可以一直继续下去。由选取的过程，(1) 是显然的。

下面来验证 (2)。任给 $x \in E$, 存在以 x 为中心的球 $B \in \mathscr{F}$, 记 $\rho = r(B)$。我们断言：B 必与所选球列 $\{B_\alpha\}$ 中某球相交。否则，任给 α，$B \cap B_\alpha = \varnothing$。这表明前面的过程不会终止。现在，任给 α，$\rho \leqslant d_\alpha$，从而

$$r(B_\alpha) > \frac{1}{2} d_\alpha \geqslant \frac{1}{2}\rho > 0.$$

因为 $\bigcup_\alpha B_\alpha$ 有界，从而测度有限。但 $\{B_\alpha\}$ 两两不交表明

$$m(\bigcup_\alpha B_\alpha) = \sum_\alpha m(B_\alpha) = \infty.$$

这就导致了矛盾。

因为 B 与至少一个 B_α 相交，故存在最小的 $\alpha \geqslant 1$ 使得 $B \cap B_\alpha \neq \varnothing$。因此

$$B \cap (\bigcup_{\beta<\alpha} B_\beta) = \varnothing.$$

这说明 $\rho \leqslant d_\alpha < 2r(B_\alpha)$。任给 $y \in B \cap B_\alpha$，若 z 为 B_α 的中心，则

$$|x - z| \leqslant |x - y| + |y - z| < \rho + r(B_\alpha) < 3r(B_\alpha).$$

故 $x \in 3B_\alpha$. □

6.1.2 Hardy-Littlewood 极大函数

定义 6.2. $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 f 称作**局部可积**，记作 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$，若任给 $x \in \mathbb{R}^n$，存在 $r > 0$ 使得 $\int_{B(x,r)} |f|\, dm < \infty$。等价地，$f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当任给紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$，$\int_K |f|\, dm < \infty$。

若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则 f 的 **Hardy-Littlewood 极大函数** Mf 定义在 $\mathbb{R}^n$ 上,

$$Mf(x) = \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy.$$

引理 6.3. Mf 为下半连续。

证明. 假设 $Mf(x) > a$，则存在 $r > 0$ 使得 $a < \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$。选取 $r' > r$ 使得 $a < \frac{1}{m(B(x,r'))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$。则若 $|x' - x| < r' - r$，有 $B(x,r) \subset B(x',r')$。因此

$$\begin{aligned} a &< \frac{1}{m(B(x,r'))} \int_{B(x',r')} |f(y)|\, dy = \frac{1}{m(B(x',r'))} \int_{B(x',r')} |f(y)|\, dy \\ &\leqslant Mf(x'). \end{aligned}$$

这就说明 Mf 下半连续。 □

引理 6.4. 若 $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则 $f = 0$，*a.e.*。

证明. 任给 $a > 0$，$|x| > a$。则 $B(0,a) \subset B(x, 2|x|)$，且

$$\begin{aligned} Mf(x) &\geqslant \frac{1}{m(B(x,2|x|))} \int_{B(x,2|x|)} |f(y)|\,dy \geqslant \frac{1}{m(B(0,2|x|))} \int_{B(0,a)} |f(y)|\,dy \\ &= \frac{C}{|x|^n} \int_{B(0,a)} |f(y)|\,dy. \end{aligned}$$

注意到 $\int_{\{|x|>a\}} \frac{1}{|x|^n}\,dx \geqslant \frac{1}{a^n} m(\{|x| > a\}) = \infty$，因此若 $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则

$$\int_{B(0,a)} |f(y)|\,dy = 0, \quad \forall a > 0.$$

这就证明了 $f = 0$，a.e.。 □

例 6.5. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 不能保证 $Mf \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$。设 $n = 1$，$f(x) = \frac{1}{x \log^2(x)}$ 若 $0 < x < 1/2$，否则定义 $f(x) = 0$。若 $0 < x < 1/2$，则

$$Mf(x) \geqslant \frac{1}{2x} \int_0^{2x} f(y)\,dy > \frac{1}{2x} \int_0^x \frac{dy}{y \log^2(y)} = -\frac{1}{2x \log(x)}.$$

因为 $-\frac{1}{2x\log(x)}$ 在 0 附近不可积，故 $Mf \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$。 \\\\

由上面的引理，$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 不能推出 $Mf \in L^1(\mathbb{R}^n)$，甚至 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$。

定义 6.6. $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 f 称作**弱** L^1 若存在常数 $C > 0$，使得任给 $t \geqslant 0$，

$$t \cdot m(\{|f| \geqslant t\}) \leqslant C.$$

由 Chebyshev 不等式，若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则 $m(\{|f| \geqslant t\}) \leqslant \frac{1}{t}\|f\|_1$。因此 f 必为弱 L^1 的。下面的 Hardy-Littlewood 极大定理表明，Mf 为弱 L^1 的。

定理 6.7 (Hardy-Littlewood 极大定理)**.** 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，则

$$m(\{Mf > t\}) \leqslant \frac{3^n}{t}\|f\|_1.$$

证明. 设 $E = \{Mf > t\}$。任给 $x \in E$，存在 $0 < r_x < \infty$，使得

$$\frac{1}{m(B(x,r_x))} \int_{B(x,r_x)} |f(y)|\,dy > t.$$

记 $\mathscr{F} = \{B(x, r_x)_{x \in E}\}$。我们需要 E 有界的条件。一般我们可以用 $E \cap B(0,k)$ 代替 E，再令 $k \to \infty$。

对开球族 $\mathscr{F}$ 运用 Vitali 覆盖定理，并设 $\{B_\alpha\}$ 为其决定的开球列。则

$$\begin{aligned} m(E \cap B(0,k)) &\leqslant \sum_{\alpha \geqslant 1} m(3B_\alpha) = \sum_{\alpha \geqslant 1} 3^n m(B_\alpha) \leqslant \frac{3^n}{t} \int_{B_\alpha} |f(y)|\,dy \\ &\leqslant \frac{3^n}{t}\|f\|_1. \end{aligned}$$

令 $k \to \infty$，则 $m(E) \leqslant 3^n t^{-1} \|f\|_1$。 □

6.1.3 Lebesgue 微分定理与 Lebesgue 点

定理 6.8 (Lebesgue 微分定理). 设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$，则对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$，

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

为证明 Lebesgue 微分定理，我们引入一个**局部极大函数**

$$f^*(x) = \limsup_{r \to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy$$

我们需要验证 f^* 的一些性质。

命题 6.9. 设 $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$，则局部极大函数满足：

(i) $f^* \geqslant 0$。

(ii) $(f+g)^* \leqslant f^* + g^*$。

(iii) 若 g 在 x 处连续，则 $g^*(x) = 0$。

(iv) 若 g 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续，则 $(f-g)^* = f^*$。

(v) $f^* \leqslant Mf + |f|$。

(vi) 对 *Lebesgue* 外测度 m^*，

$$m^*(\{f^* > t\}) \leqslant \frac{2(3^n+1)}{t} \cdot \|f\|_1, \quad t > 0.$$

证明. (i) 是平凡的。由于

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x,r)} |(f(x)+g(x)) - (f(y)+g(y))|\, dy \\
\leqslant &\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy + \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|\, dy,
\end{aligned}$$

这就得到了 (ii)。假设 g 在 x 处连续，则任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得若 $y \in B(x,\delta)$，$|g(y) - g(x)| < \varepsilon$。因此若 $0 < r \leqslant \delta$，则

$$\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|\, dy < \varepsilon.$$

这就证明了 (iii)。假设 g 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续。由 (ii) 和 (iii)，则

$$\begin{aligned}
(f-g)^* &\leqslant f^* + (-g)^* = f^*, \\
f^* &\leqslant (f-g)^* + g^* = (f-g)^*.
\end{aligned}$$

这就证明 (iv)。(v) 直接由下面的关系得到：

$$\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)-f(x)|\,dy \leqslant \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|+|f(x)|\,dy$$
$$=\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy+|f(x)| \leqslant Mf(x)+|f(x)|.$$

最后我们来证明 (vi)。由 (v)，Chebyshev 不等式和 Hardy-Littlewood 极大定理，我们有

$$\begin{aligned}m^*(\{f^*>t\}) &\leqslant m(\{|f|>t/2\})+m(\{Mf>t/2\})\\ &\leqslant \frac{\|f\|_1}{t/2}+\frac{3^n\|f\|_1}{t/2}=\frac{2(3^n+1)}{t}\cdot\|f\|_1.\end{aligned}$$

这就完成了证明。 □

定理6.8的证明. 任给 $\varepsilon>0$，则存在 $g\in C_c(\mathbb{R}^n)$，使得 $\|f-g\|_1<\varepsilon$。由命题6.9的 (iv) 和 (vi)，则对任意 $t>0$，有

$$\begin{aligned}m^*(\{f^*>t\}) &= m^*(\{(f-g)^*>t\}) \leqslant \frac{2(3^n+1)}{t}\cdot\|f-g\|_1\\ &\leqslant \frac{2(3^n+1)}{t}\cdot\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，则 $m^*(\{f^*>t\})=0$。故 $E_k=\{f^*>1/k\}$（$k\in\mathbb{N}$）为零测集。因此 $\{f^*\neq 0\}=\bigcup_{k\geqslant 1}E_k$ 亦为零测集。这就证明了定理。 □

下面的结论稍微推广了一下 Lebesgue 微分定理。

推论 6.10. *设 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$。任给 $x\in\mathbb{R}^n$ 及 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集列 $\{E_k\}$ 满足如下性质：存在 $c>0$ 及正实数序列 $\{r_k\}$，$\lim_{k\to\infty}r_k=0$，使得 $E_k\subset B(x,r_k)$ 且 $m(B(x,r_k))\leqslant cm(E_k)$（$k\in\mathbb{N}$）。若 x 为 f 的 Lebesgue 点，则*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{m(E_k)}\int_{E_k}f(y)\,dy=f(x).$$

证明. 因为

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{m(E_k)}\int_{E_k}f(y)\,dy-f(x)\right| &\leqslant \frac{1}{m(E_k)}\int_{E_k}|f(y)-f(x)|\,dy\\ &\leqslant \frac{c}{m(B(x,r_k))}\int_{B(x,r_k)}|f(y)-f(x)|\,dy,\end{aligned}$$

则结论直接由 Lebesgue 微分定理得到。 □

下面我们利用 Lebesgue 微分定理来研究不定积分。若 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$，$a\in\mathbb{R}$，我们定义 f 的**不定积分**

$$F(x)=\begin{cases}\int_{[a,x]}f(y)\,dy, & x\geqslant a,\\ -\int_{[x,a]}f(y)\,dy, & x<a.\end{cases}$$

定理 6.11. *F 几乎处处可微，且 $F' = f$，a.e.。*

证明. 我们只需对 f 的 Lebesgue 点 x 讨论。对 $E_k = (x, x + r_k)$，$r_k \searrow 0$，运用推论6.10。则有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F(x + r_k) - F(x)}{r_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{r_k} \int_x^{x+r_k} f(y)\, dy = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{m(E_k)} \int_{E_k} f(y)\, dy$$
$$= f(x).$$

由 $\{r_k\}$ 的任意性，则

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x).$$

类似在考虑集合 $E_k = (x - r_k, x)$ 即可。因此 $F'(x) = f(x)$。 □

6.1.4 Lebesgue 点·密度点·近似连续性

定义 6.12. 设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$，$x \in \mathbb{R}^n$ 称作 f 的 **Lebesgue 点**若

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

注意到，上述定义对于单个的函数 f 是有意义的，但是如果我们考虑在几乎处处相等意义下的等价类，我们发现，若 $f = g$，a.e.，但他们各自的 Lebesgue 点一般是不同的。为此我们给出另一个相关概念。

定义 6.13. 设 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$，$x \in \mathbb{R}^n$ 为 f 的 **Lebesgue 集**中的点若存在 $A \in \mathbb{R}$，使得

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - A|\, dy = 0.$$

f 的 Lebesgue 集记作 $\text{Leb}\,(f)$。

若 $x \in \text{Leb}\,(f)$，则 A 是唯一确定的，即

$$A = \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x, r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy.$$

由此可以看出，*x 是否属于 $\text{Leb}\,(f)$ 与 f 在 x 处的取值 $f(x)$ 无关！*若 $f = g$，a.e.，则 $\text{Leb}\,(f) = \text{Leb}\,(g)$，并且 $\text{Leb}\,(f)$ 为全测集。也就是说，Lebesgue 集是由 $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 关于几乎处处相等决定的等价类所确定。因而，我们可以修改原先的 f，从而有 f 的所谓**精确表示**

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy, & x \in \text{Leb}\,(f), \\ 0, & x \notin \text{Leb}\,(f). \end{cases}$$

很明显，若 $f=g$，a.e.，则 $\bar{f}=\bar{g}$。为方便，我们在考虑 $x\in \mathrm{Leb}\,(f)$ 时总假设 $f(x)=\bar{f}(x)$。

定义 6.14. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测。我们称 $x\in E$ 为 E 的**密度点**若 x 为特征函数 $\mathbf{1}_E$ 的 Lebesgue 点。更确切地说，$x\in E$ 为 E 的密度点若

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{m(E\cap B(x,r))}{m(B(x,r))}=1.$$

下面的结论是 Lebesgue 微分定理的直接推论。

定理 6.15. *设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测，则几乎所有的 $x\in E$ 均为 E 的密度点。并且对几乎所有的 $x\in E^c$，有*

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{m(E\cap B(x,r))}{m(B(x,r))}=0.$$

另一与 Lebesgue 点相关的概念是所谓近似极限和近似连续性。

定义 6.16. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，称 A 为当 $y\to x$ 时 f 的**近似极限**如果任给 $\varepsilon>0$，上水平集 $\{|f-A|>\varepsilon\}$ 的密度为 0，即

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{m(\{|f-A|>\varepsilon\}\cap B(x,r))}{m(B(x,r))}=0.$$

记作 $\mathrm{ap}\lim_{y\to x}f(y)=A$。$f$ 称作**在** x **处近似连续**若 $\mathrm{ap}\lim_{y\to x}f(y)=f(x)$。

定理 6.17. *若 $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，则 f 几乎处处近似连续。特别，每一 f 的 Lebesgue 点均为 f 的近似连续点。*

证明. 任给 $\varepsilon>0$，

$$\frac{m(\{|f-f(x)|>\varepsilon\}\cap B(x,r))}{m(B(x,r))}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f-f(x)|\,dm.$$

因此，对 f 任意 Lebesgue 点 x，我们有 $\mathrm{ap}\lim_{y\to x}f(y)=f(x)$。 □

思考题： 设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的函数。证明 f 在 x 处近似连续当且仅当存在 $F\subset\mathbb{R}^n$，F 在 x 处密度为 0，使得

$$\lim_{y\to x,y\notin F}f(y)=f(x).$$

思考题

1. 设 $f\in L^1([a,b])$ 满足

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b|f(t+h)-f(t)|\,dt=0.$$

证明 f 几乎处处为常数。

6.1.5 磨光子

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为开集。对 $\varepsilon > 0$，记 $U_\varepsilon = \{x \in: d_{\partial U}(x) < \varepsilon\}$。若 $U = \mathbb{R}^n$，则 $\partial\mathbb{R}^n = \varnothing$，我们约定 $d_\varnothing \equiv +\infty$，从而 $\mathbb{R}^n_\varepsilon = \mathbb{R}^n$。定义函数 $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 如下:

$$\eta(x) = \begin{cases} C \cdot e^{\frac{1}{a-|x|^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

其中常数 $C > 0$ 选取使得 $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\, dx = 1$。注意，$\operatorname{supp}(\eta) \subset \overline{B(0,1)}$。对 $\varepsilon > 0$ 定义

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

通常 $\{\eta_\varepsilon\}$ 称作标准**磨光子**。

若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，对任意 $\varepsilon > 0$，定义

$$f^\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.1}$$

如前面讨论，函数族 $\{f^\varepsilon\}$ 是用来逼近函数 f 的一个十分有效的手段。我们在这里，将会揭示更多相关的信息。

定理 6.18. 假设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，$\{f^\varepsilon\}$ 如(6.1)给出。

(1) 任给 $\varepsilon > 0$，$f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$。

(2) 若 $f \in C(U)$，则任给紧子集 $K \subset U$，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时 f^ε 在 K 上一致收敛于 f。

(3) 设 $1 \leqslant p < \infty$，$f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$，则 f^ε 在 $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中收敛于 f。

(4) 若 x 为 f 的 *Lebesgue* 点，则 $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f^\varepsilon(x) = f(x)$。特别，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时 f^ε 几乎处处收敛于 f。

证明. 任给 $x \in U_\varepsilon$ 并记 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的自然基底。任给 $i = 1, \ldots, n$，对充分小的 $|h|$ 使得 $x + he_i \in U_\varepsilon$，有

$$\begin{aligned} \frac{f^\varepsilon(x+he_i) - f(x)}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_U \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] f(y)\, dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_V \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] f(y)\, dy, \end{aligned}$$

其中 $V \subset U$ 为 x 的某紧邻域。因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^n\frac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)$$

并且由微分中值定理，

$$\frac{1}{h}\left|\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right)-\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right|\cdot|f(y)|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\|D\eta\|_\infty|f|\in L^1(V),$$

故由控制收敛定理，

$$\frac{\partial f^\varepsilon(x)}{\partial x_i}=\lim_{h\to\infty}\frac{f^\varepsilon(x+he_i)-f(x)}{h}=\int_U\frac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)f(y)\,dy=f*\frac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x).$$

类似，f^ε 各阶偏导数均存在并且连续。故 $f^\varepsilon\in C^\infty(U_\varepsilon)$。这就证明了 (1)。

因为 $\operatorname{supp}(\eta)\subset\overline{B(0,1)}$，故任给紧集 $K\subset U$ 及 $x\in K$，有

$$f^\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)}\eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)f(y)\,dy=\int_{B(0,1)}\eta(z)f(x-\varepsilon z)\,dz.$$

故

$$|f^\varepsilon(x)-f(x)|\leqslant\int_{B(0,1)}\eta(z)|f(x-\varepsilon z)-f(x)|\,dz$$

记 $K_\varepsilon=\overline{\cup\{B(x,\varepsilon):x\in K\}}$，则 $K_\varepsilon\supset K$ 为紧集，且由积分的平均连续性，f^ε 在 K_ε 上一致收敛于 f。这就证明了 (2)。

(3) 的证明与定理5.22完全相同。

最后我们来证明 (4)。设 x 为 f 的 Lebesgue 点。由

$$\begin{aligned}|f^\varepsilon(x)-f(x)|&\leqslant\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B(x,\varepsilon)}\eta\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)|f(y)-f(x)|\,dy\\&\leqslant\omega_n\|\eta\|_\varepsilon\frac{1}{m(B(x,\varepsilon))}\int_{B(x,\varepsilon)}|f(y)-f(x)|\,dy,\end{aligned}$$

其中 ω_n 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体积。(4) 的结论由 Lebesgue 微分定理直接得到。 □

