第45卷第1期 数 学 学 报 Vol.45, No.1
2002年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA Jan., 2002

文章编号: 0583-1431(2002)01-0127-12 **文献标识码**: **A**

Gorenstein 代数上的逼近扩张

黄兆泳

(南京大学数学系 江苏 南京 210093)

摘 要 本文引进了 (极小) 逼近扩张，证明了极小逼近扩张在 Gorenstein 代数上的存在性和唯一性，并给出了极小逼近扩张的一个应用.

关键词 Gorenstein 代数；极小逼近扩张； CM 模
MR(2000) 主题分类 16E30, 16G30, 16G50
中图分类 O153.3

Approximation Extensions over Gorenstein Algebras

HUANG Zhao Yong

(*Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing* 210093, *P. R. China*)

Abstract In this paper, the notion of (minimal) approximation extensions is introduced, the existence and uniqueness of minimal approximation extensions over Gorenstein algebras are established, an application to minimal approximation extensions is given.

Keywords Gorenstein algebras; Minimal approximation extensions; CM modules
MR(2000) Subject Classification 16E30, 16G30, 16G50
Chinese Library Classification O153.3

本文中的 Λ 是 artin 代数，即 Λ 是一个交换 artin 环 R 上的代数且 Λ 作为 R- 模是有限生成的. $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 表示由有限生成左 Λ- 模组成的模范畴. 本文研究的模均指有限生成模.

设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 的全子范畴，对 $C \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ 和 $X \in \mathcal{X}$, 态射 $f: X \to C$ 称为 C 的一个右 $\mathcal{X}$- 逼近，如果对任意 $X' \in \mathcal{X}$ 和一个态射 $f': X' \to C$, 总存在 $t: X' \to X$, 使得 $f' = ft$. 设 $f: X \to C$ 是 C 的一个右 $\mathcal{X}$- 逼近，如果态射 $t: X \to X$ 满足 $f = ft$ 意味着 t 是一个同构，则称 $f: X \to C$ 为 C 的极小右 $\mathcal{X}$- 逼近. 对偶地，有 (极小) 左 $\mathcal{X}$- 逼近的定义 (见文献 [1]). 易知，对任意 Λ- 模 C, C 的极小右 (左) $\mathcal{X}$- 逼近在同构的意义下是唯一的.

一个代数 Λ 称为 Gorenstein 代数，如果 $\mathrm{l.id}_\Lambda(\Lambda) = \mathrm{r.id}_\Lambda(\Lambda) < \infty$, 这里 $\mathrm{l.id}_\Lambda(\Lambda)$ ($\mathrm{r.id}_\Lambda(\Lambda)$) 表示 Λ 的左 (右) 自内射维数. 我们用 $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$ ($\mathcal{P}^\infty(\Lambda)$) 表示由内射维数 (投射维数) 有限的左 Λ- 模组成的模范畴. 由文献 [1] 知，当 Λ 是 Gorenstein 代数时， $\mathcal{I}^\infty(\Lambda) = \mathcal{P}^\infty(\Lambda)$. 我们还用 $\mathrm{CM}(\Lambda)$ 表示由对任意 $i \geq 1$ 满足 $\mathrm{Ext}_\Lambda^i(M, \Lambda) = 0$ 的左 Λ- 模 M 组成的模范畴. $\mathrm{CM}(\Lambda)$ 中的模称为 Cohen-Macaulay 模，简称 CM 模.

Auslander M. 和 Reiten I. 在文献 [1] 中证明了，对 Gorenstein 代数 Λ, 下列陈述成立：

收稿日期： 1998-12-29; 修改日期： 1999-11-15; 接受日期： 2000-10-13
基金项目：国家自然科学青年基金 (10001017); 教育部留学回国人员科研启动基金；南京大学人才培养基金资助项目

(1) 存在唯一的正合序列

$$\eta^C : 0 \longrightarrow C \xrightarrow{f^C} Y^C \longrightarrow X^C \longrightarrow 0,$$

使得 $f^C : C \to Y^C$ 是 C 的极小左 $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$- 逼近, $X^C \in \mathrm{CM}(\Lambda)$.

(2) 存在唯一的正合序列

$$\eta_C : 0 \longrightarrow Y_C \longrightarrow X_C \xrightarrow{f_C} C \longrightarrow 0,$$

使得 $f_C : X_C \to C$ 是 C 的极小右 $\mathrm{CM}(\Lambda)$- 逼近, $Y_C \in I^\infty(\Lambda)$.

这两个正合序列使我们总可以视任意模为具有有限内射维数的模到 CM 模的一个态射的核或上核. 这样, 自然地就有如下问题: 设 $M, N \in \mathrm{mod}\,\Lambda$. (1) 研究 Y^M 和 X^M 能得出 M 的什么性质呢? (2) 在什么条件下, $Y^M \cong Y^N$ 蕴含着 $M \cong N$?