6.1.6 更多关于覆盖定理

定理 6.19 (Vitali 覆盖定理 II). *设 $\mathscr{F}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中（非退化）闭球族，且 $\sup\{r(B):B\in\mathscr{F}\}<\infty$。则存在 $\mathscr{F}$ 中两两不交的可数族 $\mathscr{G}$，使得*

$$\bigcup_{B\in\mathscr{F}}B\subset\bigcup_{B\in\mathscr{G}}5B.$$

证明. 设 $d=\sup\{r(B):B\in\mathscr{F}\}$。定义

$$\mathscr{F}_j=\left\{B\in\mathscr{F}:\frac{d}{2^j}<r(B)\leqslant\frac{d}{2^{j-1}}\right\},\quad j\in\mathbb{N}.$$

定义 $\mathscr{G}_j\subset\mathscr{F}_j$ 如下:

1) 选取 $\mathscr{G}_1$ 为 $\mathscr{F}_1$ 中任意极大两两不交的子集族。也就是说，任给 $B \in \mathscr{F}_1 \backslash \mathscr{G}_1$ 必与 $\mathscr{G}_1$ 中某球相交。

2) 假设 $\mathscr{G}_1, \mathscr{G}_2, \ldots, \mathscr{G}_{k-1}$ 已选好。选取 $\mathscr{G}_k$ 为

$$\left\{B \in \mathscr{F}_k : B \cap B' = \varnothing \text{ 对任给 } B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathscr{G}_j\right\}.$$

的极大两两不交的子集族。

最后定义 $\mathscr{G} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{G}_j$。则 $\mathscr{G}$ 为两两不交的闭球族，$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$。因为每一 $\mathscr{G}_j$ 均可数，故 $\mathscr{G}$ 可数。

任给 $B \in \mathscr{F}$，存在 j 使得 $B \in \mathscr{F}_j$。则由 $\mathscr{G}_j$ 的极大性，存在闭球 $B' \in \bigcup_{k=1}^{j} \mathscr{G}k$ 且 $B \cap B' \neq \varnothing$。但

$$r(B') \geqslant \frac{d}{2^j}, \qquad r(B) \leqslant \frac{d}{2^{j-1}}.$$

故 $r(B) \leqslant 2r(B')$。故 $B \subset 5B'$。证毕。 □

定义 6.20. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，闭球族 $\mathscr{F}$ 称作 E 的一个**细覆盖**若 $\mathscr{F}$ 为 E 的覆盖，且对任意 $x \in E$，

$$\inf\{r(B) : x \in B, B \in \mathscr{F}\} = 0.$$

推论 6.21. 设 $\mathscr{F}$ 为 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的由闭球组成的细覆盖，且 $\sup\{r(B) : B \in \mathscr{F}\} < \infty$。则存在 $\mathscr{F}$ 中两两不交的闭球构成的可数子族 $\mathscr{G}$，使得任给 $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\} \subset \mathscr{G}$，有

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{m} B_k \subset \bigcup_{B \in \mathscr{G} \setminus \{B_1, \ldots, B_m\}} 5B.$$

证明. 设 $\mathscr{G}$ 由 Vitali 覆盖定理决定的可数闭球族。任给 $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\} \subset \mathscr{G}$，若 $E \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_k$，已证。否则，任给 $x \in E \setminus \bigcup_{k=1}^{m} B_k$，由于 $\mathscr{F}$ 为细覆盖，$\bigcup_{k=1}^{m} B_k$ 为闭集，故存在 $B \in \mathscr{F}$ 使得 $B \cap B_k = \varnothing$（$k = 1, \ldots, m$）。由覆盖定理的证明，存在 $B' \in \mathscr{G}$，$B \cap B' \neq \varnothing$，$B \subset 5B'$。证毕。 □

定理 6.22. 设 $\mathscr{F}$ 为 $E \subset \mathbb{R}^n$ 的由闭球组成的细覆盖，且 $\sup\{r(B) : B \in \mathscr{F}\} < \infty$。则存在两两不交的闭球构成的可数子族 $\{B_k\} \subset \mathscr{F}$，使得

$$m^* \left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = 0. \tag{6.2}$$

证明. 设 $\{B_k\}$ 为推论6.21中决定的 $\mathscr{G}$，则

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{j} B_k \subset \bigcup_{k \geqslant j+1} 5B_k.$$

若 E 有界，则 $F = \bigcup_{k \geqslant 1} B_k$ 有界，且

$$m^* \left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{j} B_k \right) \leqslant \sum_{k \geqslant j+1} 5^n m(B_k) \leqslant 5^n m^*(F) < \infty.$$

因为 $\lim_{j\to\infty} \sum_{k \geqslant j+1} 5^n m(B_k) = 0$，故任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得若 $j > N$，

$$m^* \left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) \leqslant m^* \left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{j} B_k \right) < \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性，故(6.2)成立。若 E 无界，将上面的讨论运用于 $E \cap (B(0,j) \setminus B(0,j-1))$，并利用 m^* 的次可加性。 □

如果要研究 $\mathbb{R}^n$ 上一般的 Radon 测度的微分性质，需要下面的

定理 6.23 (Besicovitch 覆盖定理)**.** *设 $\mathscr{F}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中（非退化）闭球族，且 $\sup\{r(B) : B \in \mathscr{F}\} < \infty$。$E \subset \mathbb{R}^n$ 为 $\mathscr{F}$ 覆盖，且任给 $x \in E$ 存在 $\mathscr{F}$ 中以 x 为中心的闭球。则存在 $N = N(n)$，即有限族 $\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_N \subset \mathscr{F}$。每一 $\mathscr{G}_j$ 均为两两不交的闭球构成的可数族，并且*

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{N} \bigcup_{B \in \mathscr{G}_j} B.$$

证明. 参见 [10]。 □

为了解释如何使用 Besicovitch 覆盖定理，我们来看定理6.22一个推广。

定理 6.24. *假设 μ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Radon 测度。$\mathscr{F}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中（非退化）闭球族，且 $\sup\{r(B) : B \in \mathscr{F}\} < \infty$，$A$ 为 $\mathscr{F}$ 中闭球的中心组成的集合。若 $\mu^*(A) < \infty$（这里 μ^* 为 μ 决定的外测度）且 $\mathscr{F}$ 为 A 的细覆盖。则任给开集 $U \subset \mathbb{R}^n$，存在 $\mathscr{F}$ 的两两不交可数闭球构成的子集族 $\{B_k\}$，使得 $\bigcup_{k \geqslant 1} B_k \subset U$，且*

$$\mu^* \left((A \cap U) \setminus \bigcup_{k \geqslant 1} B_k \right) = 0.$$

证明. 设 $N(n)$ 由 Besicovitch 覆盖定理决定。固定 $1 - \frac{1}{N(n)} < \theta < 1$。我们首先断言：*存在有限的 $\{B_1, \ldots, B_{M_1}\} \subset \mathscr{F}$，每一 B_k 均包含于 U，使得*

$$\mu^* \left((A \cap U) \setminus \bigcup_{k=1}^{M_1} B_k \right) \leqslant \theta \mu^*(A \cap U). \tag{6.3}$$

设 $\mathscr{F}_1=\{B\in\mathscr{F}:r(B)<1,B\subset U\}$。由 Besicovitch 覆盖定理，存在 $\mathscr{F}_1$ 中有限的族 $\mathscr{G}_1,\dots,G_{N(n)}$，每一 $\mathscr{G}_k$ 均由两两不交的可数闭球构成，使得

$$A\cap U\subset\bigcup_{k=1}^{N(n)}\bigcup_{B\in\mathscr{G}_k}B.$$

因此

$$\mu^*(A\cap U)\leqslant\sum_{k=1}^{N(n)}\mu^*\left(A\cap U\cap\bigcup_{B\in\mathscr{G}_k}B\right).$$

由鸽笼原理，存在 $1\leqslant j\leqslant N(n)$，使得

$$\mu^*\left(A\cap U\cap\bigcup_{B\in\mathscr{G}_j}B\right)\geqslant\frac{1}{N(n)}\mu^*(A\cap U).$$

由外测度的极限性质（见思考题），则存在 $\{B_1,\dots,B_{M_1}\}\subset\mathscr{G}_j$，使得

$$\mu^*\left(A\cap U\cap\bigcup_{k=1}^{M_1}B_k\right)\geqslant(1-\theta)\mu^*(A\cap U).$$

因为 $\bigcup_{k=1}^{M_1}B_k$ 可测，则由 Carathéodory 判据

$$\mu^*(A\cap U)=\mu^*(A\cap U\cap\bigcup_{k=1}^{M_1}B_k)+\mu^*(A\cap U\cap(\bigcup_{k=1}^{M_1}B_k)^c)$$

比较上面两个式子，这就证明了(6.3)和前面的断言。

下面我们采用归纳法。设 $U_2=U\setminus\bigcup_{k=1}^{M_1}B_k$，$\mathscr{F}_2=\{B\in\mathscr{F}:r(B)<1,B\subset U_2\}$。由前面的断言，存在有限个球 $B_{M_1+1},\dots,B_{M_2}\in\mathscr{F}_2$，使得

$$\begin{aligned}\mu^*\left((A\cap U)\setminus\bigcup_{k=1}^{M_2}B_k\right)&=\mu^*\left((A\cap U_2)\setminus\bigcup_{k=M_1+1}^{M_2}B_k\right)\\&\leqslant\theta\mu^*(A\cap U_2)\\&\leqslant\theta^2\mu^*(A\cap U).\end{aligned}$$

继续这个过程，则存在 $\mathscr{F}$ 中包含于 U 的可数比球列，使得

$$\mu^*\left((A\cap U)\setminus\bigcup_{k=1}^{M_j}B_k\right)\leqslant\theta^j\mu^*(A\cap U).$$

因为 $\mu^*(A)<\infty$，$\theta<1$。由 j 的任意性，定理得证。 □

思考题：设 μ 为局部紧 Hausdorff 空间 X 上 Radon 测度，μ^* 为注4.18给出的外测度。证明 μ^* 满足单调递增集合列的极限性质：任给 X 中单调递增子集列 $\{E_k\}$，$E=\bigcup_{k\geqslant1}E_k$，则 $\lim_{k\to\infty}\mu^*(E_k)=\mu^*(E)$。

6.2 坐标变换公式

6.2.1 Sard 引理

定义 6.25. 设 $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$。$\Phi$ 称作**在 $x \in \mathbb{R}^n$ 处可微**若任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得若 $|y - x| \leqslant \delta$，则

$$|\Phi(y) - \Phi(x) - T(y - x)| \leqslant \varepsilon |y - x|,$$

其中 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为一线性变换。我们记 $T = \Phi'(x)$。$J(x) = \det(\Phi'(x))$ 称作 **Φ 在 x 处的 Jacobi 行列式**。

引理 6.26. 设 $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 在 x 处可微。则任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对 $0 < r \leqslant \delta$，

$$m^*(\Phi(B(x, r))) \leqslant (J(x) + \varepsilon) m(B(x, r)).$$

证明. 由 Lebesgue 测度的平移不变性，不妨设 $x = 0$，$\Phi(0) = 0$。由 Φ 在 0 处的可微性，则任给 $\varepsilon_1 > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得若 $|y| < \delta$，

$$|\Phi(y) - T(y)| \leqslant \varepsilon_1 |y|.$$

我们分两种情况讨论，即 $T = \Phi'(x)$ 是否可逆。

情形 I: T 不可逆。

此情形下 $J(0) = 0$。$T(\mathbb{R}^n)$ 包含于 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的某 $(n-1)$-维线性子空间 M 中，并且存在 $c > 0$ 使得

$$|T(y)| \leqslant c|y|, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

故任给 $y \in B(0, r)$，$T(y) \in B(x, cr)$。因此，若 $r < \delta$，$\Phi(B(0, r))$ 包含于 M 中一半径为 cr 的球（在 $\mathbb{R}^n$ 中）的 $\varepsilon_1 r$-邻域中。从而

$$m^*(\Phi(B(0, r))) \leqslant [2(cr + \varepsilon_1 r)]^{n-1} \cdot 2\varepsilon_1 r = 2^n (c + \varepsilon_1)^{n-1} \varepsilon_1 r^n.$$

取 ε_1 充分小使得 $2^n (c + \varepsilon_1)^{n-1} \varepsilon_1 / \omega_n < \varepsilon$（$\omega_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球体积），得证。

情形 II: T 可逆。

此情形存在逆映射 T^{-1} 且存在 $C > 0$，使得

$$|T^{-1}(z)| \leqslant C|z|, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

故

$$|T^{-1}(\Phi(y)) - y| = |T^{-1}(\Phi(y) - T(y))| \leqslant C\varepsilon_1 |y|, \quad |y| \leqslant \delta.$$

从而

$$|T^{-1}(\Phi(y))| \leqslant (1+C\varepsilon_1)|y|, \quad |y| \leqslant \delta.$$

这表明对 $0<r\leqslant\delta$，$T^{-1}(\Phi(B(0,r)))\subset B(0,(1+C\varepsilon_1))$。因此

$$m^*(T^{-1}(\Phi(B(0,r)))) \leqslant (1+C\varepsilon_1)^n m(B(0,r)).$$

再由 Lebesgue 外测度在线性变换下的变换公式，

$$\begin{aligned} m^*(\Phi(B(0,r))) &= |\det(T)| m^*(T^{-1}(\Phi(B(0,r)))) \\ &\leqslant |\det(T)|(1+C\varepsilon_1)^n m(B(0,r)). \end{aligned}$$

取 ε_1 充分小使得 $|\det(T)|(1+C\varepsilon_1)^n \leqslant |\det(T)|+\varepsilon$，得证。 □

引理 6.27. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为开集，$\Phi:\Omega\to\mathbb{R}^n$，$E\subset\Omega$ 且 Φ 在 E 中每一点可微。假设存在常数 $0\leqslant M<\infty$ 使得 $|J(x)|\leqslant M$，$x\in E$，则

$$m^*(\Phi(E)) \leqslant M\cdot m^*(E).$$

证明. 首先假设 E 有界，否则对 $E_k=E\cap B(0,k)$ 考虑，再利用外测度的次可加性即可。

任给 $\varepsilon>0$，存在开集 G，$E\subset G\subset\Omega$，使得 $m(G)<m^*(E)+\varepsilon$。由引理6.26，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(x)>0$，使得若 $0<r\leqslant\delta(x)$，$B(x,r)\subset G$ 且

$$m^*(\Phi(B(x,r))) \leqslant (M+\varepsilon)m(B(x,r)). \tag{6.4}$$

设 $\mathscr{F}=\{\overline{B(x,r)}: x\in E, 0<r<\delta(x)/5\}$，则 $\mathscr{F}$ 为 E 的细覆盖。由推论6.21，存在两两不交的可数闭球族 $\{B_j\}$ 使得，任给 $k\in\mathbb{N}$，

$$E\subset\left(\bigcup_{j=1}^{k}B_j\right)\cup\left(\bigcup_{j=k+1}^{\infty}5B_j\right)$$

因此

$$m^*(\Phi(E)) \leqslant \sum_{j=1}^{k} m^*(\Phi(B_j)) + \sum_{j=k+1}^{\infty} m^*(\Phi(5B_j)).$$

因为 $m(\partial B_j)=0$，故(6.4)中的开球可用闭球替代。从而

$$\begin{aligned} m^*(\Phi(E)) &\leqslant \sum_{j=1}^{k}(M+\varepsilon)m(B_j) + \sum_{j=k+1}^{\infty}(M+\varepsilon)m(5B_j) \\ &= (M+\varepsilon)\sum_{j=1}^{k} m(B_j) + 5^n(M+\varepsilon)\sum_{j=k+1}^{\infty} m(B_j). \end{aligned}$$

由于 $\sum_{j\geqslant 1} m(B_j)\leqslant m(G)<\infty$，故当 $k\to\infty$ 时得到

$$m^*(\Phi(E))\leqslant (M+\varepsilon)m(G)<(M+\varepsilon)(m^*(E)+\varepsilon).$$

由 ε 的任意性，得证。 □

下面的结论是立刻可以得到的。

推论 6.28 (Sard 引理)**.** 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 开，$\Phi:\Omega\to\mathbb{R}^n$。$E\subset\Omega$，$\Phi$ 在 E 中每一点可微，且 $J(x)\equiv 0$。则 $\Phi(E)$ 为零测集。

注 6.29. 引理6.28历史上称作 Sard 引理。回忆假设 $\Phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 可微，我们称 $x\in\mathbb{R}^m$ 为 Φ 的**临界点**若 $J(x)=0$。集合 $\{\Phi(x):x\in\mathbb{R}^m$ 为 Φ 的临界点$\}$ 中元称作 Φ 的**临界值**。若 $\mathbb{R}^n$ 中元若非 Φ 的临界值，则称之为 Φ 的**正则值**。Sard 引理说：$\Phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 的临界值为零测集。

更一般的结论是所谓的 Morse-Sard 定理（[14]）：设 $\Phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 为 C^r 映射，若 $r>\max\{0,m-n\}$，则 Φ 的临界值为 $\mathbb{R}^n$ 中的零测集。Φ 的正则值为剩余集，从而稠密。

引理 6.30. 设 $\Phi=(\Phi_1,\dots,\Phi_n)$，每一 $\Phi_i:\Omega\to\mathbb{R}$ 均可测。设 $E\subset\Omega$ 可测且 Φ 在 E 中每一点可微。则 J 在 E 上可测。

证明. 我们可以定义 $\Phi|_{\Omega^c}\equiv 0$，从而将 Φ 看成定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的可测映射。由于 $J(x)=\det(\Phi'(x))$ 为 $\{\frac{\partial\Phi_i(x)}{\partial x_j}\}$ 的代数组合，我们只需证明每一 $\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j}$ 均可测。而对任给 $x\in E$，

$$\frac{\partial\Phi_i(x)}{\partial x_j}=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi_i(x+he_j)-\Phi(x)}{h}.$$

因此 $\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_j}$ 为可测函数的极限函数，从而可测。 □

下面的定理可以看成一种推广的 Sard 引理。

定理 6.31. 设 Φ 在 Ω 上可测，$E\subset\Omega$ 可测，且 Φ 在 E 上可微。则

$$m^*(\Phi(E))\leqslant\int_E |J(x)|\,dx.$$

证明. 首先假设 $m(E)<\infty$。任给 $\varepsilon>0$，定义

$$E_k=\{x\in E:(k-1)\varepsilon\leqslant|J(x)|<k\varepsilon\},\quad k\in\mathbb{N}.$$

由引理6.27，$m^*(\Phi(E_k)) \leqslant k\varepsilon m(E_k)$。因此

$$\begin{aligned}
m^*(\Phi(E)) \leqslant m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\Phi(E_k)\right) &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m^*(\Phi(E_k)) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k\varepsilon m(E_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\varepsilon m(E_k) + \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}|J(x)|\,dx + \varepsilon m(E) \\
&\leqslant \int_E |J(x)|\,dx + \varepsilon m(E).
\end{aligned}$$

由于 $m(E) < \infty$，ε 任意，故得证。

若 $m(E) = \infty$。选取可测集列 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，$m(A_k) < \infty$（$k \in \mathbb{N}$），且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = E$。由外测度的极限性质，

$$m^*(\Phi(E)) = \lim_{k\to\infty} m^*(\Phi(A_k)) \leqslant \lim_{k\to\infty}\int_{A_k}|J(x)|\,dx = \int_E |J(x)|\,dx.$$

这就完成了证明。 □

推论 6.32. *在定理6.31相同条件下，若 $E \subset \Omega$ 为零测集，则 $\Phi(E)$ 为零测集。*

推论 6.33. *在定理6.31相同条件下，若 $E \subset \Omega$ 可测，则 $\Phi(E)$ 可测。*

证明. 由 Lebesgue 测度的构造，存在单调递增的紧集列 $\{K_j\}$，$K_j \subset E$（$j \in \mathbb{N}$），和零测集 N，使得

$$E = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j\right) \cup N.$$

因为 Φ 在 E 上连续，故每一 $\Phi(K_j)$ 均为紧集。由推论6.32，$\Phi(N)$ 为零测集。故

$$\Phi(E) = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\Phi(K_j)\right) \cup \Phi(N)$$

可测。 □

推论 6.34. *若 Φ 在 Ω 上可微，$E \subset \Omega$ 可测，则 $\Phi(E)$ 可测且*

$$m(\Phi(E)) \leqslant \int_E |J(x)|\,dx.$$

6.2.2 C^1 微分同胚下的坐标变换公式

引理 6.35. *设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集且 $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ 可微，$f \geqslant 0$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel 可测函数。则 $f \circ \Phi$ 为 Borel 可测，且*

$$\int_{\Phi(\Omega)} f(y)\,dy \leqslant \int_{\Omega} f\circ\Phi(x)\cdot|J(x)|\,dx.$$

证明. 首先假设 $f=\mathbf{1}_B$，$B\subset\mathbb{R}^n$ 为 Borel 集，则 $f\circ\Phi=\mathbf{1}_{\Phi^{-1}(B)}$。因为 Φ 连续，$\Phi^{-1}(B)$ 为 Borel 集，因此 $\mathbf{1}_B\circ\Phi$ 为 Borel 可测。

对 $E=\Phi^{-1}(B)$，则 $\Phi(E)=\Phi(\Omega)\cap B$。故

$$\begin{aligned}
& m(\Phi(\Omega)\cap B)\leqslant\int_{\Phi^{-1}(B)}|J(x)|\,dx\\
\iff\quad & \int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{\Phi(\Omega)\cap B}(y)\,dy\leqslant\int_\Omega\mathbf{1}_{\Phi^{-1}(B)}(x)|J(x)|\,dx\\
\iff\quad & \int_{\Phi(\Omega)}\mathbf{1}_B(y)\,dy\leqslant\int_\Omega\mathbf{1}_B\circ\Phi(x)|J(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

这表明定理对 $f=\mathbf{1}_B$ 成立。

若 $f\geqslant 0$ 为 Borel 可测，则定理由单调收敛定理得到。 □

定义 6.36. 设 $\Omega_1,\Omega_2\subset\mathbb{R}^n$ 为开集，$\Phi:\Omega_1\to\Omega_2$ 称作 C^1 **微分同胚**若 Φ 在 Ω_1 上可微，Φ 为一双射，且 Φ 的逆映射 Φ^{-1} 在 Ω_2 上可微。

定理 6.37. *假设 $\Omega_1,\Omega_2\subset\mathbb{R}^n$ 为开集，$\Phi:\Omega_1\to\Omega_2$ 为一 C^1 微分同胚。若 f 为 Ω_2 上的可测函数，则 $f\circ\Phi$ 为 Ω_1 上的可测函数，且*

$$\int_{\Omega_2}f(y)\,dy=\int_\Omega f\circ\Phi(x)\cdot|J(x)|\,dx.$$

若 $f\geqslant 0$，无需额外条件。一般，$f\in L^1(\Omega_2)$ 当且仅当 $f\circ\Phi\cdot|J|\in L^1(\Omega_1)$。

证明. 假设 $f\geqslant 0$ 为 Borel 可测。由引理6.35，

$$\int_{\Omega_2}f(y)\,dy\leqslant\int_{\Omega_1}f\circ\Phi(x)\cdot|J(x)|\,dx.$$

将 Φ^{-1} 运用引理6.35于任意非负 Borel 可测函数 g，

$$\int_{\Omega_1}g(x)\,dx\leqslant\int_{\Omega_2}g\circ\Phi^{-1}(y)\cdot|\tilde{J}(y)|\,dy,$$

其中 $\tilde{J}$ 为 Φ^{-1} 的 Jacobi 行列式。对恒等式 $\Phi(\Phi^{-1}(y))=y$ 两边求导，则 $\Phi'(\Phi^{-1}(y))\circ(\Phi^{-1})'(y)=\mathrm{id}$（id 为恒等映射）。故

$$\tilde{J}(y)=\det((\Phi^{-1})'(y))=\frac{1}{\det(\Phi'(\Phi^{-1}(y)))}=\frac{1}{J(\Phi^{-1}(y))}.$$

取 $g=f\circ\Phi\cdot|J|$，则

$$g\circ\Phi^{-1}(y)\cdot|\tilde{J}(y)|=f(y)\cdot|J(\Phi^{-1}(y))|\cdot|\tilde{J}(y)|=f(y).$$

故

$$\int_{\Omega_1}f\circ\Phi(x)\cdot|J(x)|\,dx\leqslant\int_{\Omega_2}f(y)\,dy.$$

因此定理成立。

若 f 仅为 Lebesgue 可测，则存在 Borel 可测函数 f_1，使得 $f=f_1$，a.e.。即存在零测集 $N\subset\Omega_2$，使得若 $y\in N^c$，则 $f(y)=f_1(y)$。因此

$$f\circ\Phi(x)=f_1\circ\Phi(x),\quad x\in\Phi^{-1}(N^c).$$

由推论6.32，$\Phi^{-1}(N)$ 为零测集。故 $f\circ\Phi=f_1\circ\Phi$，a.e.。故定理对所有非负 Lebesgue 可测函数 f 成立。

最后对一般 $f\in L^1(\Omega_2)$，$f=f^+-f^-$，对 $f^\pm$ 运用上面的结论得证。 □

第七章　$\mathbb{R}^1$ 上函数的微分

7.1　单调函数

7.1.1　单调函数的可微性

为了研究单调函数的可微性，我们有必要引入 **Dini 导数**（[7]）。设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，$x\in[a,b]$，定义

$$\begin{aligned} D_{\pm}f(x) &= \liminf_{h\to 0\pm}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \\ D^{\pm}f(x) &= \limsup_{h\to 0\pm}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

上面定义了 f 在 x 处的四个 Dini 导数 $D_+f(x)$, $D_-f(x)$, $D^+f(x)$ 和 $D^-f(x)$。如果 f 在 x 处可微，则这四个 Dini 导数相等且等于 $f'(x)$。

思考题：证明 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 x 处可微当且仅当 $D_+f(x)=D_-f(x)=D^+f(x)=D^-f(x)<\infty$。

为了方便我们定义

$$\begin{aligned} Df(x) &= \max\{D^+f(x), D^-f(x)\} \\ df(x) &= \max\{D_+f(x), D_-f(x)\}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

思考题：证明

$$\begin{aligned} Df(x) &= \limsup_{\delta\to 0}\left\{\frac{f(z)-f(y)}{z-y}: a\leqslant y\leqslant x\leqslant z\leqslant b,\ 0<z-y<\delta\right\}, \\ df(x) &= \liminf_{\delta\to 0}\left\{\frac{f(z)-f(y)}{z-y}: a\leqslant y\leqslant x\leqslant z\leqslant b,\ 0<z-y<\delta\right\}. \end{aligned}$$

为了研究单调函数的可微性，我们从下面的例子开始。

例 7.1. 我们知道, $(0,1)$ 中的二进有理数是指形如 $(2k-1)/2^n$, $k=1,2,\ldots,2^{n-1}$,

的有理数。定义 $(0,1)$ 上的函数

$$g(x)=\sum_{0<\frac{2k-1}{2^n}\leqslant x}2^{-2n}.$$

容易验证 g 严格单调递增，且 $0<g<1/2$，$g(0+)=0$，$g(1-)=1/2$。下面我们来计算 g 的右导数。

任给 $x\in(0,1)$，$N\in\mathbb{N}$，存在 $\delta>0$ 使得 $(x,x+\delta)$ 中无以 $1,2,4,\ldots,2^N$ 为分母的二进有理数。对 $0<h<\delta$，

$$g(x+h)-g(x)=\sum_{x<\frac{2k-1}{2^n}\leqslant x+h}2^{-2n}.$$

对固定的 n，上面的不等式满足

$$2^{n-1}x+\frac{1}{2}<k\leqslant 2^{n-1}x+2^{n-1}h+\frac{1}{2}. \tag{7.3}$$

设 $a=2^{n-1}x+\frac{1}{2}$，$b=2^{n-1}h$，并记 $N(a,b)$ 为 $(a,a+b]$ 中的整点个数，则

$$N(a,b)=\lfloor a+b\rfloor-\lfloor a\rfloor=\lfloor\{a\}+\{b\}\rfloor+\lfloor b\rfloor.$$

这儿我们记 $\lfloor a\rfloor$ 和 $\{a\}$ 分别表示实数 a 的整数部分和小数部分。我们断言*存在常数 $C_1(a)>0$ 使得 $N(a,b)\leqslant C_1(a)b$*。事实上，不妨设 $\{a\}\neq 0$ 且 $\{a\}+\{b\}\geqslant 1$（否则易证 $N(a,b)\leqslant b$）。此时，

$$N(a,b)=\lfloor b\rfloor+1\leqslant\lfloor b\rfloor+\frac{\{b\}}{1-\{a\}}\leqslant\frac{b}{1-\{a\}}.$$

故存在 $C_2(x)>0$ 使得满足(7.3)的 k 不超过 $C_2(x)2^{n-1}h$。因此，若 $0<h<\delta$，

$$g(x+h)-g(x)\leqslant\sum_{n>N}C_2(x)\cdot 2^{n-1}h\cdot 2^{-2n}=C_2(x)\cdot h\cdot 2^{-N-1}.$$

故若 $h\in(0,\delta)$，

$$0\leqslant\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\leqslant C_2(x)\cdot 2^{-N-1}.$$

由 N 的任意性，$g'(x+)=0$。 \\\\

思考题：证明若 $x\in(0,1)$ 不为二进有理数，则 $g'(x-)=0$，从而 g 几乎处处可微，且 $g'(x)=0$，a.e.。

定理 7.2. （Lebesgue） *若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调，则 f 几乎处处可微。*

证明. 不妨设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调递增，我们将整个证明分成几步：

(I) 由定义

$$
\begin{aligned}
Df(x) &= \limsup_{\delta\to 0}\left\{\frac{f(z)-f(y)}{z-y} : a\leqslant y\leqslant x\leqslant z\leqslant b,\ 0<z-y<\delta\right\},\\
df(x) &= \liminf_{\delta\to 0}\left\{\frac{f(z)-f(y)}{z-y} : a\leqslant y\leqslant x\leqslant z\leqslant b,\ 0<z-y<\delta\right\}.
\end{aligned}
$$

显然

$$0\leqslant df(x)\leqslant Df(x)\leqslant\infty.$$

我们必须证明对几乎所有的 $x\in[a,b]$，

$$df(x)=Df(x)<\infty \tag{7.4}$$

(II) 显然

$$\{x: Df(x)=\infty\}=\bigcap_{k\geqslant 1}\{x: Df(x)>k\},$$

且

$$\{x: df(x)<Df(x)\}=\bigcup_{s<t,s,t\in\mathbb{Q}}\{x: df(x)<s<t<Df(x)\}.$$

为此，对固定的 $k>0$ 及 $0<s<t<\infty$，设

$$
\begin{aligned}
E &= \{x: Df(x)>k\},\\
F &= \{x: df(x)<s<t<Df(x)\}.
\end{aligned}
$$

我们将证明存在常数 $C>0$ 使得

$$m^*(E)\leqslant C/k,\quad m^*(F)=0.$$

(III) 我们先来估计 $m^*(E)$。任给 $x\in E$，存在小区间 $[y,z]$ 使得 $x\in[y,z]\subset[a,b]$，

$$\frac{f(z)-f(y)}{z-y}>k.$$

为方便起见，记

$$\widetilde{[y,z]}=(f(y),f(z)),$$

则 $m(\widetilde{[y,z]})>km([y,z])$。可以看出，$\{I_x\}$，$T_x=[y,z]$，构成了 E 的一个细覆盖。由定理6.22，存在两两互不相交的闭区间列 $\{I_\alpha\}$，

$$m(\widetilde{I_\alpha})>km(I_\alpha),\quad \alpha=1,2,\ldots,$$

且

$$E \subset \bigcup_{\alpha \geqslant 1} I_\alpha. \quad \text{(除去一个零测集)}$$

因此

$$m^*(E) \leqslant \sum_{\alpha \geqslant 1} m(I_\alpha) < \frac{1}{k} \sum_{\alpha \geqslant 1} m(\widetilde{I}_\alpha).$$

因为 $\{I_\alpha\}$ 两两互不相交，f 单调递增，故（开区间）$\{\widetilde{I}_\alpha\}$ 亦两两互不相交。所以

$$\begin{aligned} m^*(E) &\leqslant \frac{1}{k} m(\cup_{\alpha \geqslant 1} \widetilde{I}_\alpha) \leqslant \frac{1}{k} m((f(a), f(b))) \\ &\leqslant \frac{1}{k}(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

(IV) $m^*(F)$ 的估计要困难一些。首先，任给 $\varepsilon > 0$，存在开集 $G \supset F$ 使得

$$m(G) < m^*(F) + \varepsilon.$$

我们将运用两次 Vitali 覆盖定理。

1. 任给 $x \in F$，存在闭区间 $[y, z]$，$x \in [y, z] \subset G \cap [a, b]$，

   $$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} < s.$$

   与上面类似，存在两两互不相交的闭区间列 $\{I_\alpha\}$，使得

   $$F \subset \bigcup_{\alpha \geqslant 1} I_\alpha. \quad \text{(除去一个零测集)}$$

   从而

   $$\begin{aligned} m(\cup_{\alpha \geqslant 1} \widetilde{I}_\alpha) &= \sum_{\alpha \geqslant 1} m(\widetilde{I}_\alpha) < \sum_{\alpha \geqslant 1} s m(I_\alpha) \\ &= s m(\cup_{\alpha \geqslant 1} I_\alpha) \leqslant s m(G) \\ &\leqslant s(m^*(F) + \varepsilon) \end{aligned}$$

2. 注意到

   $$F \subset \bigcup_{\alpha \geqslant 1} I_\alpha^\circ. \quad \text{(除去一个零测集)}$$

   任给 $x \in F \cap (\cup_{\alpha \geqslant 1} I_\alpha^\circ)$，类似，存在闭区间 $[y, z]$ 使得 $x \in [y, z]$，

   $$\frac{f(z) - f(y)}{z - y} > t.$$

与前面类似，存在两两互不相交的闭区间列 $\{J_{beta}\}$，

$$F\cap(\bigcup_{\alpha\geqslant 1}I_\alpha^\circ)\subset\bigcup_{\beta\geqslant 1}J_\beta.\text{（除去一个零测集）}$$

注意到每一 J_β 均含于某 I_α，则

$$\begin{aligned}m^*(F)&\leqslant\sum_{\beta\geqslant 1}m(J_\beta)<\frac{1}{t}\sum_{\beta\geqslant 1}m(\widetilde{J_\beta})\\&=\frac{1}{t}m(\cup_{\beta\geqslant 1}\widetilde{J_\beta})\leqslant\frac{1}{t}m(\cup_{\alpha\geqslant 1}\widetilde{I_\alpha})\\&\leqslant\frac{1}{t}\cdot s(m^*(F)+\varepsilon).\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，我们有

$$m^*(F)\leqslant\frac{s}{t}m^*(F).$$

而 $s/t<1$，这表明 $m^*(F)=0$。

(V) $m^*(F)=0$ 表明 $\{x:df(x)<Df(x)\}$ 为零测集。而 $m^*(E)\leqslant C/k$ 表明 $\{x:Df(x)=\infty\}$ 为零测集。因此(7.4)成立。 □

思考题：证明单调递增函数 f 在 x 处可微当且仅当(7.4)成立。

定理 7.3. 设 $N\subset\mathbb{R}$ 为零测集，则存在连续单调递增函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得任给 $x\in N$，$f'(x)=\infty$。

证明. 由于 $m^*(N)=0$，故对任给 $k\in\mathbb{N}$，存在开集 $G_k\supset N$，$m(G_k)\leqslant 2^{-k}$。设

$$f_k(x)=\int_{-\infty}^{x}\chi_{G_k}(t)\,dt,$$

则 f_k 连续单调递增，且 $0\leqslant f_k(x)\leqslant 2^{-k}$。定义

$$f(x)=\sum_{k\geqslant 1}f_k(x),$$

则 f 连续单调递增。

任给 $x\in N$，$m\in\mathbb{N}$，x 包含于开集 $\cap_{k=1}^m G_k$。故存在 $\delta>0$ 使得 $[x-\delta,x+\delta]\subset\cap_{k=1}^m G_k$。当 $x-\delta\leqslant y\leqslant x\leqslant z\leqslant x+\delta$，$z-y>0$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(y)}{z-y}&=\sum_{k\geqslant 1}\frac{f_k(z)-f_k(y)}{z-y}\geqslant\sum_{k=1}^m\frac{f_k(z)-f_k(y)}{z-y}\\&=\sum_{k=1}^m\frac{1}{z-y}\int_y^z\chi_{G_k}(t)\,dt\\&=\sum_{k=1}^m\frac{z-y}{z-y}=m.\end{aligned}$$

由 m 的任意性，$f'(x)=\infty$。 □

定理 7.4. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调递增，则 f' 可积且

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b)-f(a). \tag{7.5}$$

证明. 为方便起见，对 $x>b$，定义 $f(x)=f(b)$。由 Lebesgue 定理7.2，$f'(x)$ 对几乎所有的 $x\in[a,b]$ 存在，故对几乎所有的 x，

$$f'(x)=\lim_{k\to\infty}k(f(x+1/k)-f(x)).$$

因此有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b k(f(x+1/k)-f(x))\,dx\\
=&k\int_{a+1/k}^{b+1/k}f(x)\,dx-k\int_a^b f(x)\,dx\\
=&k\int_b^{b+1/k}f(x)\,dx-k\int_a^{a+1/k}f(x)\,dx\\
=&f(b)-k\int_a^{a+1/k}f(x)\,dx\\
\leqslant&f(b)-f(a).
\end{aligned}$$

(7.5)由 Fatou 引理得到。 □

注 7.5. 若定理7.4中的 f 不连续，则(7.5)中的不等号严格成立。这是因为 f 在不连续点（跳跃点）上的变化不会被 f' 反映出来。即使 f 连续，比如 f 为 Lebesgue-Cantor 函数，(7.5)中的不等号依然严格成立。什么时候不等号可以换成等号（也就是微积分基本定理）成立的问题我们将在后面继续讨论。

思考题：证明对 Lebesgue-Cantor 函数 f，若 x 为 Cantor 三分集 C 上的点，$f'(x)=\infty$。

7.1.2 单调函数的结构

我们接下来考虑单调函数的不连续点。

定义 7.6. **基本递增跳跃函数**$\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是指一个具有以下形式的函数：

$$\sigma(x)=\begin{cases}A, & x<t;\\ B, & x=t;\\ C, & x>t.\end{cases}$$

由于 σ 单调递增，故 $A\leqslant B\leqslant C$，我们假设 $A<C$。

定义 7.7. 设 $I\subset\mathbb{R}$ 为开区间，$s:I\to\mathbb{R}$ 称作**递增跳跃函数**若存在基本递增跳跃函数 $\sigma_1,\sigma_2,\ldots$，使得

$$s(x)=\sum_{k\geqslant 1}\sigma_k(x),\quad x\in I.$$

设 f 为 I 上的单调递增函数，$t\in I$ 为 f 的不连续点，则定义基本递增跳跃函数

$$\sigma(x)=\begin{cases} f(t-), & x<t;\\ f(t), & x=t;\\ f(t+), & x>t.\end{cases}$$