为了研究以上问题, 受 Auslander M. 和 Bridger M. 在文献 [2] 中的逼近定理的启发, 本文首先引进了 (极小) 逼近扩张的概念, 证明了 Gorenstein 代数上任意模都有唯一的极小逼近扩张. 然后利用这类扩张来研究上面的问题, 得到了一些有趣的结果.

1 预备知识

本节将给出一些引理, 并引进 (极小) 逼近扩张的概念.

设 $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$. 用 M^* 表示 $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda)$, 用 $\sigma_M : M \to M^{**}$ (对任意 $x \in M$, $\varphi \in M^*$, $\sigma_M(x)(\varphi) = \varphi(x)$) 表示典范赋值同态. 如果 σ_M 是一个同构, 则称 M 为自反模.

设 $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, $P \xrightarrow{f} M^*$ 是 Λ^{op}- 模 M^* 的投射覆盖. 令 h 是合成同态: $M \xrightarrow{\sigma_M} M^{**} \xrightarrow{f^*} P^*$ (即 $h = f^*\sigma_M$). 设 $P_1 \in \mathcal{P}(\Lambda)$ (即由投射左 Λ- 模组成的模范畴), $g : M \to P_1$ 是 Λ- 模同态. 考虑下图:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & P^* \\ {\scriptstyle g}\big\downarrow & & \\ P_1 & \xrightarrow{\sigma_{P_1}} & P_1^{**} \end{array}$$

图 1.1

显然, 典范同态 σ_{P_1} 是一个同构. 因为 P_1^* 是一个投射 Λ^{op}- 模, 所以存在同态 $s : P_1^* \to P$, 使得 $g^* = fs$, 从而 $g^{**} = s^*f^*$. 因为有可换图:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & P_1 \\ \big\downarrow{\scriptstyle \sigma_M} & & \big\downarrow{\scriptstyle \sigma_{P_1}} \\ M^{**} & \xrightarrow{g^{**}} & P_1^{**} \end{array}$$

即 $g = \sigma_{P_1}^{-1} g^{**} \sigma_M$, 所以 $\sigma_{P_1}^{-1} s^* h = \sigma_{P_1}^{-1} s^* f^* \sigma_M = \sigma_{P_1}^{-1} g^{**} \sigma_M = g$, 即存在同态 $\sigma_{P_1}^{-1} s^* : P^* \to P_1$, 使得图 1.1 为交换图. 故 $M \xrightarrow{h} P^*$ 是 M 的左 $\mathcal{P}(\Lambda)$- 逼近.

引理 1 上面得到的同态 $M \xrightarrow{h} P^*$ 是 M 的极小左 $\mathcal{P}(\Lambda)$- 逼近.

证明 设同态 $t : P^* \to P^*$ 满足 $h = th$. 我们要证 t 是一个同构.

由文献 [3, 命题 23.5], $\sigma_M^* \sigma_{M^*} = 1_{M^*}$. 因为 $\sigma_{M^*} f = f^{**} \sigma_P$, 所以 $f = \sigma_M^* f^{**} \sigma_P = (f^* \sigma_M)^* \sigma_P = h^* \sigma_P = (th)^* \sigma_P = (tf^* \sigma_M)^* \sigma_P = (\sigma_M^* f^{**}) t^* \sigma_P = f(\sigma_P^{-1} t^* \sigma_P)$. 因为 $P \xrightarrow{f} M^*$

是 M^* 的投射覆盖，所以 $\sigma_P^{-1}t^*\sigma_P$ 是 P 的一个自同构. 因此 t^* 和 t 分别是 P^{**} 和 P^* 的自同构.

引理 2 设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 的全子范畴，态射 $f: C \to X$ 是 Λ- 模 C 的极小左 $\mathcal{X}$- 逼近. 若有交换图：

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & X \\ \Big\downarrow \alpha & & \Big\downarrow \beta \\ C & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

其中 α 是同构，则 β 也是同构.

证明 考虑下图：

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & X \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] & X \arrow[d, dashed, "\beta'"] \\ C \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

因为 $f: C \to X$ 是左 $\mathcal{X}$- 逼近，所以存在 $\beta': X \to X$, 使得 $\beta' f = f\alpha^{-1}$. 于是 $f = f(\alpha^{-1}\alpha) = (\beta' f)\alpha = (\beta'\beta)f$. 由于 f 又是极小的，因此 $\beta'\beta$ 是同构，从而 β 和 β' 也是同构.

设 Λ 是一个 artin R- 代数. 易知，如果 $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, 则 $M \in \mathrm{mod}\,R$. 因此对任意 $M, N \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, $T = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ 是一个有限生成 R- 模. 由文献 [4, 推论 15.21] 知， T 有一个 R- 模合成列. 我们用 $c_R(T)$ 表示 T 的合成列的长度.