注意 $f-\sigma$ 为单调递增函数且在 t 处连续。我们知道单调函数 f 的不连续点至多可数，记作 $t_1,t_2,\ldots$。任给 $k\in\mathbb{N}$，设 σ_k 为由 t_k 决定的基本递增跳跃函数。

任意选取一个参考点 $x_0\in I$，任给 $n\in\mathbb{N}$，定义

$$f_n(x)=f(x)-\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k(x)-\sigma_k(x_0)),\quad x\in I.$$

1) f_n 为 I 上的单调递增函数。设 $x<x'$，若无 $x\leqslant t_k<x'$，则对任意 k，$\sigma_k(x)=\sigma_k(x')$。因此 $f_n(x')-f_n(x)=f(x')-f(x)\geqslant 0$。若存在唯一的 $x\leqslant t_{k_0}<x'$，则对 $k\neq k_0$，$\sigma_k(x)=\sigma_k(x')=0$，故 $f_n(x')-f_n(x)=f(x')-f(x)-(\sigma_{k_0}(x')-\sigma_{k_0}(x))=f(x')-f(x)-(f(t_{k_0}+)-f(t_{k_0}-))\geqslant 0$。若存在 $x\leqslant t_{k_1}<\cdots<t_{k_m}<x'$，存在 $t_{k_i}<x_i<t_{k_{i+1}}$ $(i=1,\ldots,m-1)$，则 $f_n(x_{i+1})\geqslant f_n(x_i)$。一般情形，易得。

2) 级数 $s(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k(x)-\sigma_k(x_0))$，$x\in I$，收敛。若 $x_0<x$，则 $f_n(x_0)\leqslant f_n(x)$，由 $f_n(x_0)=f(x_0)$，我们有

$$f(x_0)\leqslant f(x)-\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k(x)-\sigma_k(x_0)),$$

即

$$\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k(x)-\sigma_k(x_0))\leqslant f(x)-f(x_0).$$

因为 $\sigma_k(x)-\sigma_k(x_0)\geqslant 0$，故

$$0\leqslant s(x)\leqslant f(x)-f(x_0),\quad x\in I,\ x_0<x.$$

类似可证明

$$0\geqslant s(x)\geqslant f(x)-f(x_0),\quad x\in I,\ x_0>x.$$

这表明 s 收敛。

3) *s 为单调递增跳跃函数，$\phi = f - s$ 为单调递增连续函数。*s 与 ϕ 单调递增是因为它们均为单调递增函数的极限函数（注意 $\phi(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$）。下面证明 ϕ 连续。任给 $x \in I$，$y < x < z$，$y, z \in I$，$\phi(y) \leqslant \phi(z)$，故

$$f(y) - s(y) \leqslant f(z) - s(z),$$

即

$$s(z) - s(y) \leqslant f(z) - f(y).$$

令 $y \nearrow x$，$z \searrow x$，

$$s(x+) - s(x-) \leqslant f(x+) - f(x-). \tag{7.6}$$

下面我们证明

$$s(z) - s(y) \geqslant f(x+) - f(x-). \tag{7.7}$$

若 f 在 x 处连续，(7.7)平凡。不然，对某 $m \in \mathbb{N}$，$x = t_m$。因此 $y < t_m < z$，从而

$$s(z) - s(y) = \sum_{k\geqslant 1}(\sigma_k(z) - \sigma_k(y)) \geqslant \sigma_m(z) - \sigma_m(y) = f(x+) - f(x-).$$

这就证明了(7.7)。在(7.7)中令 $y \nearrow x$，$z \searrow x$，则

$$s(x+) - s(x-) \geqslant f(x+) - f(x-).$$

结合(7.6)，则有 $s(x+) - s(x-) = f(x+) - f(x-)$，即 $\phi(x+) = \phi(x-)$，从而 ϕ 在 x 处连续。

事实上我们证明了

定理 7.8. **（单调函数结构定理 I）** *设 $I \subset \mathbb{R}$ 为开区间，$f : I \to \mathbb{R}$ 单调递增，设 s 为 f 决定的递增跳跃函数，则*

$$f(x) = \phi(x) + s(x), \quad x \in I, \tag{7.8}$$

其中 ϕ 为一连续单调递增函数。

思考题：证明定理7.8对 I 为紧区间亦成立。并且(7.8)中的分解在下面意义下唯一：设 $f = \phi_1 + s_1$，其中 ϕ_1 为连续单调递增函数，s_1 为递增跳跃函数，则 $\phi - \phi_1$ 与 $s - s_1$ 均为常数。

定理 7.9. （Fubini） 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为一区间，任给 $k \in \mathbb{N}$，$f_k : I \to \mathbb{R}$ 为单调递增函数，且对任给 $x \in I$，

$$s(x) = \sum_{k \geqslant 1} f_k(x)$$

存在，则

$$s'(x) = \sum_{k \geqslant 1} f'_k(x), \quad a.e.\ x \in I.$$

证明. 假设 $I = [a, b]$，由于

$$s(x) - s(a) = \sum_{k \geqslant 1} (f_k(x) - f_k(a)),$$

故可假设任给 $k \in \mathbb{N}$，$f_k(a) = 0$。设

$$E = \{x \in (a, b) : s'(x), f'_k(x), k \in \mathbb{N},\ \text{均存在}\ \}.$$

则由 Lebesgue 定理7.2，$[a, b] \setminus E$ 为零测集。

任给 $x \in E$，$h > 0$ 充分小，$x + h \in I$，则

$$\frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \sum_{k \geqslant 1} \frac{f_k(x+h) - f_k(x)}{h}.$$

由关于计数测度积分的 Fatou 引理，

$$s'(x) \geqslant \sum_{k \geqslant 1} f'_k(x). \tag{7.9}$$

定义部分和 $s_N(x) = \sum_{k=1}^{N} f'_k(x)$，由于 $\lim_{N \to \infty} s_N(b) = s(b)$，故存在序列 $N_j \nearrow \infty$ 使得

$$s(b) - s_{N_j}(b) \leqslant 2^{-j}.$$

由 $s - s_{N_j}$ 的单调性，及 $\lim_{N \to \infty} s_N(a) = s(a)$，

$$0 \leqslant s(x) - s_{N_j}(x) \leqslant 2^{-j}.$$

故级数 $\sum_{j \geqslant 1} (s - s_{N_j})$ 在 $[a, b]$ 上收敛。由(7.9)，

$$\lim_{j \to \infty} (s'(x) - s'_{N_j}(x)) = 0, \quad \text{a.e. } x \in [a, b],$$

即

$$\lim_{j \to \infty} \sum_{k=1}^{N_j} f'_k(x) = s'(x), \quad \text{a.e. } x \in [a, b].$$

因为 $f'_k \geqslant 0$，故由 Urysohn 判据，

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} f'_k(x) = s'(x), \quad \text{a.e. } x \in [a, b].$$

□

推论 7.10. *若* $s:[a,b]\to\mathbb{R}$ *为递增跳跃函数，则* $s'=0$，*a.e.*。

证明. 设 $s=\sum_{k\geqslant 1}\sigma_k$，其中 σ_k 为基本递增跳跃函数，则除去跳跃点外，$\sigma_k'=0$。由 Fubini 的定理7.9，

$$s'(x)=\sum_{k\geqslant 1}\sigma_k'(x)=0,\quad \text{a.e. } x\in I.$$

证毕。 □

例 7.11. *存在连续严格单调函数* $g:\mathbb{R}\to(0.1)$，*但* $g'=0$，*a.e.*。

设 f 为 $[0,1]$ 上的 Lebesgue-Cantor 函数，将 f 扩张至整个 $\mathbb{R}$:

$$f(x)=0 \text{ 若 } x<0;\quad f(x)=1 \text{ 若 } x>1.$$

设 $\mathbb{Q}=\{r_1,r_2,\ldots\}$，定义

$$g(x)=\sum_{k\geqslant 1}2^{-k}f(x-r_k),\quad x\in\mathbb{R}.$$

显然 g 连续，$0<g<1$，且由 Fubini 的定理7.9，

$$g'(x)=\sum_{k\geqslant 1}2^{-k}f'(x-r_k)=0,\quad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}.$$

最后任给 $x<y$，存在 $r_k\in\mathbb{Q}$ 使得 $x<r_k<y$，则

$$f(x-r_k)=0<f(y-r_k),$$

故 $g(x)<g(y)$。这表明 g 严格递增。 \\\\

7.2 有界变差函数

7.2.1 BV 函数的基本性质

在本节，我们讨论函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$，$\mathbb{R}^n$ 赋予 Euclid 度量 $|\cdot|$。

定义 7.12. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$，考虑 $[a,b]$ 的任一分划 $\mathscr{P}$:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b$$

及关于此分划的**变差**

$$V(\mathscr{P})=\sum_{i=1}^{m}|f(x_i)-f(x_{i-1})|.$$

变差 $V(\mathscr{P})$ 关于 $[a,b]$ 上任意分划 $\mathscr{P}$ 的上确界称作 f 在 $[a,b]$ 上的**全变差**，记作 $V_f(a,b)$。若 $V_f(a,b)<\infty$，则称 f 为 $[a,b]$ 上的**有界变差**函数（或 BV 函数），记作 $f\in BV(a,b)$，或 $f\in BV$。若 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则称函数 $V_f(a,\cdot)$ 称作 f 在 $[a,b]$ 上的**变差函数**。

下面我们来讨论有界变差函数的基本性质。

定理 7.13. 函数 $f\in BV([a,b])$ 具有以下性质：

BV1) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调，则 $f\in BV([a,b])$，且 $V_f(a,b)=|f(b)-f(a)|$。

BV2) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$，$f=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$，则 $f\in BV([a,b])$ 当且仅当每一 $f_k\in BV([a,b])$。

BV3) $|f(b)-f(a)|\leqslant V_f(a,b)$。

BV4) 若 $f\in BV([a,b])$，则 f 有界。

BV5) 若 $f\in C^1([a,b])$，则 $f\in BV([a,b])$。

BV6) f 在 $[a,b]$ 上连续 $\not\Rightarrow f\in BV([a,b])$。

BV7) 若 $f,g\in BV([a,b])$，则 $f+g\in BV([a,b])$。

BV8) 设 $f:[a,b\to\mathbb{R}^n]$，$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 均有界变差，则 $gf\in BV([a,b])$。若 $|g|\geqslant C>0$，则 $f/g\in BV([a,b])$。

BV9) 设 $a<c<b$，则 $V_f(a,b)=V_f(a,c)+V_f(c,b)$。

BV10) 函数 $V_f(a,x)$ 关于 x 为 $[a,b]$ 上的单调递增函数，且 f 在 x 处连续当且仅当 $V_f(a,\cdot)$ 在 x 处连续。

证明. BV1) 是平凡的。BV2) 这可由不等式

$$|y_k|\leqslant|y|\leqslant|y_1+\cdots+|y_n|,\quad y\in\mathbb{R}^n,k=1,2,\ldots,n$$

得到。事实上我们有

$$V_{f_k}(a,b)\leqslant V_f(a,b)\leqslant V_{f_1}(a,b)+\cdots+V_{f_n}(a,b).$$

BV3) 的证明取特殊的分划 $x_0=a<b=x_1$ 即可。设 $a<x<b$，由定义

$$|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\leqslant V_f(a,b).$$

故 $|f(x)|\leqslant|f(a)|+V_f(a,b)$。这就证明了 BV4)。由 BV2)，不妨设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，则由中值定理，$|f'|\leqslant C$。因此

$$|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant C(x_i-x_{i-1}).$$

由 BV 函数的定义，对任一分划

$$\sum |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqslant \sum C(x_i - x_{i-1}) = C(b-a).$$

故 $V_f(a,b) \leqslant C(b-a)$。这就证明了 BV5)

对于 BV6)，我们有如下例子：定义在 $[0,1]$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin x^{-1}, & 0 < x \leqslant 1; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

设 $x_i = 1/((i+1/2)\pi)$，$f(x_i) = (-1)^i/((i+1/2)\pi)$，则

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = \frac{1}{(i+1/2)\pi} + \frac{1}{(i-1/2)\pi} \geqslant \frac{2}{i\pi}.$$

则对 $\{x_i\}$ 决定的分划 $\mathscr{P}$，

$$\begin{aligned} V(\mathscr{P}) =& |f(x_n) - f(0)| + |f(x_{n-1}) - f(x_n)| + \cdots + |f(x_0) - f(x_1)| \\ & + |f(1) - f(x_0)| \\ \geqslant & \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i-1}) - f(x_i)| > \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i\pi}. \end{aligned}$$

因为 $\sum_{i=1}^{\infty} 2/(i\pi) = \infty$，故 $f \notin BV([a,b])$。

由 $\mathbb{R}^n$ 中的范数 $|\cdot|$ 的三角不等式，

$$V_{f+g}(a,b) \leqslant V_f(a,b) + V_g(a,b).$$

这就证明了 BV7)。

对 BV8)，我们仅证明第二个结论。由 BV4)，存在 $M > 0$，$|f| \leqslant M$，故

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x_i)}{g(x_i)} - \frac{f(x_{i-1})}{g(x_{i-1})} \right| &= \frac{|g(x_{i-1})f(x_i) - g(x_i)f(x_{i-1})|}{|g(x_i)g(x_{i-1})|} \\ &\leqslant \frac{|f(x_i)f(x_{i-1})|}{|g(x_i)|} + |f(x_{i-1})| \frac{|g(x_{i-1}) - g(x_i)|}{|g(x_i)g(x_{i-1})|} \\ &\leqslant C^{-1}|f(x_i) - f(x_{i-1})| + MC^{-2}|g(x_i) - g(x_{i-1})| \end{aligned}$$

故

$$V_{f/g}(a,b) \leqslant C^{-1}V_f(a,b) + MC^{-2}V_g(a,b).$$

下面证明 BV9)。对 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 的任一分划：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = c; \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = b,$$

得到 $[a,b]$ 的一个分划，故

$$\sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{j=1}^{k} |f(y_j) - f(y_{j-1})| \leqslant V_f(a,b),$$

从而

$$V_f(a,b) \geqslant V_f(a,c) + V_f(c,b).$$

另一方面，任给 $[a,b]$ 的一个分划 $\mathscr{P}$:

$$a = z_0 < z_1 < \cdots < z_l = b,$$

若 c 为分划点，则 $\mathscr{P}$ 自然分别给出了 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上的一个分划；若 c 不为分化点，比如 $z_{\alpha-1} < c < z_\alpha$，将 c 添入 $\mathscr{P}$，同样分别决定了 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上的一个分划。因为

$$|f(z_\alpha) - f(z_{\alpha-1})| \leqslant |f(c) - f(z_{\alpha-1})| + |f(z_\alpha) - f(c)|,$$

则有

$$\sum_{i=1}^{l} |f(z_i) - f(z_{i-1})| \leqslant V_f(a,c) + V_f(c,b).$$

这就得到了相反的不等式。

最后我们证明 BV10)。由 BV9)，$V_f(a,\cdot)$ 的单调性是显然的。由 BV3) 和 BV9)，则 $V_f(a,\cdot)$ 的连续性蕴含了 f 的连续性:

$$|f(y) - f(x)| \leqslant V_f(x,y) = V_f(a,y) - V_f(a,x), \quad x < y,$$
$$|f(x) - f(y)| \leqslant V_f(y,x) = V_f(a,x) - V_f(a,y), \quad x > y.$$

反之，若 f 在 x 处连续，对 $a \leqslant x < b$，任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\{x_i\}$ 决定的分划 $\mathscr{P}$，使得

$$\sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V_f(x,b) - \varepsilon/2.$$

在 $x = x_0 < x_1$ 之间插入另外的分划点，故可假设 $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon/2$。因此

$$\begin{aligned} V_f(x,b) &< \sum_{i=1}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \varepsilon/2 \\ &< \sum_{i=2}^{m} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \varepsilon \\ &\leqslant V_f(x_1,b) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由 BV9)，则

$$V_f(a,b) - V_f(a,x) < V_f(a,b) - V_f(a,x_1) + \varepsilon,$$

即

$$V_f(a,x_1) < V_f(a,x) + \varepsilon.$$

由于 $V_f(a,\cdot)$ 单调递增，故对 $x \leqslant y \leqslant x_1$，

$$V_f(a,x) \leqslant V_f(a,y) \leqslant V_f(a,x)+\varepsilon.$$

这证明了 $V_f(a,\cdot)$ 在 x 处右连续。类似可证明 $V_f(a,\cdot)$ 在 x 处左连续。 □

7.2.2 BV 函数的结构

定理 7.14 (BV 函数结构定理)**.** 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，则 $f\in BV$ 当且仅当 f 可表示成两个单调递增函数之差。

证明. 设 $f\in BV$，定义函数 g 如下：

$$g(x)=V_f(a,x)-f(x), \quad x\in[a,b].$$

下面证明 g 单调递增。若 $a\leqslant x<y\leqslant b$，由 BV9) 和 BV3)，

$$\begin{aligned} g(y)-g(x) &= (V_f(a,y)-f(y))-(V_f(a,x)-f(x)) \\ &= V_f(x,y)-(f(y)-f(x)) \\ &\geqslant |f(y)-f(x)|-(f(y)-f(x)) \geqslant 0. \end{aligned}$$

反之，由 BV1) 与 BV7) 得到。 □

推论 7.15. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 有界变差，则除去 $[a,b]$ 上的至多可数个点，f 连续。而且 f' 几乎处处存在，且 $|f'|$ 可积。

证明. 由 BV2)，只需考虑 $n=1$ 的情形，此时 f 为两个单调递增函数之差，故由 Lebesgue 定理7.2及定理7.4得证。 □

定理 7.16. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 有界变差，则

$$|f'(x)|=V_f'(a,x), \quad a.e.\ x\in[a,b].$$

证明. 由 BV3)，若 $f'(x)$ 与 $V_f'(a,x)$ 存在，则 $|f'(x)|\leqslant V_f'(a,x)$。定义

$$A=\{x: f'(x), V_f'(a,x) \text{ 存在且 } V_f'(a,x)>|f'(x)|\}.$$

我们需证明 A 为零测集。对任给 $k\in\mathbb{N}$，定义

$$A_k=\{x: f'(x), V_f'(a,x) \text{ 存在且 } V_f'(a,x)-|f'(x)|>1/k\},$$

则 $A=\cup_{k\geqslant 1}A_k$。任给 $x\in A_k$，存在 $j\in\mathbb{N}$ 使得

$$\inf_{\substack{y\leqslant x\leqslant z \\ 0<z-y\leqslant 1/j}} \frac{V_f(y,z)-|f(z)-f(y)|}{z-y} > \frac{1}{k}.$$