引理 3 设 $\theta: 0 \to A \to B \to C \to 0$ 是一个 Λ- 模正合序列. 如果 θ 不分裂，则 $c_R(\mathrm{End}_\Lambda(B)) < c_R(\mathrm{End}_\Lambda(A \oplus C))$.

证明 在文献 [5, 第 60 页引理 1] 的证明中，我们用模的合成列的长度代替模作为域上向量空间的维数，即知结论成立.

由引理 3, 立即有如下有趣的结论.

命题 1 设 $\theta: 0 \to A \to B \to C \to 0$ 是一个 Λ- 模正合序列. 则 θ 是分裂的当且仅当 $B \cong A \oplus C$.

设 $C \in \mathrm{mod}\,\Lambda$. 如果 C 没有非零的投射直和项，则称 C 为稳定模 [2]. 一个没有非零的投射直和项的 CM 模称为稳定 CM 模.

设有 Λ- 模正合序列 $0 \to M \to P \to N \to 0$, 其中 $P \to N \to 0$ 是 N 的投射覆盖. 我们记 $M = \Omega^1(N)$.

以下，设 Λ 是一个 Gorenstein 代数.

引理 4 若 $N \in \mathrm{CM}(\Lambda)$, 则 $\Omega^1(N)$ 是稳定模.

证明 我们有正合序列 $0 \to \Omega^1(N) \xrightarrow{\varphi} P \xrightarrow{\phi} N \to 0$, 其中 $\phi: P \to N$ 是 N 的投射覆盖. 设 $\Omega^1(N) = X_1 \oplus P_1$, 其中 X_1 为稳定模， P_1 为投射模. 注意到 $N \in \mathrm{CM}(\Lambda)$, 于是有正合序列 $0 \to N^* \xrightarrow{\phi^*} P^* \xrightarrow{\varphi^*} X_1^* \oplus P_1^* \to 0$, 其中 $P^* \xrightarrow{\varphi^*} X_1^* \oplus P_1^*$ 是 $X_1^* \oplus P_1^*$ 的投射覆盖，所以存在投射模 P_2, 使得

$$P^* \cong P_2 \oplus P_1^* \ \text{且}\ \varphi^* \cong \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\delta: P_2 \to X_1^* \to 0$ 是 X_1^* 的投射覆盖且 $\mathrm{Ker}\delta \cong N^*$. 由文献 [1, 命题 3.1] 知, $\Omega^1(N)$ 和 $[\Omega^1(N)]^*$ 都是 CM 模, 因此 X_1^* 也是 CM 模. 于是由正合序列 $0 \to N^* \to P_2 \xrightarrow{\delta} X_1^* \to 0$ 可得正合序列 $0 \to X_1^{**} \xrightarrow{\delta^*} P_2^* \to N^{**} \to 0$, 其中 $P_2^* \to N^{**}$ 是 N^{**} 的投射覆盖. 而由文献 [6, 定理 3.1, 4.1 和 4.2] 知, N 是自反模, 即 $N \cong N^{**}$, 所以 $P_2^* \cong P \cong P^{**} \cong P_2^* \oplus P_1^{**} \cong P_2^* \oplus P_1$, 故 $P_1 = 0$, 即 $\Omega^1(N)$ 是一个稳定模.

引理 5 对任意 $C \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, X^C (见引言) 和 $\Omega^1(X^C)$ 均是稳定模.

证明 因为 $X^C \in \mathrm{CM}(\Lambda)$, 所以由引理 4 即知 $\Omega^1(X^C)$ 是稳定模. 下证 X^C 也为稳定模. 不妨设 $X^C = X \oplus Q$, 其中 X 是稳定模, Q 为投射模. 考虑如下的拉回图:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "i"] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\eta^C : 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f^C"] & Y^C \arrow[r] \arrow[d] & X^C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & Q \arrow[r, equal] \arrow[d] & Q \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

图 1.2

因为 Q 为投射模, 所以图 1.2 的中间列分裂, 从而 $Y^C \cong Y \oplus Q$ 且存在 $\pi : Y^C \to Y$, 使得 $\pi i = 1_Y$. 因为 $Y \in \mathcal{I}^\infty(\Lambda)$ 且 $X \in \mathrm{CM}(\Lambda)$, 所以图 1.2 中的 $f : C \to Y$ 是 C 的一个左 $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$- 逼近, 且不难证明它是极小的. 于是由 C 的极小左 $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$- 逼近的唯一性知, $Y \cong Y^C \cong Y \oplus Q$, 故 $Q = 0$, 即 X^C 是一个稳定模.

引理 6 设 $0 \to C \xrightarrow{f} Y \to X \to 0$ 是一个 Λ- 模正合序列. 如果 $Y \in \mathcal{I}^\infty(\Lambda)$, X 是一个稳定 CM 模, 则 $Y \cong Y^C$ 和 $X \cong X^C$ (参见引言中的正合序列 η^C).

证明 注意到当 Λ 是 Gorenstein 代数时, $\mathcal{I}^\infty(\Lambda) = \mathcal{P}^\infty(\Lambda)$, 所以易知 $C \xrightarrow{f} Y$ 是一个左 $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$- 逼近. 又 $C \xrightarrow{f^C} Y^C$ 也是一个左 $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$- 逼近, 所以存在同态 g_1 和 h_1, 使得下图可换:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f^C"] \arrow[d, equal] & Y^C \arrow[r] \arrow[d, "g_1"] & X^C \arrow[r] \arrow[d, "g_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & X \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f^C"] & Y^C \arrow[r] & X^C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

其中 g_2 和 h_2 为导出同态. 因为 f^C 是极小的, 所以 $h_1 g_1$ 是同构, 从而 $h_2 g_2$ 也是同构, 于是知 g_1 和 g_2 是分裂单同态. 由 Snake 引理知, $\mathrm{Coker}\, g_1 = \mathrm{Coker}\, g_2$. 由于 $\mathrm{Coker}\, g_1 \in \mathcal{I}^\infty(\Lambda)$,

$\operatorname{Coker} g_2 \in \mathrm{CM}(\Lambda)$, 所以由文献 [1] 命题 3.1(e) 知，$\operatorname{Coker} g_2$ 是投射模．而 $X \cong X^C \oplus \operatorname{Coker} g_2$ 且 X 是稳定模，所以 $\operatorname{Coker} g_2 = 0$. 故 $X \cong X^C$, $Y \cong Y^C$.

下面我们将引进 (极小) 逼近扩张的概念．这一思想是受 Auslander M. 和 Bridger M. 的逼近定理 [2] 的启发.

定义 (1) 设 $C \in \operatorname{mod}\Lambda$. C 的一个逼近扩张是指一个正合序列

$$\eta : 0 \longrightarrow X \longrightarrow C \oplus P \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

其中 $X \in \mathrm{CM}(\Lambda)$, $Y \in \mathcal{I}^{\infty}(\Lambda)$ 且 P 是一个投射 Λ- 模.

(2) 如果上面的逼近扩张 η 满足下面的两个条件，则称 η 为 C 的极小逼近扩张.

(AE_1) X 是稳定模;

(AE_2) 设 $\eta' : 0 \to X' \to C \oplus P' \to Y' \to 0$ 是 C 的任意逼近扩张，则存在同态 $\alpha : X \to X'$, $\beta_1 : C \oplus P \to C \oplus P'$ 和 $\gamma : Y \to Y'$, 使得 $\beta_1 \cong \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right)$ (其中 $\beta : P \to P'$) 且使下图可换:

$$\begin{tikzcd}
\eta : 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & C \oplus P \arrow[r] \arrow[d, "\beta_1 \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
\eta' : 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & C \oplus P' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

引理 7 设 $C \in \operatorname{mod}\Lambda$. 如果 $0 \to X \to C \oplus P \to Y \to 0$ 是 C 的一个逼近扩张，则存在 C 的逼近扩张 $0 \to X' \to C \oplus P \to Y' \to 0$, 使得 X' 是 X 的一个稳定子模.

证明 设 $X = X' \oplus Q$, 其中 X' 为稳定 CM 模，Q 为投射模．考虑下面的正合交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d] & C \oplus P \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & C \oplus P \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & Q \arrow[d, dash] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

图 1.3

由 Snake 引理，我们有正合序列 $0 \to Q \to Y' \to Y \to 0$, 所以 $Y' \in \mathcal{I}^{\infty}(\Lambda)$, 从而图 1.3 中的上行即为所需的逼近扩张.

2　极小逼近扩张的存在性和唯一性

本节将建立任意模的极小逼近扩张的存在性和唯一性．以下，Λ 仍指 Gorenstein 代数.

定理 1 对任意 $C \in \operatorname{mod}\Lambda$, 存在 C 的极小逼近扩张.