上式中用 s 代替 $1/j$，t 代替 $1/k$，则 $s,t>0$，A 包含于形如

$$E=\{x:\text{ 若 } y\leqslant x\leqslant z, 0<z-y\leqslant s,\text{ 则 } \frac{V_f(y,z)-|f(z)-f(y)|}{z-y}\geqslant t\}$$

的集合的可列并。下面证明 E 为零测集。

任给 $\varepsilon>0$，存在分划 $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$，$x_i-x_{i-1}\leqslant s$，使得

$$V=\sum_{i=1}^m|f(x_i)-f(x_{i-1})|\geqslant V_f(a,b)-\varepsilon.$$

若对 i，$E\cap[x_{i-1},x_i]\neq\varnothing$，则在 E 中的定义中取 $y=x_{i-1},z=x_i$，则

$$t\leqslant\frac{V_f(x_{i-1},x_i)-|f(x_i)-f(x_{i-1})|}{x_i-x_{i-1}},$$

即

$$x_i-x_{i-1}\leqslant\frac{1}{t}(V_f(x_{i-1},x_i)-|f(x_i)-f(x_{i-1})|).$$

因此

$$m^*(E\cap[x_{i-1},x_i])\leqslant\frac{1}{t}(V_f(x_{i-1},x_i)-|f(x_i)-f(x_{i-1})|).$$

若 $E\cap[x_{i-1},x_i]=\varnothing$，上式自然成立。因此

$$\begin{aligned}m^*(E)&\leqslant\sum_{i=1}^m m^*(E\cap[x_{i-1},x_i])\\&=\frac{1}{t}\sum_{i=1}^m(V_f(x_{i-1},x_i)-|f(x_i)-f(x_{i-1})|)\\&=\frac{1}{t}(V_f(a,b)-V)\\&\leqslant\frac{1}{t}\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 $m^*(E)=0$。 □

推论 7.17. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 有界变差，则

$$\int_a^b|f'(x)|\,dx\leqslant V_f(a,b).$$

证明. 由定理7.16，

$$|f'(x)|=V_f'(a,x),\quad \text{a.e. } x\in[a,b].$$

故

$$\int_a^b|f'(x)|\,dx=\int_a^b V_f'(a,x)\,dx.$$

因为 $V_f(a,\cdot)$ 为单调递增函数，则由定理7.4，

$$\int_a^b V_f'(a,x)\,dx \leqslant V_f(a,b) - V_f(a,a) = V_f(a,b).$$

证毕。 □

思考题：设

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos x^{-1}, & 0 < x \leqslant 1; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明

1. 若 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，$f \notin BV$。
2. 若 $\alpha > 1$，$f \in BV$ 且
   (a) $1 < \alpha < 2$ 时，$V_f'(0,0) = \infty$；
   (b) $\alpha = 2$ 时，$V_f'(0,0) = 2/\pi$；
   (c) $2 < \alpha < \infty$ 时，$V_f'(0,0) = 0$。

7.3 绝对连续函数

设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 为单调递增函数，由定理7.8，

$$f = \phi + s,$$

其中 s 为递增跳跃函数，ϕ 为连续单调递增函数。我们知道 $f \in L^1$，若设 F 为 f 的原函数，即

$$F(x) = \int_a^x f'(t)\,dt,$$

由积分的绝对连续性，F 连续，且 $F' = f' = \phi'$，a.e.。若记 $g = \phi - F$，则 g 连续，且 $g' = 0$，a.e.，并且若 $a \leqslant x < y \leqslant b$，

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &= \phi(x) - \phi(y) + F(y) - F(x) \\ &= \phi(x) - \phi(y) + \int_x^y \phi'(t)\,dt \\ &\leqslant \phi(x) - \phi(y) + \phi(y) - \phi(x) = 0, \end{aligned}$$

故 g 亦单调递增。

综上有

定理 7.18 (单调函数结构定理 II)**.** 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调递增，则 f 可以表示为

$$f(x)=\int_a^x f'(t)\,dt+g(x)+s(x),\quad x\in[a,b], \tag{7.10}$$

其中 g 为一连续单调递增函数，$g'=0$，*a.e.*，s 为 f 决定的递增跳跃函数。并且相差常数的情况下，上述分解是唯一的。

推论 7.19. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 单调递增，则

$$\int_a^b f'(t)\,dt=f(b)-f(a) \tag{7.11}$$

当且仅当

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt,\quad x\in[a,b]. \tag{7.12}$$

证明. 由定理7.18，f 可表示为

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(a)\,dt+h(x),$$

其中 h 为单调递增函数，$h(a)=0$。由(7.11)，

$$h(b)=f(b)-f(a)-\int_a^b f'(t)\,dt=0.$$

又 $h(a)=0$，h 单调递增，故任给 $x\in[a,b]$，$h(x)=0$。这就证明了(7.12)。反之显然。 □

定义 7.20. $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 称作**绝对连续**函数若任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得任给有限个两两互不相交的开区间 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^m$，$\cup_{i=1}^m(x_i,y_i)\subset[a,b]$，

$$m(\cup_{i=1}^m(x_i,y_i))=\sum_{i=1}^m m((x_i,y_i))<\delta,$$

则有

$$\sum_{i=1}^m |f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon.$$

若 f 绝对连续，记 $f\in AC([a,b])$，或 $f\in AC$。

定理 7.21. 下面是绝对连续函数的基本性质：

AC1) $f\in AC([a,b])$，则 f 连续且 $f\in BV([a,b])$。

AC2) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 绝对连续，$N\subset[a,b]$ 为零测集，则 $f(N)$ 亦为零测集。

AC3) $f,g\in AC([a,b],\mathbb{R})$，则 $f+g, fg, |f|^\alpha(\alpha\geqslant 1)\in AC([a,b],\mathbb{R})$。若任给 $x\in[a,b]$，$g(x)\neq 0$，则 $f/g\in AC([a,b],\mathbb{R})$。

AC4) 设 $h \in L^1([a,b])$，$f(x) = \int_a^x h(t)\,dt$，$x \in [a,b]$，则 $f \in AC([a,b],\mathbb{R})$。

证明. f 的（一致）连续性是显然的。任给 $[a,b]$ 的分划：$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$，且对任给 i，$t_i - t_{i-1} < \delta$，则有

$$V_f(t_{i-1}, t_i) \leqslant \varepsilon.$$

因此

$$V_f(a,b) = \sum_{i=1}^{N} V_f(t_{i-1}, t_i) \leqslant N\varepsilon \leqslant \infty.$$

这证明了 AC1)。

下面证明 AC2)。任给 $\varepsilon > 0$，δ 如绝对连续性的定义中，则存在开集 $G \supset N$，$m(G) < \delta$。不妨设 $G \subset (a,b)$，故

$$N \subset \sum_{k\geqslant 1}(a_k, b_k) \subset (a,b),$$

且 $\sum_{k\geqslant 1}(b_k - a_k) = m(G) < \delta$。选取 $c_k, d_k \in [a_k, b_k]$ 分别为 f 在 $[a_k, b_k]$ 上的最小和最大点，则

$$f([a_k, b_k]) \subset [f(c_k), f(d_k)].$$

由于 $\sum_{k=1}^{j} |d_k - c_k| \leqslant \sum_{k=1}^{j}(b_k - a_k) < \delta$，则

$$\sum_{k=1}^{j} |f(d_k) - f(c_k)| < \varepsilon.$$

由 j 的任意性，

$$\sum_{k\geqslant 1} |f(d_k) - f(c_k)| \leqslant \varepsilon.$$

因此

$$f(N) \subset \bigcup_{k\geqslant 1} f((a_k, b_k)) \subset \bigcup_{k\geqslant 1} [f(c_k), f(d_k)],$$

从而

$$m^*(f(N)) \leqslant \sum_{k\geqslant 1} |f(d_k) - f(c_k)| \leqslant \varepsilon.$$

由 ε 的任意性，$m^*(f(N)) = 0$，$f(N)$ 为零测集。

AC3) 的证明是例行的，仅需注意若 $\alpha \geqslant 1$，

$$||f(y)|^\alpha - |f(x)|^\alpha| \leqslant \alpha M^{\alpha-1} |f(y) - f(x)|.$$

AC4) 直接由积分的绝对连续性得到。 $\square$

引理 7.22. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 绝对连续，且 $f'=0$，$a..e.$，则 f 为常数。

证明：设
$$A=\{x\in(a,b):f'(x)=0\}.$$
由假设，$[a,b]\setminus A$ 为零测集，故由 AC2)，$f([a,b]\setminus A)$ 亦为零测集。另一方面由 Sard 定理6.31，$f(A)$ 亦为零测集。这表明 $f([a,b])$ 为零测集。因为 f 连续，故 $f([a,b])$ 为一（可能退化的）区间，从而为单点集。 □

定理 7.23 (微积分基本定理)**.** 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，$f\in AC$ 当且仅当存在 $h\in L^1([a,b])$ 使得
$$f(x)=f(a)+\int_a^x h(t)\,dt,\quad x\in[a,b],$$
从而 $h=f'$，$a..e.$。

证明. 由 AC3) 和 AC4)，对
$$g(x)=f(x)-\int_a^x f'(t)\,dt,$$
$g\in AC$，且由前面 Lebesgue 微分定理的应用，$g'=0$，a..e.。则由引理7.22，g 为常值函数，即 $g(x)=f(a)$，$x\in[a,b]$，即
$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt.$$
证毕。 □

推论 7.24. 设 $f\in BV([a,b])$,则 $f\in AC([a,b])$ 当且仅当 $V_f(a,\cdot)\in AC([a,b])$。

证明. f 作为向量值函数，f 的绝对连续性是指其每一分量函数是绝对连续的。因此不妨假设 $n=1$。

首先假设 $V_f(a,\cdot)\in AC$，对分划：$a\leqslant x_1<y_1\leqslant x_2<y_2\leqslant\cdots\leqslant x_m<y_m\leqslant b$，由 BV3)
$$|f(y_i)-f(x_i)|\leqslant V_f(a,y_i)-V_f(a,x_i).$$
故
$$\sum_{i=1}^m|f(y_i)-f(x_i)|\leqslant\sum_{i=1}^m(V_f(a,y_i)-V_f(a,x_i)).$$
从而 $f\in AC$。

反之，若 $f\in AC$，$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt$。故
$$|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f'(t)|\,dt.$$
从而 $V_f(a,x)=\int_a^x|f'(t)|\,dt$，$V_f(a,\cdot)\in AC$。 □

推论 7.25. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界变差，则 $f\in AC$ 当且仅当

$$V_f(a,b)=\int_a^b |f'(x)|\,dx. \tag{7.13}$$

证明. 假设(7.13)成立，由于 $|f'(x)|=V_f'(a,x)$，a..e.，故

$$V_f(a,b)=\int_a^b V_f'(a,x)\,dx,$$

从而 $V_f(a,\cdot)\in AC$，从而 $f\in AC$。反之是显而易见的。 □

定义 7.26. 函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 称作**奇异连续**函数若 f 连续且 $f'=0$，a..e.。

所谓**跳跃函数**是指两个递增跳跃函数之差，即

$$s(x)=\sum_{k\geqslant 1}\sigma_k(x)$$

绝对收敛，σ_k 为基本递增（或递减）跳跃函数。

综合前面的讨论，我们给出如下有界变差函数的结构定理。

定理 7.27. （BV **函数结构定理**） 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界变差，则 f 有如下表示

$$f=F+g+s,$$

其中 F 为绝对连续函数，g 奇异连续函数，s 为跳跃函数，并且在相差一个常数的意义下是唯一的。

定理 7.28. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，则 f 绝对连续当且仅当下面的条件成立：

(1) f 连续；

(2) f' 几乎处处存在；

(3) $f'\in L^1([a,b])$；

(4) f 映零测集为零测集。

证明. 假设 f 满足 (1)-(4)，任给 $\varepsilon>0$，及分划 $a\leqslant x_1<y_1\leqslant x_2<y_2\leqslant\cdots\leqslant x_m<y_m=b$，且

$$\sum_{i=1}^m (y_i-x_i)<\delta,$$

则由积分的绝对连续性，

$$\sum_{i=1}^m\int_{[x_i,y_i]}|f'(x)|\,dx<\varepsilon.$$

设 $A=\{x\in[a,b]:f'(x)$ 存在 $\}$，则 $[a,b]\setminus A$ 为零测集，故 $f([a,b]\setminus A)$ 亦为零测集，因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}|f(y_i)-f(x_i)| &\leqslant \sum_{i=1}^{m} m(f([x_i,y_i]))\\ &=\sum_{i=1}^{m} m(f([x_i,y_i]\cap A))\\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m}\int_{[x_i,y_i]\cap A}|f'(x)|\,dx\\ &=\sum_{i=1}^{m}\int_{[x_i,y_i]}|f'(x)|\,dx\\ &<\varepsilon.\end{aligned}$$

故 f 绝对连续。注意上面的不等式用到了 Sard 定理6.31。 □

推论 7.29. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为连续的有界变差函数，则 f 绝对连续当且仅当 f 映零测集到零测集。

推论 7.30. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 处处可微，$f'\in L^1([a,b])$，则

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt.$$

证明. 定理7.28的条件 (1)-(3) 成立，再由推论6.32，(4) 成立。 □

注 7.31. 推论7.30的一个直接证明可参见 [19, Theorem 7.21]。

最后我们给出常用的关于绝对连续函数的变量代换公式和分部积分公式，它们的证明留作习题。

定理 7.32 (变量代换公式)**.** 设 $f\in L^1([u(a),u(b)])$，u 为 $[a,b]$ 上单调递增绝对连续函数，则 $f\circ u\cdot u'\in L^1([a,b])$，且

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(y)\,dy=\int_a^b f(u(x))f'(x)\,dx.$$

定理 7.33 (分部积分公式)**.** 设 $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 绝对连续，则

$$\int_a^b fg'\,dx=f(x)g(x)|_a^b-\int_a^b f'g\,dx.$$

7.4 习题

8 (本性有界变差函数)**.** 在我们的有界变差函数的定义中，如果修改 $f \in BV([a,b])$ 在一点处的函数值，$V_f([a,b])$ 一般会改变。为此，我们定义

$$\|f\|_{BV} = \inf\{V_g([a,b]) : g \in BV([a,b]) \text{ 且 } f = g, a.e.\}.$$

我们称 $\|f\|_{BV} < \infty$ 的函数为**本性有界变差函数**。

(1) 设 $\{f_n\} \subset BV([a,b])$，且存在常数 $C > 0$ 使得 $\sup_{n\in\mathbb{N}} V_{f_n}(a,b) \leqslant C$。证明若对某 $f \in L^1([a,b])$，$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$，则 f 与某有界变差函数几乎处处相等。

(2) 设 $f \in BV([a,b])$，g 为 $\mathbb{R}$ 上非负可测函数，且 $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = 1$。证明 $f * g \in BV(\mathbb{R})$ 且 $V_{f*g}(\mathbb{R}) \leqslant V_f([a,b])$。这里我们当 $x < a$ 时定义 $f(x) = f(a)$，当 $x > b$ 时定义 $f(x) = f(b)$，此时可以将 f 理解成 $\mathbb{R}$ 上的有界变差函数。

(3) 证明 $[a,b]$ 上的可测函数为本性有界变差如果

$$\text{ess } V_f([a,b]) = \sup\{\sum_{i=0}^{m} |f(x_{i+1} - f(x_i)|\} < \infty,$$

其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m < x_{m+1} = b, m \in \mathbb{N},$ 每一 $x_i (i = 1, \ldots, m)$ 均为 f 的近似连续点。

9. 设 $f \in L^1([a,b])$，当 $x < a$ 时 $f(x) = f(a)$，当 $x > b$ 时 $f(x) = f(b)$。

(1) 证明 f 几乎处处等于某 $[a,b]$ 上的有界变差函数当且仅当

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\, dx = O(h), \quad h \to 0.$$

(2) 证明若

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\, dx = o(h), \quad h \to 0,$$

则 f 几乎处处为常数。

10. 设 f 为 $[0,1]$ 上的绝对连续函数，且对几乎所有的 $x \in [0,1]$，$f'(x) > 0$。证明 f 严格单调且其反函数 f^{-1} 在 $[f(0), f(1)]$ 上绝对连续。

第八章　习题解答

8.1　集合与映射

8.2　准备工作

11. （Baire-Hahn **逼近和插值定理**）我们从一些稍微简单一些的结论出发。

(a) 设 (X,d) 为度量空间，$f: X \to [-\infty, +\infty]$ 下半连续、下有界且 $f \not\equiv +\infty$。对任意 $n \in \mathbb{N}$，定义 $f_n(x) = \inf_{y \in X}\{f(y) + nd(x,y)\}$，$x \in X$。证明 f_n 为 X 上的 Lipschitz 函数且 $\mathrm{Lip}\,(f) \leqslant n$，$0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots \leqslant f$ 且任给 $x \in X$，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$。

若进一步 X 为局部紧的，则 f_n 定义中的 inf 可以取到，并且对任意 f_n 对应的极小元 y_n，$\lim_{n\to\infty} y_n = x$。

若去掉条件"f 下有界"，结论亦成立。

(b) 在 (a) 中，如果定义 $f_n(x) = \inf_{y \in X}\{f(y) + nd^2(x,y)\}$，相应结论亦成立。

上述结论称作 Baire 定理。它可以表述为：*若 X 为度量空间，$f: X \to \mathbb{R}$ 为下半连续函数当且仅当 f 为一单调递增的连续函数 f_n 的逐点收敛的极限。* 读者可参见 [2, Proposition 7.20] 另一个基于 Urysohn 引理的证明。

(c) 若 $X = \mathbb{R}^n$（赋予标准度量），$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为凸函数，定义 $f_\varepsilon(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n}\{f(y) + \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}\}, x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$。证明存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使得对 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，$f_\varepsilon$ 为 C^1 的，并且导数 f'_ε 为 Lipschitz 函数。并且当 $\varepsilon \searrow 0$ 时，f_ε 单调递增逐点收敛于 f。

(d) 设 S 为任意集合，$f: \mathbb{R}^n \times S \to \mathbb{R}$ 且 $f(\cdot, s)$ 对任意 $s \in S$ 为凸函数，证明 $F(x) = \sup_{s \in S} f(x,s)$ 仍为凸函数。结合这一点以及上一习题，你能否给出一个对于一般有界连续函数 f 利用光滑函数逼近的方法？

(c) 中的逼近在凸分析里称作 Moreau-Yosida 逼近，(d) 中的逼近方法称作 Lasry-Lions 正则化。

(e) 设 X 为度量空间，f 和 g 分别为 X 上的下半连续函数和上半连续函数，$g \leqslant f$ ($g < f$)。证明存在 X 上的连续函数 h 使得 $g \leqslant h \leqslant f$ ($g < h < f$)。

(e) 的结论称作 Hahn 插值定理（[2, Proposition 7.21]）。若 X 为仿紧空间，这个结论（C. H. Dowker）也是正确的。参见 [9, 第 171 页]。

证明. □

8.3 抽象 Lebesgue 积分

12. （**等度可积**）设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为一测度空间，$\mathscr{F} \subset L^1(X, \mu)$ 称作等度可积若任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

$$\mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \int_A |f|\, d\mu < \varepsilon, \quad f \in \mathscr{F}.$$

(a) 证明若序列 $f_n \in L^1(X, \mu)$ 存在控制函数 $g \in L^1(X, \mu)$，即 $|f_n| \leqslant g, a.e.$，则 $\{f_n\} \subset L^1(X, \mu)$ 为等度可积。