证明 设 $C \in \operatorname{mod}\Lambda$, $0 \to C \xrightarrow{f^C} Y^C \to X^C \to 0$ 是引言中的正合序列 η^C, 这里 $C \xrightarrow{f^C} Y^C$ 是 C 的极小左 $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$- 逼近, $X^C \in \mathrm{CM}(\Lambda)$. 考虑下面的拉回图:

$$\begin{tikzcd}
 & & \zeta^C \arrow[d, phantom, "\vdots"] & & \\
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \Omega^1(X^C) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega^1(X^C) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \oplus P \arrow[r] \arrow[d, "\pi^C"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\
\eta^C : 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f^C"] & Y^C \arrow[r] \arrow[d] & X^C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

图 2.1

其中 $\phi : P \to X^C$ 是 X^C 的投射覆盖. 因为 $X^C \in \mathrm{CM}(\Lambda)$, 所以 $\Omega^1(X^C) \in \mathrm{CM}(\Lambda)$. 因此图 2.1 的中间列 $\zeta^C : 0 \to \Omega^1(X^C) \to C \oplus P \xrightarrow{\pi^C} Y^C \to 0$ 是 C 的一个逼近扩张. 我们断言, ζ^C 是 C 的一个极小逼近扩张.

由引理 5 知, ζ^C 满足条件 (AE_1). 因此我们只需证 ζ^C 满足条件 (AE_2).

设 $\zeta' : 0 \to X' \to C \oplus P' \to Y' \to 0$ 是 C 的任意一个逼近扩张. 由引理 7, 我们可以假设 X' 是稳定的. 因 Λ 是 Gorenstein 代数且对任意 $i \geq 1$, $\operatorname{Ext}^i_\Lambda(X', \Lambda) = 0$, 于是由文献 [6, 定理 3.1, 4.1 和 4.2] 知 X' 是自反模, 因此存在投射模 P'' 和正合序列 $0 \to X' \xrightarrow{\varepsilon_{X'}} P'' \to X'' \to 0$. 考虑下面的推出图:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
\zeta' : 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{X'}"] & C \oplus P' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\rho : 0 \arrow[r] & P'' \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] & 0 \\
 & X'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & X'' \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图 2.2

由序列 ρ 的正合性知 $E \in \mathcal{I}^{\infty}(\Lambda)$. 显然我们可以选择 P'' 使得 X'' 为稳定模. 由文献 [1, 命题 3.1(b)] 知 $X'' \in \mathrm{CM}(\Lambda)$, 即 X'' 是一个稳定 CM 模. 于是由引理 6 知图 2.2 的中间列中的 $C \oplus P' \to E$ 是 $C \oplus P'$ 的极小左 $\mathcal{I}^{\infty}(\Lambda)$- 逼近, 所以 $E \cong Y^C \oplus P'$, $X'' \cong X^C$, $X' \cong \Omega^1(X^C)$ 且易知 $P'' \cong P$.

考虑下面的拉回图:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \sigma \arrow[d, dash, dotted] & \rho \arrow[d, dash, dotted] & \\
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & P'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & P'' \arrow[d] & \\
\theta : 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\zeta' : 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & C \oplus P' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

图 2.3

显然 $\mathrm{Ext}\,^1_{\Lambda}(f, P'')(\rho) = \sigma$. 另外, 由正合序列 ζ' 和函子 $\mathrm{Hom}\,_{\Lambda}(-, P'')$ 可以导出长正合序列:

$$
\begin{aligned}
&0 \to \mathrm{Hom}\,_{\Lambda}(Y', P'') \to \mathrm{Hom}\,_{\Lambda}(C \oplus P', P'') \\
&\quad \to \mathrm{Hom}\,_{\Lambda}(X', P'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}\,^1_{\Lambda}(Y', P'') \xrightarrow{\mathrm{Ext}\,^1_{\Lambda}(f, P'')} \mathrm{Ext}\,^1_{\Lambda}(C \oplus P', P''),
\end{aligned}
$$

其中 δ 是连接同态. 由图 2.2 知 $\delta(\varepsilon_{X'}) = \rho$, 所以 $\sigma = \mathrm{Ext}\,^1_{\Lambda}(f, P'')(\rho) = \big[\mathrm{Ext}\,^1_{\Lambda}(f, P'')\delta\big](\varepsilon_{X'}) = 0$, 即图 2.3 的中间列 σ 分裂, 从而

$$
E' \cong C \oplus P' \oplus P'', \quad g \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

于是有下面的交换图:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \oplus P'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & Y'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \oplus P' \oplus P'' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & E \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X'' \arrow[r] & C \oplus P' \arrow[r] & Y' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

图 2.4

其中 ε 是自然嵌入映射. 因为

$$X' \cong \Omega^1(X^C),\quad P'' \cong P,\quad Y'' \cong (C\oplus P'')/X' \cong (C\oplus P)/\Omega^1(X^C) \cong Y^C,$$

由下面的引理 8 知图 2.4 的第一行与前面的 ζ^C 一致. 此即证明了逼近扩张 ζ^C 满足条件 (AE_2). 定理证毕.

引理 8 设 $Y \in \mathcal{I}^\infty(\Lambda)$, X 是一个稳定 CM 模且 $\xi \in \mathrm{Ext}\,^1_\Lambda(Y,X)$ 表示如下扩张:

$$\xi: 0 \to X \to C\oplus P' \xrightarrow{\pi'} Y \to 0,$$

其中 P' 是投射模. 如果 ξ 满足以下条件:

(1) $Y \cong Y^C$;

(2) $X \cong \Omega^1(X^C)$;

(3) P' 同构于 X^C 的投射覆盖,

则 ξ 与定理 1 的证明中的 ζ^C 一致. 即存在同构 α, β 和 γ, 使得下图可换:

$$\begin{tikzcd}
\xi: 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & C\oplus P' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\beta"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
\zeta^C: 0 \arrow[r] & \Omega^1(X^C) \arrow[r] & C\oplus P \arrow[r, "\pi^C"] & Y^C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 2.5

证明 因为 $f^C: 0 \to C \to Y^C$ 是 C 的极小左 $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$- 逼近, 所以存在同态 π, 使得下图为正合交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
\zeta^C: 0 \arrow[r] & \Omega^1(X^C) \arrow[r] \arrow[d] & C\oplus P \arrow[r, "\pi^C"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f^C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] & Y^C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & Y^C\oplus P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & Y^C \arrow[r] & 0 \\
 & X^C \arrow[r, equal] \arrow[d] & X^C \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图 2.6

其中 $K = \mathrm{Ker}\,\pi$. 因为 $X^C \in \mathrm{CM}(\Lambda)$ 且 $\Omega^1(X^C) \in \mathrm{CM}(\Lambda)$, 所以由图 2.6 的第一列知 $K \in \mathrm{CM}(\Lambda)$. 因为 $Y^C \in \mathcal{I}^\infty(\Lambda)$ 且 $Y^C \oplus P \in \mathcal{I}^\infty(\Lambda)$, 所以由图 2.6 的第二行知 $K \in \mathcal{I}^\infty(\Lambda)$. 于是由文献 [1, 命题 3.1(e)] 知 K 是投射模. 易知 K 同构于 X^C 的投射覆盖, 即 $K \cong P$. 由命题 1,

图 2.6 的中间行分裂. 注意到

$$\pi^C = \pi \begin{pmatrix} f^C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

如果将图 2.6 的第一行 ζ^C 换成该引理条件中的 ξ 进行以上讨论，则

$$\pi' \cong \pi \begin{pmatrix} f^C & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $\left(\begin{smallmatrix} f^C & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 是给定的同态，而 $\pi : Y^C \oplus P' \to Y^C$ 是分裂满同态. 于是易知，存在同构 α, β 和 γ, 使得图 2.5 可换.

注 在定理 1 的证明中，如果 ζ' 是满足条件 (AE_1) 的非极小的逼近扩张，则正合序列 ρ 不分裂. 首先，我们具体地重写图 2.2, 可得下图:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
\zeta' : 0 \arrow[rr] & & X' \arrow[r, "\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\varepsilon_{X'}"] & C \oplus P' \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\rho : 0 \arrow[rr] & & P'' \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[r] & 0 \\
 & & X' \arrow[r, equal] \arrow[d] & X' \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图 2.2′

如果 ρ 是分裂的，则存在同态 $(a', b') : C \oplus P' \to P''$, 使得

$$\varepsilon_{X'} = (a'\ b') \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a'a + b'b.$$

于是我们有下面的正合交换图:

$$\begin{tikzcd}
\zeta' : 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal, "\begin{pmatrix} a \\ \varepsilon_{X'} - a'a \end{pmatrix}"'] & C \oplus P' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}"] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & C \oplus P'' \arrow[r] & Y'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 2.7

这里 h 是导出同态. 由引理 8, 图 2.7 的第二行与定理 1 的证明中的极小逼近扩张 ζ^C 一致，所以 ζ' 也是极小逼近扩张，这与假设是矛盾的.

下面的定理解决了极小逼近扩张的唯一性问题.

定理 2 任意 Λ- 模 C 的极小逼近扩张在同构的意义下是唯一的.

证明 设 $\zeta: 0\to X\to C\oplus P\to Y\to 0$ 与 $\zeta': 0\to X'\to C\oplus P'\to Y'\to 0$ 都是 Λ- 模 C 的极小逼近扩张. 不妨设 ζ 就是定理 1 证明中的 ζ^C, 即

$$\zeta=\zeta^C: 0\to\Omega^1(X^C)\to C\oplus P\to Y^C\to 0,$$

这里 P 是 X^C 的投射覆盖 (从而有正合序列 $0\to\Omega^1(X^C)\xrightarrow{f_2}P\xrightarrow{\phi}X^C\to 0$).