(b) 证明若 $f_n, f \in L^1(X, \mu)$ 且 $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$，则 $\{f_n\} \subset L^1(X, \mu)$ 为等度可积。

(c) 证明下面的 Vitali 的定理：若 $\mu(X) < \infty$，$\{f_n\}$ 等度可积，f_n 几乎处处收敛于 f 且 f 几乎处处有限，则 $f \in L^1(X, \mu)$ 且 $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$。

(d) 证明下面 Vitali 定理的逆命题：若 $\mu(X) < \infty$，$\{f_n\} \subset L^1(X, \mu)$ 且对任意可测集 E，$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$ 存在，则 $\{f_n\}$ 等度可积。

(e) 证明下面版本的 Vitali 定理：$\{f_n\} \subset L^1(X, \mu), f \in L^1(X, \mu)$，则 $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ 等且仅当 (1) f_n 依测度 μ 收敛于 f；(2) $\{f_n\}$ 等度可积；(3) 任给 $\varepsilon > 0$，存在可测集 A 使得 $\mu(A) < \infty$ 且对任一 n，$\int_{X\setminus A} |f_n|\, d\mu < \varepsilon$。

证明. (e) 假设 $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$。则 (1) 由 Chebyshev 不等式直接得到。任给 $\varepsilon > 0$，由 $f \in L^1$ 的积分绝对连续性，存在 $\delta > 0$ 使得若 $\mu(A) < \delta$ 则 $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon/2$。同时存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得若 $n > N$，$\|f_n - f\|_1 < \varepsilon/2$。因此对 $n > N$，

$$\begin{aligned}\int_A |f_n|\, d\mu &\leqslant \int_A |f|\, d\mu + \int_A |f_n - f|\, d\mu \leqslant \int_A |f|\, d\mu + \int_X |f_n - f|\, d\mu \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $\{f_n\}_{n=N+1}^{\infty}$ 为等度可积。又 $\{f_n\}_{n=1}^{N}$ 为等度可积，故 $\{f_n\}$ 等度可积。这就证明了 (2)。

对任给 $g \in L^1$，$\nu(E) = \int_E |g|\, d\mu$ 定义了有限测度。对任意 k 设 $A_k = \{|g| > 1/k\}$，$A_0 = \{f = 0\}$。则 $Y = X \setminus A_0 = \bigcup A_k$，且 $A_k \nearrow Y$。故任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得若 $k \geqslant N$ 则 $\nu(A_k) > \nu(X) - \varepsilon$。取 $A = A_N$，$B = X \setminus A_N$。则 $X = A \cup B$，

$$\mu(A) < \infty \quad \text{且} \quad \int_B |g|\, d\mu = \nu(X) - \nu(A_N) < \varepsilon.$$

现在，任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得若 $n > N$，$\|f_n - f\|_1 < \varepsilon/2$。同时由上面的讨论，存在 A_0, B_0 可测，$X = A_0 \cup B_0$，$\mu(A_0) < \infty$ 且 $\int_{B_0} |f|\, d\mu < \varepsilon/2$。因此对任意 $n > N$，

$$\int_{B_0} |f_n|\, d\mu \leqslant \int_{B_0} |f|\, d\mu + \|f_n - f\|_1 < \varepsilon.$$

类似，对 $n = 1, \ldots, N$，存在 A_n, B_n 可测，$X = A_n \cup B_n$，$\mu(A_n) < \infty$ 且 $\int_{B_n} |f|\, d\mu < \varepsilon$。取 $A = \bigcup_{n=0}^N A_n$，$B = \bigcap_{n=0}^N B_n$，则 $X = A \cup B$，$\mu(A) < \infty$ 且对任意 n 有 $\int_B |f_n|\, d\mu < \varepsilon$。这就证明了 (3)。

反之，

□

13. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为 σ-有限测度空间，证明 X 中两两不交的正测集族至多可数。

证明. 设 $\mathscr{F}$ 为 X 的可测集族，两两不交且每一 $E \in \mathscr{F}$ 均有 $\mu(E) > 0$。首先假设 $\mu(X) < \infty$。定义 $\mathscr{F}_n = \{E \in \mathscr{F} : m(E) > 1/n\}$，则我们有 $\mathscr{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_n$。因为 $\mu(X)$ 有限且 $\mathscr{F}_n$ 中元两两不交，故 card $(\mathscr{F}_n)$ 有限 $(n \in \mathbb{N})$。从而 $\mathscr{F}$ 至多可数。σ-有限的情形容易由前面的结论推出。 □

14. 设 $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ 为单调递增函数组成的序列，并且依测度 Lebesgue 测度 m 收敛于可测函数 f。证明若 $x \in (0,1)$ 为 f 的连续点则 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$。

证明. 反证法。假设 $f_n(x)$ 不收敛于 $f(x)$，则存在 $\eta > 0$，$n_k \to \infty$，使得对所有 n_k，$|f_{n_k}(x) - f(x)| > \eta$。因此，$f_{n_k}(x) - f(x) > \eta$ 或 $f(x) - f_{n_k}(x) > \eta$ 对无穷多的 n_k。如果需要，再选子子列，我们假设对所有 n_k，$f_{n_k}(x) - f(x) > \eta$。因为 f 在 x 处连续，则存在 $\delta > 0$ 使得

$$|y - x| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \frac{\eta}{2}.$$

我们有

$$f_{n_k}(y) - f(y) = (f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x)) + (f_{n_k}(x) - f(x)) + (f(x) - f(y)).$$

任给 $y\in(x,x+\delta)$，则 $f_{n_k}(y)-f_{n_k}(x)\geqslant 0$，因此

$$f_{n_k}(y)-f(y)>\eta-\frac{\eta}{2}=\frac{\eta}{2}.$$

这表明 $(x,x+\delta)\subset\{|f_{n_k}-f|>\frac{\eta}{2}\}$。这与 f_{n_k} 依测度收敛于 f 产生矛盾！

另一种 $f(x)-f_{n_k}(x)>\eta$ 的情形，注意

$$f(y)-f_{n_k}(y)=(f(y)-f(x))+(f(x)-f_{n_k}(x))+(f_{n_k}(x)-f_{n_k}(y)).$$

可以证明 $(x-\delta,x)\subset\{|f_{n_k}-f|>\frac{\eta}{2}\}$。类似导出矛盾！ □

15. 设 $A\subset\mathbb{R}^l$，$B\subset\mathbb{R}^m$，则对 $A\times B\subset\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^m$ 有

$$m^*(A\times B)=m^*(A)m^*(B)$$

证明. 任给开集 $G\subset\mathbb{R}^{l+m}$ 使得 $G\supset A\times B$。任给 $y\in B$，$G_y=\{x\in\mathbb{R}^l:(x,y)\in G\}\supset A$，故 $m(G_y)\geqslant m^*(A)$。函数 $m(G_y)$ 可测，且可测集 $\{y\in\mathbb{R}^m:m(G_y)\geqslant m^*(A)\}\supset B$。因此由 Fubini 定理，

$$m(G)=\int_{\mathbb{R}^m}m(G_y)\,dy\geqslant\int_{\{y\in\mathbb{R}^m:m(G_y)\geqslant m^*(A)\}}m(G_y)\,dy\geqslant m^*(A)m^*(B)$$

由 G 的任意性，则 $m^*(A\times B)\geqslant m^*(A)m^*(B)$。

不妨设 $m^*(A),m^*(B)<\infty$。任给 $\varepsilon>0$，存在开集 $G\subset\mathbb{R}^l$，$H\subset\mathbb{R}^m$，使得

$$\begin{aligned}G\supset A,\quad m(G)<m^*(A)+\varepsilon,\\ H\supset B,\quad m(H)<m^*(B)+\varepsilon.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}m^*(A\times B)&\leqslant m(G\times H)=m(G)m(H)<(m^*(A)+\varepsilon)\cdot(m^*(B)+\varepsilon)\\&=m^*(A)m^*(B)+\varepsilon(m^*(A)+m^*(B)+\varepsilon)\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，$m^*(A\times B)\leqslant m^*(A)m^*(B)$。 □

16 (Abel). 设 μ 为 $[0,+\infty)$ 上的 Borel 测度，且存在 $\gamma\geqslant 0$，$C\geqslant 0$ 使得

$$\lim_{a\to\infty}a^{-\gamma}\mu([0,a))=C.$$

则

$$\lim_{t\to 0^+}t^\gamma\int_0^\infty e^{-tx}\,d\mu(x)=C\Gamma(\gamma+1),$$

其中 $\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx$.

17 (Tauber)**.** 设 μ 为 $[0,+\infty)$ 上的 Borel 测度。假设 $\int_0^\infty e^{-tx}\,d\mu(x)<\infty$ 对任意 $t>0$，并且存在 $\gamma\geqslant 0$，$D\geqslant 0$ 使得

$$\lim_{t\to 0^+} t^\gamma \int_0^\infty e^{-tx}\,d\mu(x)=D.$$

则

$$\lim_{a\to\infty} a^{-\gamma}\mu([0,a))=\frac{D}{\Gamma(\gamma+1)}.$$

8.4 Lebesgue 测度

函数 $f:\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 称作 **Carathéodry 函数**若

(1) 对任意 $y\in\mathbb{R}^m$，$f(\cdot,y):\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}$ 为 Lebesgue 可测。

(2) 对任意 $x\in\mathbb{R}^l$，$f(x,\cdot):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 连续。

18. (i) 任意 Carathéodry 函数 f 作为 $\mathbb{R}^{l+m}$ 上的函数可测。

证明. 设 $\{y_i\}\subset\mathbb{R}^m$ 为一可数稠密子集。任给闭集 $F\subset\mathbb{R}$，$f(x,y)\in F$ 当且仅当任给 $k\in\mathbb{N}$，存在 y_i 使得 $|y-y_i|<1/k$ 且 $d_F(f(x,y_i))<1/k$。这意味着

$$f^{-1}(F)=\bigcap_{k=1}^\infty\bigcup_{i=1}^\infty\left[\{x\in\mathbb{R}^l: d_F(f(x,y_i))<1/k\}\times B(y_i,1/k)\right]$$

因为每一 $f(\cdot,y_i)$ 均可测，d_F 连续，故 $d_F(f(\cdot,y_i))$ 可测，从而集合 $\{x\in\mathbb{R}^l: d_F(f(x,y_i))<1/k\}$ 为 $\mathbb{R}^l$ 中可测集。从而 $f^{-1}(F)$ 可测。 □

19 (测度的支集)**.** 设 μ 为局部紧 Hausdorff 空间 X 上的 Radon 测度，集合

$$\operatorname{supp}(\mu)=\{x\in X: \text{任给开集 } U,\ x\in U,\ \text{有 } \mu(U)>0\}$$

称作 μ **的支集**。

(1) 证明 $\operatorname{supp}(\mu)^c$ 恰为 X 中最大的 μ-零测开集，即 $\operatorname{supp}(\mu)^c$ 为 X 中所有零测开集之并。(为什么仍为零测集?)

(2) 证明 $x\in\operatorname{supp}(\mu)$ 当且仅当对所有 $f\in C_c(X,[0,1])$，$f(x)>0$，有 $\int_X f\,d\mu>0$。

(3) 设 $0<\lambda<\infty$，且 $\mu(X)=\lambda$，则对 $\operatorname{supp}(\mu)$ 的任意紧的真子集 K，$\mu(K)<\lambda$。

(4) 对 $\mathbb{R}^n$ 上任意紧子集，构造概率测度 μ 使得 $\operatorname{supp}(\mu)=K$。

(5) 设 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 非负，m 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度，$\mu(E) = \int_E f\, dm$ 定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的有限 Borel 测度。证明 $\mathrm{supp}\,(f) = \mathrm{supp}\,(\mu)$。

证明. 首先我们证明 $U = \mathrm{supp}\,(\mu)^c$ 为开集。因为任给 $x \in U$，存在包含 x 的 μ-零测开集 U_x，并且由定义 $U_x \subset U$。这就证明了 U 为开集。任给 μ-零测开集 V，由定义，$V \subset U$，故 U 为所有 μ-零测开集之并。下面证明 $\mu(U) = 0$。任给紧集 $K \subset U$ 和 $x \in K$，存在开集 $U_x \subset U$，$x \in U_x$ 且 $\mu(U_x) = 0$。$\{U_x\}$ 构成了 K 的一个开覆盖，故存在有限的 $U_{x_1}, \ldots, U_{x_N}$，$K \subset \bigcup_{i=1}^N U_{x_i}$。因此 $\mu(K) = 0$。因此 $\mu(U) = 0$。这就证明了 (1)。

设 $x \in \mathrm{supp}\,(\mu)$。任给 $f \in C_c(X, [0,1])$，$f(x) > 0$，存在包含 x 的开集 U_x，$\inf_{y \in U_x} f(y) > 0$。因此 $\int_X f\, d\mu \geqslant \inf_{y \in U_x} f(y) \cdot \mu(U_x) > 0$。反之，若 $x \notin \mathrm{supp}\,(\mu)$，存在包含 x 的 μ-零测开集 V_x。因此存在紧集 $K_x \subset V_x$ 且包含 x。显然 $\mu(K_x) = 0$。由 Urysohn 引理，存在 $f \in C_c(X, [0,1])$，$K_x \prec f \prec V_x$，$f(x) = 1 > 0$，但 $\int_X f\, d\mu = \int_{V_x} f\, d\mu \leqslant \mu(V_x) = 0$。这就证明了 (2)。

设 $K \subsetneqq \mathrm{supp}\,(\mu)$ 为紧集且 $\mu(K) = \lambda$，因此 K^c 为 μ-零测开集。从而 $K^c \subset \mathrm{supp}\,(\mu)^c$。因此 $K \supset \mathrm{supp}\,(\mu)$。矛盾。这证明了 (3)。

下面来构造 (4) 中的例子。$\mathbb{R}^n$ 为可分空间，故 K 亦为可分。设 $\{x_k\}$ 为 K 的稠密子集，μ_{x_k} 为 x_k 处的 Dirac 测度。定义 $\mu = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} \mu_{x_k}$。任给 $x \in K$ 以及任给 x 的邻域 U_x，存在 $x_k \in U_x$，因此 $\mu(U_x) \geqslant \mu(\{x_k\}) = 1/2^k > 0$。因此 $K \subset \mathrm{supp}\,(\mu)$。若 $x \notin K$，由 K 的紧性，存在 x 的邻域 V_x，使得 $V_x \cap K = \varnothing$。因此 $\mu(V_x) = 0$，即 $x \notin \mathrm{supp}\,(\mu)$。综上，$K = \mathrm{supp}\,(\mu)$。

设 $x \in \mathrm{supp}\,(f)$。任给 x 的邻域 U_x，由 f 支集的定义及 f 的连续性，存在 $B(y,r) \subset U_x$ 使得 $\inf_{z \in B(y,r)} f(z) > 0$，故 $\mu(U_x) \geqslant \mu(B(y,r)) = \int_{B(y,r)} f\, dy > 0$。从而 $x \in \mathrm{supp}\,(\mu)$。反之，若 $x \notin \mathrm{supp}\,(f)$，则存在 x 的邻域 U_x，$U_x \cap \mathrm{supp}\,(f) = \varnothing$。因此，$f$ 在 U_x 上恒等于 0，从而 $\mu(U_x) = \int_{U_x} f\, d\mu = 0$。这说明 $x \notin \mathrm{supp}\,(\mu)$。这就证明了 (5)。 □

8.5 L^p 空间

20 (上下确界卷积)**.** 假设 $f, g : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$，定义 f 和 g 的**下确界卷积** $f \bigtriangledown g : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ 为

$$\begin{aligned}(f \bigtriangledown g)(x) &= \inf\{f(x_1) + f(x_2) : x_1 + x_2 = x\} \\ &= \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{f(y) + g(x-y)\}.\end{aligned}$$

在凸分析中，下确界卷积是一个重要的概念（参见 [15]）。

21. 设 $0 < p < q < \infty$，$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$。证明任给 $\varepsilon > 0$ 和 $K > 0$，存在函数 $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\|f - g\|_p < \varepsilon$ 但 $\|g\|_q \geqslant K$。

22. 设 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 为概率测度空间, $1<p<\infty$, q 为 p 的共轭指数, $f\in L^p(X)$ 非负且 $\int_X f\,d\mu>\lambda>0$。证明

$$\int_X (f-\lambda)\,d\mu \leqslant \mu(\{f>\lambda\})^{1/q}\cdot\|f\|_p.$$

证明. 由 Hölder 不等式,

$$\int_X f\cdot\mathbf{1}_{\{f>\lambda\}}\,d\mu \leqslant \mu(\{f>\lambda\})^{1/q}\cdot\|f\|_p.$$

又 $f\cdot\mathbf{1}_{\{f>\lambda\}}\geqslant f-\lambda$,得证。 □

23. 设 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 为概率测度空间,X 上的可测函数 f 满足 $\|f\|_p=\|f\|_q$ $(0<p<q<\infty)$。证明 $|f|=\|f\|_p$,μ–a.e.。得证。

证明. 不是一般性,假设 $f\not\equiv 0$,a.e.。由 Hölder 不等式,$\int_X|f|^p\,d\mu\leqslant\left(\int_X|f|^q\,d\mu\right)^{p/q}=\int_X|f|^p\,d\mu$。由 Hölder 不等式等号成立的条件, $(|f|/\|f\|_p)^p=1$,a.e.。 □

24. 设 $(X,\mathfrak{M},\mu)$ 为概率测度空间,$f:X\to\mathbb{R}$ 可测,ϕ,ψ 为 $\mathbb{R}$ 上的单调函数。

(1) 证明 $\phi\circ f$ 与 $\psi\circ f$ 均可测。

(2) 若 ϕ,ψ 同时递增或递减,$\phi\circ f,\psi\circ f,f\in L^1(\mu)$,则

$$\left(\int_X\phi(f)\,d\mu\right)\cdot\left(\int_X\psi(f)\,d\mu\right)\leqslant\int_X\phi(f)\psi(f)\,d\mu.$$

(3) 与前题同样条件下,

$$\begin{aligned}&\psi\left(\int_X f\,d\mu\right)\int_X\phi(f)\,d\mu+\phi\left(\int_X f\,d\mu\right)\int_X\psi(f)\,d\mu\\ \leqslant&\int_X\phi(f)\psi(f)\,d\mu+\phi\left(\int_X f\,d\mu\right)\psi\left(\int_X f\,d\mu\right).\end{aligned}$$

(4) 若 ϕ,ψ 具有相反的单调性,则上面的两个不等号均反号。

(5) 若 $\|f\|_\infty<1$

证明. 首先注意到,单调函数 Borel 可测,故 $\phi(f)$ 和 $\psi(f)$ 均可测。这就证明了 (1)

因为 ϕ,ψ 同时递增或递减,故

$$(\psi(t)-\psi(s))(\phi(t)-\phi(s))\geqslant 0,\quad\forall s,t\in\mathbb{R}.\tag{8.1}$$

在(8.1)中取 $t = f(x)$ 和 $s = f(y)$ 得，

$$(\psi(f(x)) - \psi(f(y)))(\phi(f(x)) - \phi(f(y))) \geqslant 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