因为 ζ^C 和 ζ' 都是 C 的极小逼近扩张, 所以由条件 (AE_2), 存在同态 α,β,γ 和 α',β',γ', 使得下图可换:

$$\begin{tikzcd}
\zeta^C: 0 \arrow[r] & \Omega^1(X^C) \arrow[r, "\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\end{pmatrix}"] \arrow[d, "\alpha"] & C\oplus P \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix}1&0\\0&\beta\end{pmatrix}"] & Y^C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0\\
\zeta': 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"] & C\oplus P' \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix}1&0\\0&\beta'\end{pmatrix}"] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma'"] & 0\\
\zeta^C: 0 \arrow[r] & \Omega^1(X^C) \arrow[r, "\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\end{pmatrix}"] & C\oplus P \arrow[r] & Y^C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因为 $X^C\in\mathrm{CM}(\Lambda)$, 即对任意 $i\geq 1$, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(X^C,\Lambda)=0$, 所以由正合序列

$$0\to\Omega^1(X^C)\xrightarrow{f_2}P\xrightarrow{\phi}X^C\to 0$$

可导出正合序列

$$0\to(X^C)^*\xrightarrow{\phi^*}P^*\xrightarrow{f_2^*}(\Omega^1(X^C))^*\to 0,$$

其中 $P^*\xrightarrow{f_2^*}(\Omega^1(X^C))^*$ 是 $(\Omega^1(X^C))^*$ 的投射覆盖. 另外, 由文献 [6, 定理 3.1, 4.1 和 4.2] 知 X^C 和 $\Omega^1(X^C)$ 都是自反模. 于是由引理 1, $0\to\Omega^1(X^C)\xrightarrow{f_2}P$ 是 $\Omega^1(X^C)$ 的极小左 $\mathcal{P}(\Lambda)$- 逼近.

由定理 1 的证明知, 我们可选择 $X'\cong\Omega^1(X^C)$ 且 α 和 α' 均是同构. 因为 $f_2(\alpha'\alpha)=(\beta'\beta)f_2$, 所以由引理 2 知 $\beta'\beta$ 是 P 的自同构, 从而 β, β' 和 γ, γ' 均是同构. 定理证毕.

注 由定理 1 和定理 2 知, 任意 Λ- 模 C 的唯一极小逼近扩张有如下形式:

$$\zeta^C: 0\to\Omega^1(X^C)\to C\oplus P\to Y^C\to 0,$$

其中 P 是 X^C 的投射覆盖.

3 应用

本节我们研究引言中提出的问题, 将通过模的极小左 $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$- 逼近和极小逼近扩张来研究模的特性, 得到了一些有趣的结果. 下面的 Λ 仍指 Gorenstein 代数.

命题 2 设 $M,N\in\mathrm{mod}\,\Lambda$ 且 $M^*=0=N^*$. 如果 $Y^M\cong Y^N$, 则 $M\cong N$.

证明 设

$$0\to M\xrightarrow{f^M}Y^M\xrightarrow{g^M}X^M\to 0 \quad 和 \quad 0\to N\xrightarrow{f^N}Y^N\xrightarrow{g^N}X^N\to 0$$

是正合序列, 其 $f^M: M\to Y^M$ 和 $f^N: N\to Y^N$ 分别是 M 和 N 的极小左 $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$- 逼近, $X^M\in\mathrm{CM}(\Lambda)$, $X^N\in\mathrm{CM}(\Lambda)$. 考虑下面的交换图:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f^M"] & Y^M \arrow[r, "g^M"] \arrow[d, "\sigma_{Y^M}"] & X^M \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{X^M}"] & 0 \\
& & (Y^M)^{**} \arrow[r, "(g^M)^{**}"] & (X^M)^{**} &
\end{tikzcd}
$$

图 3.1

由文献 [6, 定理 3.1, 4.1 和 4.2] 知， X^M 是自反模，即 σ_{X^M} 是同构．因为 $M^*=0$, 则由序列

$$0\to (X^M)^* \stackrel{(g^M)^*}{\longrightarrow} (Y^M)^* \stackrel{(f^M)^*}{\longrightarrow} M^* \to 0$$

的正合性知 $(g^M)^*$ 是一个同构，从而 $(g^M)^{**}$ 也是一个同构．于是由图 3.1 知,

$$M \cong \operatorname{Ker} g^M \cong \operatorname{Ker} \sigma_{Y^M}.$$

类似可证 $N \cong \operatorname{Ker} \sigma_{Y^N}$. 但 $Y^M \cong Y^N$, 所以 $M \cong N$.

下面我们将证明在一定的条件下， $\operatorname{Ext}_\Lambda^1(Y^M, \Omega^1(X^M))$ 中的每一个非零元都是 Λ- 模 M 的极小逼近扩张．对 Λ- 模 M 和非负整数 n, 如果对任意 $0\le i<n$, $\operatorname{Ext}_\Lambda^i(M,\Lambda)=0$, 则称 M 的级不小于 n, 记为 $\operatorname{grade} M \ge n$.

命题 3 设 Λ- 模 M 满足 $\operatorname{grade} M\ge 2$. 则 $\operatorname{Ext}_\Lambda^1(Y^M, \Omega^1(X^M))$ 中的每一个非零元都是 M 的极小逼近扩张.

为了证明上述命题，我们先证明两个引理.

引理 9 设 $Y\in \mathcal{I}^\infty(\Lambda)$ 且满足 $\operatorname{Ext}_\Lambda^1(Y,\Lambda)=0$, 则对任意稳定 CM 模 X, $\operatorname{Ext}_\Lambda^1(Y,X)$ 的每个非零元是某个稳定 Λ- 模的极小逼近扩张.

证明 设 $\eta: 0\to X\to C\oplus P\to Y\to 0$ 是 $\operatorname{Ext}_\Lambda^1(Y,X)$ 的一个非零元，显然它是稳定 Λ-模 C 的一个逼近扩张．若它不是极小的，则由引理 8 后面的 “注” 知，存在非分裂的正合序列

$$0\to P' \to Y^C\oplus P\to Y\to 0,$$

其中 P' 是 X^C 的投射覆盖．而这与 $\operatorname{Ext}_\Lambda^1(Y,\Lambda)=0$ 是矛盾的．故 η 是稳定 Λ- 模 C 的极小逼近扩张.

引理 10 设 Λ- 模 M 满足 $\operatorname{grade} M\ge 2$. 如果 $\theta: 0\to \Omega^1(X^M)\to N\oplus P\to Y^M\to 0$ 是 $\operatorname{Ext}_\Lambda^1(Y^M,\Omega^1(X^M))$ 的一个非零元，其中 N 是一个稳定模，则 $M\cong N$.

证明 由 $\operatorname{grade} M\ge 2$ 知 M 是一个稳定模 (因为 $M^*=0$), 于是由正合序列

$$\eta^M: 0\to M \stackrel{f^M}{\to} Y^M \stackrel{g^M}{\to} X^M \to 0$$

知 $\operatorname{Ext}_\Lambda^1(Y^M,\Lambda)\cong \operatorname{Ext}_\Lambda^1(M,\Lambda)=0$. 又因为 $\Omega^1(X^M)$ 是一个稳定 CM 模，由引理 9 知，已知条件中所给的正合序列 θ 是稳定 Λ- 模 N 的极小逼近扩张．于是由定理 2 知 $Y^M\cong Y^N$ 且 $\Omega^1(X^M)\cong \Omega^1(X^N)$, 由此易知 $X^M\cong X^N$.

由正合序列

$$\eta^M: 0\to M \stackrel{f^M}{\to} Y^M \stackrel{g^M}{\to} X^M \to 0,$$

$$\eta^N: 0\to N \stackrel{f^N}{\to} Y^N \stackrel{g^N}{\to} X^N \to 0$$

可导出如下正合序列

$$0 \to (X^M)^* \xrightarrow{(g^M)^*} (Y^M)^* \xrightarrow{(f^M)^*} M^* \to 0, \tag{1}$$

$$0 \to (X^N)^* \xrightarrow{(g^N)^*} (Y^N)^* \xrightarrow{(f^N)^*} N^* \to 0. \tag{2}$$

因为 $M^* = 0$, 所以 $(X^M)^* \cong (Y^M)^*$, 从而 $(X^N)^* \cong (Y^N)^*$. 于是由正合序列 (2) 知, $N^* = 0$. 故由命题 2 知, $M \cong N$.

由引理 10 可直接推出命题 3.

致谢 作者感谢审稿人提出的有益修改意见.

参 考 文 献

[1] Auslander M., Reiten I., Cohen-Macaulay and Gorenstein Algebras, In: Michler G. O., Ringel C. M., eds. Representation Theory of Finite Groups and Finite Dimensional Algebras, Bielefeld, 1991, Progress in Mathematics, Vol 95, Basel: Birkhäuser, 1991, 221–245.

[2] Auslander M., Bridger M., Stable Module Theory, Memoirs Amer. Math. Soc., Vol 94, Provindence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1969.

[3] Faith C., Algebra II, Ring Theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenchaften, Vol 191 (A Series of Comprehensive Studies in Mathematics), Berlin, New York: Springer-Verlag, 1976.

[4] Anderson F. W., Fuller K. R., Rings and Categories of Modules (2nd ed), Graduate Texts in Mathematics, Vol 13, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1992.

[5] Ringel C. M., Tame Algebras and Integral Quadratic Forms, Lecture Notes in Mathematics, Vol 1099, Berlin, New York: Springer-Verlag, 1984.

[6] Huang Z. Y., FP-selfinjective dimension over non-commutative coherent rings, *Acta Math. Sinica*, 1997, **40**(2): 167–174 (in Chinese).