对 x 积分得

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(f)\psi(f)\, d\mu + \phi(f(y))\psi(f(y)) \\ - \psi(f(y)) \int_{\mathbb{R}} \phi(f)\, d\mu - \phi(f(y)) \int_{\mathbb{R}} \psi(f)\, d\mu \geqslant 0.$$

在对 y 积分得

$$2\int_{\mathbb{R}} \phi(f)\psi(f)\, d\mu - 2\left(\int_{\mathbb{R}} \phi(f)\, d\mu\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \psi(f)\, d\mu\right) \geqslant 0.$$

这就证明了 (2)。

在(8.1)中取 $t = f(x)$ 和 $s = \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu$，再对 x 积分即证明了 (3)。

若 ϕ, ψ 具有相反的单调性，则(8.1)的不等号变号，从而所有不等式取相反不等号。这就证明了 (4)。 □

25. 设 (X, μ) 为概率测度空间，存在 $r > 0$ 和非负可测函数 $f \in L^r(X, \mu)$ 使得 $\log(f) \in L^1(X, \mu)$（我们约定 $\log(0) = -\infty$）。定义 $[0, r]$ 上的函数 F:

$$F(p) = \int_X f^p\, d\mu, \quad p \in (0, r]; \qquad F(0) = 1.$$

证明 F 在 $[0, r)$ 上右可微并计算 F 的右导数。

证明. 回忆微积分的基本事实，任给 $t > 0$，设 $\phi(p) = (t^p - 1)/p$，$p > 0$。则

$$\phi'(p) = \frac{t^p \log(t^p) - (t^p - 1)}{p^2} = \frac{z\log(z) - z + 1}{p^2},$$

其中 $z = t^p > 0$。注意到，对函数 $\psi(z) = z\log(z) - z + 1$，$\psi(1) = 0$，$\psi''(z) > 0$（$z > 0$）且 $\psi'(1) = 0$。故 $\psi(z) \geqslant 0$（$z > 0$）。因此函数 ϕ 关于 p 是递增函数，并且 $\lim_{p \to 0^+} \phi(p) = \log(t)$。由条件，$|f|^r$ 和 $\log(f)$ 均几乎处处有限，又当 $p \leqslant r$ 时，函数 $(f^p - 1)/p$ 有上界为可积函数 $(f^r - 1)/r$。因此

$$\lim_{p \to 0^+} \frac{F(p) - F(0)}{p} = \lim_{p \to 0^+} \int_X \frac{f^p - 1}{p}\, d\mu = \int_X \log(f)\, d\mu.$$

一般，任给 $p \in [0, r)$，$\varepsilon_0 < r - p$ 以及任意 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$，

$$\frac{F(p+\varepsilon) - F(p)}{\varepsilon} = \int_X \frac{f^{p+\varepsilon} - f^p}{\varepsilon}\, d\mu = \int_X f^p \cdot \frac{f^\varepsilon - 1}{\varepsilon}\, d\mu.$$

注意上式右端被积函数有上界 $f^p \cdot \frac{f^{\varepsilon_0} - 1}{\varepsilon_0} \in L^1$（由 Hölder 不等式及条件 $f \in L^r$），故

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{F(p+\varepsilon) - F(p)}{\varepsilon} = \int_X f^p \log(f)\, d\mu.$$

这就证明了 F 在 $[0, r)$ 上右可微且右导数为 $\int_X f^p \log(f)\, d\mu$。 □

8.6 微分

26. 设 $f \in L^1([a,b])$ 满足

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b |f(t+h)-f(t)|\,dt = 0.$$

证明 f 几乎处处为常数。

证明. 设 x, y 为 f 的 Lebesgue 点，$a < x < y < b$。则

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x+h}^{y+h} |f(t+h)-f(t)|\,dt = 0.$$

从而

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x+h}^{y+h} (f(t+h)-f(t))\,dt = 0.$$

对充分小的 h，有等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_y^{y+h} f(t)\,dt &= \frac{1}{h}\int_x^{y} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_{x+h}^{y+h} f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{h}\int_{x+h}^{y+h} (f(t+h)-f(t))\,dt.\end{aligned}$$

令 $h \to 0$，则有 $f(x) = f(y)$。又几乎所有 $[a,b]$ 中点均为 Lebesgue 点，故 f 几乎处处为常数。 □

27. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为有限测度空间。若 f 非负可测，则 $f \in L^1(\mu)$ 当且仅当任给 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得 $\mu(A) < \delta \Longrightarrow \int_A f\,d\mu < \varepsilon$。

证明. 设 $E_k = \{f > n\}$ ($n \in \mathbb{N}$)，E_n 单调递减。因为 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \varnothing$，故 $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n) = 0$。任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，对充分大的 $N \in \mathbb{N}$，$\mu(E_N) < \delta$，从而 $\int_{E_N} f\,d\mu < \varepsilon$。因此

$$\int_X f\,d\mu = \int_{E_N} f\,d\mu + \int_{E_N^c} f\,d\mu \leqslant \varepsilon + N\cdot\mu(E_N^c) < \infty.$$

相反的反向由积分的绝对连续性得到。 □

28. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 为 Lebesgue 可测集，$D \subset \mathbb{R}^n$ 为一稠密子集。若对所有 $d \in D$ 有 $d + A = A$，证明 $m(A) = 0$ 或 $m(A^c) = 0$。

证明. 设 B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的任意开球，定义函数 $\varphi(x) = m(A \cap (x + B))$，则 φ 连续。注意到对任意 $d \in D$，

$$A \cap (d + B) = (d + A) \cap (d + B) = d + (A \cap B),$$

故 $\varphi(d) = m(A \cap B)$。因为 D 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密，这表明 $\varphi \equiv m(A \cap B)$。而且，对任意开球 B'，$r(B') = r(B)$，存在 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $x + B = B'$。结合 Lebesgue 微分定理，这表明

$$\lim_{r\to\infty} \frac{m(A \cap B(x,r))}{m(B(x,r))}$$

与 x 无关并且极限只能取 0 或 1，a.e.。第一种情形，$m(A) = 0$，另一种情形，$m(A^c) = 0$。 □

29. 设 $A \subset \mathbb{R}$ 为 Lebesgue 可测集。$d \in \mathbb{R}$ 称作 A 的周期若 $d + A = A$。若 A 具有任意小的周期，证明 $m(A) = 0$ 或 $m(A^c) = 0$。

证明. 不失一般性，假设 A 具有任意小的正周期，即 $\{d_n\}$ 为 A 的正周期周期序列且 $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$。定义集合 $D = \{md_n : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$。由习题28，只需证明 D 在 $\mathbb{R}$ 中稠密。事实上，任给 $x \in \mathbb{R}$，存在 $m_n \in \mathbb{Z}$，$a_n \in \mathbb{R}$，$|a_n| < d_n$ 使得 $x = m_n d_n + a_n$。又 $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$，故 D 在 R 中稠密。 □

30. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 可测，任给 $\lambda \in \mathbb{R}$ 定义 $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \lambda\}$，以及函数 $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ 为 $g(\lambda) = m(E_\lambda)$。证明 g 可测并计算 $\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d\lambda$。

证明. 注意到可测集列 $\{E_\lambda\}$ 是两两不交的。因此集合 $\{\lambda \in \mathbb{R} : m(E_\lambda) > 0\}$ 是可数的（参见习题13）。从而 $g = 0$，a.e.。因此 $\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d\lambda = 0$。 □

31. 证明若 $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$，则 f 的 Lebesgue 集为 Borel 集。

证明. 设 A 为 f 的 Lebesgue 集。我们断言

$$A = B := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{q\in\mathbb{Q}^n} \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - q|\, dy < \frac{1}{k} \right\}.$$

事实上，任给 $x \in A$，存在 $z \in \mathbb{R}$，使得

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - z|\, dy = 0.$$

从而对任意 $k \in \mathbb{N}$，存在 $q \in \mathbb{Q}^n$，使得 $|z - q| < 1/k$。从而

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - q|\, dy < \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

这就证明了 $A \subset B$。反之，若 $x \in B$，则任给 $k \in \mathbb{N}$，存在 $q_k \in \mathbb{Q}^n$，使得

$$\limsup_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - q_k|\, dy < \frac{1}{k}.$$

可以看出 $\{q_k\}$ 为 Cauchy 序列，这是因为由

$$|q_k - q_j| \leqslant \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y) - q_k|\, dy + \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y) - q_j|\, dy,$$

有 $|q_k - q_j| \leqslant 1/k + 1/j$。设 $z = \lim_{k\to\infty} q_k$，则

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y) - z|\, dy = 0.$$

因此 $B \subset A$。对任意 $r > 0$，函数

$$x \mapsto \int_{B(x,r)} |f(y) - q|\, dy$$

连续。故 A 是 Borel 可测的。 □

32. 我们来讨论一下 $\mathbb{R}^n$ 上某些子集的可测性。

(1) 证明 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测若 $m(\partial E) = 0$。

(2) 假设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中（可能不可数）半径不超过 1 的非退化闭球族之并，证明 E 可测。

(3) 证明上一题的结论即便对于闭球的半径没有限制亦成立。

(4) 证明上述的集合 E 可能不是 Borel 集。

(5) 如果在上面的问题中将闭球换成多面体，如何保证结论仍然成立?

8.7 $\mathbb{R}^1$ 上函数的微分

33. 设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$，$A \subset [a,b]$ 可测，$E = \{x \in A : f'(x)\text{ 存在}\}$。

(1) 若 f 单调递增且绝对连续。证明 $f(A)$ 可测且

$$\int_E f'(x)dx = m(f(E)) = m(f(A)).$$

(2) 若 $A = [a,b]$ 且 f 单调递增且绝对连续，证明 $f(E)$ 为零测集当且仅当 $f'(x) = 0$ 对几乎所有的 $x \in E$。

证明. 首先假设 $C \subset [a,b]$ 为开集，则 $C = \bigcup_{k\geqslant 1}(a_k, b_k)$，$(a_k, b_k)$ 两两不交。则

$$\begin{aligned} m(f(C)) &= m\left(f\left(\bigcup_{k\geqslant 1}(a_k,b_k)\right)\right) = \sum_{k\geqslant 1} m(f((a_k,b_k))) \\ &= \sum_{k\geqslant 1}(f(b_k) - f(a_k)) = \sum_{k\geqslant 1}\int_{a_k}^{b_k} f'(x)\, dx = \int_C f'(x)\, dx. \end{aligned}$$

设 $\{A_k\}$ 与 $\{B_k\}$ 为开集列，$A \subset A_k$，$f(A) \subset B_k$（$k \in \mathbb{N}$），且

$$\lim_{k\to\infty} m(A_k) = m(A), \quad \lim_{k\to\infty} m(B_k) = m(f(A)).$$

因为 $m(f(A)) \leqslant m(f(f^{-1}(B_k) \cap A_k)) \leqslant m(f(f^{-1}(B_k))) \leqslant m(B_k)$，故

$$\begin{aligned}
m^*(f(A)) &= \lim_{k\to\infty} m(f(f^{-1}(B_k) \cap A_k)) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{f^{-1}(B_k)\cap A_k} f'(x)\,dx \qquad (f^{-1}(B_k) \cap A_k \cap (a,b) \text{ 为开集}) \\
&= \int_A f'(x)\,dx = \int_E f'(x)\,dx.
\end{aligned}$$

因为 $A = E \cup N$，N 为零测集，f 为 N-函数，故 $f(A)$ 可测且 $m(f(A)) = m(f(E))$。这就证明了 (1)。

□

34. 设 f 为 $[a,b]$ 上的单调递增函数，$A\subset[a,b]$ 为 Lebesgue 可测集，$E=\{x\in A: f'(x)\text{ 存在}\}$。证明

$$\int_A f'(x)dx=m^*(f(E))\leqslant m^*(f(A)),$$

并且若进一步 f 绝对连续，则上式等号成立。

证明. 首先假设 f 绝对连续，并且 $C\subset[a,b]$ 为开集，则 $C=\bigcup_{k\geqslant1}(a_k,b_k)$，$(a_k,b_k)$ 两两不交。则

$$\begin{aligned}m(f(C))&=m\left(f\left(\bigcup_{k\geqslant1}(a_k,b_k)\right)\right)=\sum_{k\geqslant1}m(f((a_k,b_k)))\\&=\sum_{k\geqslant1}(f(b_k)-f(a_k))=\sum_{k\geqslant1}\int_{a_k}^{b_k}f'(x)\,dx=\int_C f'(x)\,dx.\end{aligned}$$

设 $\{A_k\}$ 与 $\{B_k\}$ 为开集列，$A\subset A_k$，$f(A)\subset B_k$（$k\in\mathbb{N}$），且

$$\lim_{k\to\infty}m(A_k)=m(A),\quad \lim_{k\to\infty}m(B_k)=m(f(A)).$$

因为 $m(f(A))\leqslant m(f(f^{-1}(B_k)\cap A_k))\leqslant m(f(f^{-1}(B_k)))\leqslant m(B_k)$，故

$$\begin{aligned}m^*(f(A))&=\lim_{k\to\infty}m(f(f^{-1}(B_k)\cap A_k))\\&=\lim_{k\to\infty}\int_{f^{-1}(B_k)\cap A_k}f'(x)\,dx\qquad (f^{-1}(B_k)\cap A_k\cap(a,b)\text{ 为开集})\\&=\int_A f'(x)\,dx.\end{aligned}$$

又 $A=E\cup N$，N 为零测集，故 f 的绝对连续性表明 $m(f(A))=m(f(E))$。这就证明了当 f 为绝对连续时，结论成立。

最后，$f=g+h$，其中 g 为单调递增的绝对连续函数，h 为单调递增的奇异函数。故

$$m^*(f(A))\geqslant m(f(E))\geqslant m(g(E)).$$

最后一个不等式是因为：任给 $\varepsilon>0$，存在 $U=\bigcup_{k\geqslant1}I_k\supset f(E)$，其中 $\{I_k\}$ 为两两不交的开区间，使得 $m(U)<m^*(f(E))+\varepsilon$。注意到 $\{f^{-1}(I_k)\}$ 为两两不交的可测集（区间，单点或空集），$m(g(f^{-1}(I_k)))\leqslant m(I_k)$，从而

$$\begin{aligned}m(g(E))&\leqslant m\left(g\left(\bigcup_{k\geqslant1}f^{-1}(I_k)\right)\right)\leqslant\sum_{k\geqslant1}m(g(f^{-1}(I_k)))\\&\leqslant\sum_{k\geqslant1}m(I_k)=m(U)\leqslant m^*(f(E))+\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性得到。

因此

$$m^*(f(A)) \geqslant m(g(E)) = \int_E g'(x)\,dx = \int_A f'(x)\,dx.$$

再由 Sard 定理，$m(f(E)) \leqslant \int_E f'(x)\,dx = \int_A f'(x)\,dx$。证毕。 $\square$

附录 A　不同观点看 Lebesgue 测度

A.1　Carathéodory 构造与 Lebesgue 测度

本附录将解释，教材正文中的关于 Lebesgue 测度的构造与一般的由外测度出发的 Carathéodory 构造之间的联系。

A.1.1　Carathéodory 构造

定义 A.1. 设 X 为一非空集合。$\mu^*: \mathscr{P}(X) \to [0,+\infty]$ 称作 X 上的**外测度**若

(1) $\mu^*(\varnothing)=0$。

(2) 若 $A \subset B$，则 $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$。

(3) $\mu^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k)$。

Carathéodory 给出了外测度的一种十分一般的构造。

命题 A.2. 设 $\mathscr{E}$ 为 X 的子集类包含了 $\varnothing$ 和 X，映射 $\rho: \mathscr{E} \to [0,+\infty]$ 满足 $\rho(\varnothing)=0$。则

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \rho(E_j) : E_j \in \mathscr{E}, A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\}, \quad A \in \mathscr{P}(X),$$

定义了 X 上的一个外测度。

证明. 对任意 $A \subset X$, 若对所有的 j 取 $E_j = X$, 则 $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j$, 从而 μ^* 是有意义的。若对所有的 j 取 $E_j=\varnothing$, 则得到 $\mu^*(\varnothing)=0$。外测度定义中的 (2) 由 μ^* 的定义得到。事实上, 若 $A \subset B$, 则覆盖 B 的 $\{E_j\}$ 的集合族比覆盖 A 的 $\{E_j\}$ 的集合族小。最后我们来验证可列可加性。设 $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(X)$ 且 $A=\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$。不妨假设每一 $\mu^*(A_j)<\infty$，否则平凡。任给 $\varepsilon>0$，对每一 j 存在 $\{E_j^k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}$ 使得 $A_j \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_j^k$ 且 $\sum_{k\in\mathbb{N}} \rho(E_j^k) < \mu^*(A_j) + 2^{-j}\varepsilon$。因此 $A \subset \bigcup_{j,k\in\mathbb{N}} E_j^k$ 且 $\sum_{j,k\in\mathbb{N}} \rho(E_j^k) < \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(A_j)+\varepsilon$。因此 $\mu^*(A) < \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu^*(A_j)+\varepsilon$。由 ε 的任意性，得证。 □

下面的一步是关键的。

定义 A.3. 若 μ^* 为一 X 上的外测度，集合 $A \subset X$ 称作 μ^***-可测**若满足下面的 **Carathéodory 判据**:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \quad E \in \mathscr{P}(X).$$

由外测度的次可加性，验证 Carathéodory 判据仅需验证

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \quad \forall E \in \mathscr{P}(X), \mu^*(E) < \infty.$$

定理 A.4 (Carathéodory)**.** *若 μ^* 为 X 上的外测度，则 μ^*-可测集组成集合类 $\mathfrak{M}^*$ 构成一个 σ-代数，并且 μ^* 限制在 $\mathfrak{M}^*$ 上为一完备的测度。*

证明. 首先注意到，容易看出 $A \in \mathfrak{M}^*$ 可以推出 $A^c \in \mathfrak{M}^*$。这可以从 Carathéodory 判据直接看出。$\varnothing \in \mathfrak{M}^*$ 且 $\mu^*(\varnothing) = 0$ 也是平凡的。因此 $X \in \mathfrak{M}^*$。余下的部分我们将证明可列可加性。

我们先证明有限可加性。假设 $A, B \in \mathfrak{M}^*$，$E \subset X$。则由 Carathéodory 判据

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)\\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c)\end{aligned}$$

由等式 $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ 及次可加性

$$\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \geqslant \mu^*(E \cap (A \cup B)).$$

故

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geqslant \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) + \mu^*(E \cap (A \cup B))\\ &= \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) + \mu^*(E \cap (A \cup B))\end{aligned}$$

因此 $A \cup B \in \mathfrak{M}^*$。若 $A, B \in \mathfrak{M}^*$ 且 $A \cap B = \varnothing$，则

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

这就证明了有限可加性。

欲证明 $\mathfrak{M}^*$ 为一 σ-代数，只需证明可列可加性。假设 $\{A_j\}$ 为一列两两不交的 μ^*-可测集。定义 $B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$ 和 $B = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$。任给 $E \subset X$，

$$\begin{aligned}\mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c)\\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}).\end{aligned}$$

由简单的归纳法有 $\mu^*(E\cap B_n)=\sum_{j=1}^n\mu^*(E\cap A_j)$。因此

$$\mu^*(E)=\mu^*(E\cap B_n)+\mu^*(E\cap B_n^c)\geqslant\sum_{j=1}^n\mu^*(E\cap A_j)+\mu^*(E\cap B^c).$$

令 $n\to\infty$ 我们有

$$\begin{aligned}\mu^*(E)&\geqslant\sum_{j=1}^\infty\mu^*(E\cap A_j)+\mu^*(E\cap B^c)\\&\geqslant\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty(E\cap A_j)\right)+\mu^*(E\cap B^c)\\&=\mu^*(E\cap B)+\mu^*(E\cap B^c)=\mu^*(E)\end{aligned}$$

因此上式为等式，从而 $B\in\mathfrak{M}^*$ 且满足可列可加性。

最后我们验证 $(X,\mathfrak{M}^*,\mu^*)$ 是完备测度空间。若 $\mu^*(A)=0$, 任给 $E\subset X$,

$$\mu^*(E)\leqslant\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap A^c)=\mu^*(E\cap A^c)\leqslant\mu^*(E).$$

因此 $A\in\mathfrak{M}^*$，从而完成了证明。 □

作为上述 Carathéodory 定理的应用, 我们来讨论一下如何将一个 “测度” 从一个集合代数扩张的一个 σ-代数上。

定义 A.5. 假设 $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(X)$ 为一集合代数。$\mu_0:\mathscr{A}\to[0,\infty]$ 称作**预测度**若

(1) $\mu_0(\varnothing)=0$。

(2) 若 $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{A}$ 两两不交且 $A=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\in\mathscr{A}$, 则 $\mu_0(A)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\mu_0(A_j)$。

若 $\mathscr{A}$ 为 X 上的集合代数, μ_0 为 $\mathscr{A}$ 上的预测度, 仿照前面 Carathéodory 构造，可以定义外测度

$$\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\mu_0(A_j):A_j\in\mathscr{A},E\subset\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j\right\}.\tag{A.1}$$

引理 A.6. *若 $\mathscr{A}$ 为 X 上的集合代数，μ_0 为 $\mathscr{A}$ 上的预测度，μ^* 如(A.1)定义，则 μ^* 限制在 $\mathscr{A}$ 上与 μ_0 相容，且 $\mathscr{A}$ 中元均 μ^*-可测。*

证明. 假设 $E\in\mathscr{A}$。若 $\{A_j\}\subset\mathscr{A}$ 且 $E\subset\bigcup_{j\in\mathbb{N}}A_j$，令 $B_1=E\cap A_1$, $B_n=E\cap(A_n\setminus\bigcup_{j=1}^{n-1}A_j)$ $(n\geqslant 2)$。则 $\{B_n\}$ 两两不交且 $E=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}B_j$。故

$$\mu_0(E)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\mu_0(B_j)\leqslant\sum_{j\in\mathbb{N}}\mu_0(A_j).$$

从而 $\mu_0(E) \leqslant \mu^*(E)$。相反的不等号是平凡的。因为我们只要选取 $A_1 = E$ 以及 $A_j = \varnothing$（$j \geqslant 2$）。综上 $\mu_0(E) = \mu^*(E)$。

假设 $A \in \mathscr{A}$，$E \subset X$。任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\{B_j\} \subset \mathscr{A}$，$E \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ 使得 $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_0(B_j) < \mu^*(E) + \varepsilon$。因为预测度 μ_0 满足有限可加性，故

$$\begin{aligned}\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_0(B_j) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_0(B_j \cap A) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_0(B_j \cap A^c)\\ &\geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).\end{aligned}$$

由 ε 任意性，$\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$。因此 A 满足 Carathéodory 判据，从而 A 为 μ^*-可测。证毕。 □

定理 A.7 (Carathéodory 扩张定理)**.** *设 μ_0 为集合代数 $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ 上的预测度，$\mathfrak{M}$ 为 $\mathscr{A}$ 生成的 σ-代数。则存在测度 μ 为 μ_0 从 $\mathscr{A}$ 到 $\mathfrak{M}$ 的扩张。确切地说，若 μ^* 为(A.1)所决定，则测度 μ 为外测度 μ^* 在 $\mathfrak{M}$ 上的限制。*

若 ν 为另一个 $\mathfrak{M}$ 上的测度且为 μ_0 的扩张，则 $\nu \leqslant \mu$，并且等号对满足 $\mu(E) < \infty$ 的 E 成立。若 μ_0 为 σ-有限，则上述扩张唯一。

证明. 由引理A.6，所有 μ^*-可测集 $\mathfrak{M}^*$ 构成的 σ-代数包含了 $\mathscr{A}$，从而包含了 $\mathfrak{M}$。设 μ 为 μ^* 在 $\mathfrak{M}$ 上的限制，由定理A.4，μ 为 $\mathfrak{M}$ 上的测度。再由引理A.6，μ 限制在 $\mathscr{A}$ 上与 μ_0 相容。这证明了定理的第一部分。

现假设 ν 为另一个 $\mathfrak{M}$ 上的测度且为 μ_0 的扩张。若 $E \in \mathfrak{M}$，$\{A_j\} \subset \mathscr{A}$ 使得 $E \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$，则 $\nu(E) \leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_0(A_j)$。因此 $\nu(E) \leqslant \mu(E)$。特别，对任意 $\{A_j\} \subset \mathscr{A}$，设 $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$，则 $A \in \mathfrak{M}$，

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \mu(A).$$

若 $\mu(E) < \infty$，任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\{A_j\} \subset \mathscr{A}$，$E \subset A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ 使得 $\mu(A) < \mu(E) + \varepsilon$。因此 $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$，

$$\mu(E) \leqslant \mu(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E) \leqslant \nu(E) + \mu(A \setminus E) \leqslant \nu(E) + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性，并结合前面的不等式，$\nu(E) = \mu(E)$。

最后，因为 μ_0 为 σ-有限，则存在 $\{A_j\} \subset \mathscr{A}$，$\mu_0(A_j) < \infty$（$j \in \mathbb{N}$）使得 $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$。不失一般性，我们可以假设 $\{A_j\}$ 两两不交。因此

$$\mu(E) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(E \cap A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(E \cap A_j) = \nu(E).$$

这就证明了唯一性。 □

注 A.8. 定理A.7的证明实际上蕴含了更多的信息。实际上 μ_0 可以扩张到所有 μ^*-可测集构成的 σ-代数 $\mathfrak{M}^*$ 上。

定理 A.9. *设 $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ 为一集合代数，μ_0 为 $\mathscr{A}$ 上的预测度，μ^* 为(A.1)决定的外测度。记 $\mathscr{A}_\sigma$ 为 $\mathscr{A}$ 中集合可数并组成的集合族，$\mathscr{A}_{\sigma\delta}$ 为 $\mathscr{A}_\sigma$ 中元的可数交组成的集合族。*

(1) *任给 $E \subset X$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $A \in \mathscr{A}_\sigma$，$E \subset A$，且 $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(E) + \varepsilon$。*

(2) *若 $\mu^*(E) < \infty$，则 E 为 μ^*-可测当且仅当存在 $B \in \mathscr{A}_{\sigma\delta}$ 使得 $E \subset B$ 且 $\mu^*(B \setminus E) = 0$。*

(3) *若 μ_0 为 σ-有限，结论(2)去掉 $\mu^*(E) < \infty$ 的条件亦成立。*

证明. 设 $\mathfrak{M}^*$ 为所有 μ^*-可测集构成的 σ-代数，由注A.8，设 μ 为定理A.7决定的 μ_0 到 $\mathfrak{M}^*$ 上的扩张。

不失一般性假设 $\mu^*(E) < \infty$。任给 $E \subset X$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathscr{A}_\sigma$（不失一般性，可假设 $\{A_j\}$ 两两不交），$E \subset A$ 使得

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_0(A_j) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j) = \mu(A) = \mu^*(A).$$

这就证明了 (1)。

下面证明 (2)。若存在 $B \in \mathscr{A}_{\sigma\delta}$ 使得 $E \subset B$ 且 $\mu^*(B \setminus E) = 0$，由定理A.4，$B \setminus E \in \mathfrak{M}^*$。因此 $E = B \cup (B \setminus E) \in \mathfrak{M}^*$。反之，我们假设 $E \in \mathfrak{M}^*$ 且 $\mu^*(E) < \infty$。由 (1)，存在 $A_j \in \mathscr{A}_\sigma$，$E \subset A_j$ 使得

$$\mu(A_j) = \mu^*(A_j) < \mu^*(E) + \frac{1}{j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

定义 $B = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j$，则 $B \in \mathscr{A}_{\sigma\delta}$ 且 $E \subset B$

$$\mu^*(B \setminus E) = \mu(B \setminus E) = \mu(B) - \mu(E) \leqslant \mu(A_j) - \mu^*(E) < \frac{1}{j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

由 j 的任意性，$\mu^*(B \setminus E) = 0$。

最后，若 μ_0 为 σ-有限。存在 $\{A_j\} \in \mathscr{A}$，$\mu_0(A_j) < \infty$（不失一般性，可假设 $\{A_j\}$ 两两不交）使得 $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$。对每一 $E_j = E \cap A_j$ 运用 (2) 得到相应的 B_j，再令 $B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ 即可。 □

类似如前面 Lebesgue 测度的构造，我们也可以引入内测度。

定义 A.10. 设 μ_0 为集合代数 $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ 上的预测度且 $\mu_0(X) < \infty$。μ^* 为(A.1)决定的外测度。定义集合 $E \subset X$ 的**内测度**为

$$\mu_*(E) = \mu_0(X) - \mu^*(E^c).$$

命题 A.11. 设 μ_0 为集合代数 $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ 上的预测度且 $\mu_0(X) < \infty$。μ^* 为(A.1)决定的外测度。则 $\mu_* \leqslant \mu^*$，并且 E 为 μ^*-可测当且仅当 $\mu^*(E) = \mu_*(E)$。

证明. 由内测度的定义及外测度的次可加性，$\mu_* \leqslant \mu^*$。设 $\mathfrak{M}^*$ 为所有 μ^*-可测集构成的 σ-代数，由注A.8，设 μ 为定理A.7决定的 μ_0 到 $\mathfrak{M}^*$ 上的扩张。

若 E 为 μ^*-可测，存在 $A, B \in \mathscr{A}_{\sigma\delta}$，$A \supset E^c$，$B \supset E$ 使得 $\mu^*(A \setminus E^c) = \mu^*(B \setminus E) = 0$。因此

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\leqslant \mu^*(B) = \mu(B) = \mu(A^c) + \mu(B \setminus A^c)\\ &\leqslant \mu(A^c) + \mu^*(B \setminus E) = \mu(X) - \mu^*(A)\\ &\leqslant \mu(X) - \mu^*(E^c) = \mu_*(E).\end{aligned}$$

故 $\mu^*(E) = \mu_*(E)$。

反之，假设 $\mu^*(E) = \mu_*(E)$。由定理A.9 (1)，存在 $A_j, B_j \in \mathscr{A}_\sigma$，$A_j \supset E^c$，$B_j \supset E$，使得

$$\mu(A_j) < \mu^*(E^c) + \frac{1}{2j}, \quad \mu(B_j) < \mu^*(E) + \frac{1}{2j}$$

因此

$$\begin{aligned}\mu(B_j \setminus E) &\leqslant \mu(B_j \setminus A_j^c) = \mu(B_j) - \mu(A_j^c) = \mu(B_j) - (\mu(X) - \mu(A_j))\\ &\leqslant \mu^*(E) + \frac{1}{2j} - \mu(X) + \mu^*(E^c) + \frac{1}{2j}\\ &\leqslant \frac{1}{j}.\end{aligned}$$

令 $B = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_j$，则 $\mu(B \setminus E) \leqslant \frac{1}{j}$。由 j 的任意性，$\mu(B \setminus E) = 0$。定理A.9 (2) 表明 E 为 μ^*-可测。 □

下面我们来解释，定理A.4中的测度是定理A.7中的测度的完备化。

定理 A.12. 设 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 为一测度空间。μ^* 为(A.1)决定的外测度，$\mathfrak{M}^*$ 为 μ^*-可测集的 σ-代数，测度 $\bar{\mu}$ 为 μ^* 在 $\mathfrak{M}^*$ 上的限制。若 μ 为 σ-有限，则 $(X, \mathfrak{M}^*, \bar{\mu})$ 为 $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ 的完备化。

证明. 分别对 E 和 E^c 运用定理A.9的 (3)。 □

A.1.2 Lebesgue 测度与 Carathéodory 构造

我们回忆前面我们在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上构造 Lebesgue 测度 m 的过程。

- 首先对每一特殊矩体 $I=\prod_{i=1}^n[a_i,b_i]$, 定义 $m(I)=\text{vol}\,(I)=\prod_{i=1}^n(b_i-a_i)$ 使得我们构造的 $m(I)$ 与几何体 I 的体积 vol(I) 相容。这一点是十分自然的。对于有限个特殊矩体之并构成的特殊多面体亦然。

- 因为任意开集 $G\subset\mathbb{R}^n$ 均可写成内部不交的可数个特殊矩体 I_k 之并，即 $\mathbb{R}^n=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}I_k$，因此开集 G 的“测度” $m(G)$ 已经可以理解为这些特殊矩体的体积之并。从这个意义上，开集的测度也是与其几何意义下的体积相容的。至于紧集 K，因为我们当然也可以理解 $m(K)$ 通过它关于某包含它的有界开集 $G\supset K$ 的补集 $G\setminus K$（为开集）来理解。注意到，我们实际上是用内测度 $m_*(K)$ 来理解的。

- 在接下来一步，考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的拓扑 τ，因为 τ 中元在（可数）并运算下封闭，因此我们实际上是按照 Carathéodory 构造定义了外测度 m^*。如果直接利用定理A.4，我们就得到了利用 Carathéodory 判据定义的 m^*-可测集类 $\mathfrak{M}^*$，以及 m^* 限制在 $\mathfrak{M}^*$ 为一完备测度，即 Lebesgue 测度。不过我们接下来详细解释了这一过程。

- 在第五步，我们是沿用命题A.11的表述来定义一个 m^*-可测集类 $\mathscr{L}_0$，它为一集合代数。这一步我们实际是说明了 m 为 $\mathscr{L}_0$ 上的预测度。

- 最后一步，我们运用 Carathéodory 扩张定理验证了 m 可以扩张到 $\mathscr{L}$ 成为 Lebesgue 测度。这个过程我们需要运用逼近性质定理A.9。注意这里我们使用了条件“预测度 m 为 σ-有限”，因为 m 在紧集上有限且 $\mathbb{R}^n$ 为 σ-紧。

利用 Carathéodory 扩张定理，我们还可以看出，从包含 τ 的最小集合代数 $\mathscr{A}(\tau)$ 出发，我们可以将 m 扩张成 $\mathscr{A}(\tau)$ 上的一个预测度，再扩张到 Borel 集类 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ 上，使得 $(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}(\mathbb{R}^n),m)$ 为一 Borel 测度空间。而 $(\mathbb{R}^n,\mathscr{L},m)$ 为 $(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}(\mathbb{R}^n),m)$ 的完备化。

A.2 Brunn-Minkowski 不式及其应用

下面我们提供 Brunn-Minkowski 不等式(4.4)另一个解析的证明。

定理 A.13 (Prékopa–Leindler 不等式)**.** 设 $\lambda \in (0,1)$，f, g, h 为 $\mathbb{R}^n$ 上的非负可积函数，且

$$h((1-\lambda)x+\lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

则

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\, dm \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\, dm\right)^{1-\lambda} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\, dm\right)^{\lambda}.$$

定理A.13的证明我们将放了后面的章节。下面我们利用 Prékopa–Leindler 不等式来证明 Brunn-Minkowski 不等式。

定理 A.14 (Brunn-Minkowski 不等式 II)**.** 假设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$，且 $\lambda A + (1-\lambda)B$ 对 $\lambda \in [0,1]$ 均可测（比如 A, B 均为紧集），则不等式(4.4)成立。

证明. 在 Prékopa–Leindler 不等式中，取 $f = \mathbf{1}_A$，$g = \mathbf{1}_B$ 和 $h = \mathbf{1}_{(1-\lambda)A+\lambda B}$ ($\lambda \in (0,1)$)。我们断言

$$h((1-\lambda)x+\lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

事实上，若上式右端为 0，自然成立，否则 $f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} = 1$，这意味着 $x \in A$ 且 $y \in B$，从而 $(1-\lambda)x + \lambda y \in (1-\lambda)A + \lambda B$，因此 $h((1-\lambda)x+\lambda y) = 1$。

现在 Prékopa–Leindler 不等式表明

$$m((1-\lambda)A+\lambda B) \geqslant m(A)^{1-\lambda} m(B)^{\lambda}.$$

□

参考文献

[1] Bauer, H. Measure and integration theory. Translated from the German by Robert B. Burckel. *De Gruyter Studies in Mathematics*, 26. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2001.

[2] Brown, A.; Pearcy, C., An introduction to analysis. *Graduate Texts in Mathematics*, 154. Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] Bruckner, A. M.; Bruckner, J. B.; Thomson, B. S., Real Analysis, Second Edition, CreateSpace, 2008.

[4] Bruckner, A. M.; Ceder, J., *On improving Lebesgue measure*. Nordisk Mat. Tidskr. **23** (1975), no. 2, 59–68.

[5] Chae, S. B., Lebesgue integration. Second edition. *Universitext*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[6] DiBenedetto, E., Real analysis. *Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[7] U. Dini, Fondamenti per la Teorica delle Funzioni di una Variabile Reale, Pisa, 1878; reprint of Unione Matematica Italiana, Bologna.

[8] Dudley, R. M., Real analysis and probability. Revised reprint of the 1989 original. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 74. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[9] Dugundji, J., Topology. Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass. 1966.

[10] Evans, L. C.; Gariepy, R. F., Measure theory and fine properties of functions. *Studies in Advanced Mathematics*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[11] Folland, G. B., Real analysis. Modern techniques and their applications. Second edition. *Pure and Applied Mathematics*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999

[12] Gardner, R. J., *The Brunn-Minkowski inequality*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), no. 3, 355–405.

[13] Hewitt, E.; Stromberg, K., Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable. Third printing. *Graduate Texts in Mathematics*, No. 25. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[14] Hirsch, M. W., Differential topology. *Graduate Texts in Mathematics*, No. 33. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.

[15] Hiriart-Urruty, J.-B.; Lemaréchal, C., Fundamentals of convex analysis. *Grundlehren Text Editions*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[16] Kaplansky, I., Set theory and metric spaces. Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics. Allyn and Bacon, 1972.

[17] Royden, H. L. Real analysis. Third edition. Macmillan Publishing Company, New York, 1988.

[18] Jones, F., Lebesgue integration on Euclidean space. Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1993.

[19] Rudin, W., Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[20] Solovay, R. M., *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*. Ann. of Math. (2) **92**(1970) 1–56.

[21] Stein, E. M.; Shakarchi, R., Real analysis. Measure theory, integration, and Hilbert spaces. *Princeton Lectures in Analysis*, III. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

[22] Stromberg, K., *The Banach-Tarski paradox*. Amer. Math. Monthly **86** (1979), no. 3, 151–161.

[23] Wheeden, R. L.; Zygmund, A., Measure and integral. An introduction to real analysis. Second edition. *Pure and Applied Mathematics*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.

[24] 那汤松，实变函数论，第五版，俄罗斯数学教材选译，高等教育出版社，2010.

[25] 周民强，实变函数论，第二版，北京大学出版社，2001.