第40卷第2期 数 学 学 报 Vol.40, No. 2
1997年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA March, 1997

非交换凝聚环上的 FP- 自内射维数

黄兆泳

(北京师范大学数学系 北京 100875)

摘 要 本文引进了 W^n- 模, 对具有有限 FP- 自内射维数的非交换凝聚环作了刻划. 所得结果推广了 Stenström 和 Bass 等人的工作. 最后给出了这些结果在扩张闭模范畴中的应用.

关键词 凝聚环, FP- 自内射维数, W^n- 模
MR(1991) 主题分类 16E10, 16D60
中图分类 O153.3

FP-selfinjective Dimension over Non-commutative Coherent Rings

Huang Zhaoyong
(*Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing* 100875, *China*)

Abstract In this paper, we introduce the notion of W^n-modules and describe non-commutative coherent rings with finite FP-selfinjective dimension. The obtained results generalize the works of Stenström and Bass. Finally we apply these results to extension closed categories of modules.

Keywords Coherent rings, FP-selfinjective dimension, W^n-modules
1991 MR Subject Classification 16E10, 16D60
Chinese Library Classification O153.3

1 引言

FP- 内射作为内射的一个很好推广，是七十年代以来，在模范畴的研究中出现的一个重要概念. 它起源于 Stenström[1]. 内射在研究 Noether 环及其有限生成模的同调性质时发挥了重要的作用. 对应地，在研究凝聚环及其有限表现模的同调性质时， FP- 内射是一个相当有力的工具. 如 [1] 、 [2] 、 [3] 、 [4] 和 [5] 等.

本文将主要研究一个环作为它自身的模的 FP- 内射维数，即 FP- 自内射维数. 我们用 FP-id(R_R) (FP-id($_RR$)) 表示环 R 的右 (左) FP- 自内射维数. 本文所讨论的环均指带单位元的结合环，模指酉模.

2 一些定义和引理

设 R 是一个任意环.

收稿日期： 1995-09-24, 接受日期： 1996-06-17
国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助项目

定义 2.1 右 (左) R- 模 A 称为 W^n- 模, 如果 $\mathrm{Ext}\,^i_R(A,R)=0$, 对 $i=1,\cdots,n$. 其中 n 是一个正整数.

当 $n=1$ 时, W^1- 模即是 [3] 中的 W- 模. 若 A 是 W^1- 模, 则由正合列 $0\to C\to B\to A\to 0$ 易知有正合列 $0\to A^*\to B^*\to C^*\to 0$, 其中 $(\ )^*=\mathrm{Hom}_R(\ ,R)$. 一般地, 有如下结论.

引理 2.2 设右 (左) R- 模 A 是 W^n- 模. $0\to K\to F_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots\xrightarrow{d_2}F_1\xrightarrow{d_1}F_0\to A\to 0$ 是右 (左) R- 模正合列, 其中每个 F_i 是投射模. 则 $0\to A^*\to F_0^*\to F_1^*\to\cdots\to F_{n-1}^*\to K^*\to 0$ 正合.

证明 当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 设 $n\geq 2$, 由正合列 $0\to K\to F_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots\xrightarrow{d_2}F_1\xrightarrow{d_1}F_0\to A\to 0$ 知, $\mathrm{Ext}\,^1_R(\mathrm{Im}\,d_i,R)\cong\mathrm{Ext}\,^{i+1}_R(A,R)$, $1\leq i\leq n-1$. 而 A 是 W^n- 模, 即 $\mathrm{Ext}\,^i_R(A,R)=0$, $1\leq i\leq n$, 所以对任意 i, $\mathrm{Ext}\,^1_R(\mathrm{Im}\,d_i,R)=0$. 于是易知 $0\to A^*\to F_0^*\to F_1^*\to\cdots\to F_{n-1}^*\to K^*\to 0$ 正合.

定义 2.3 右 (左) R- 模 A 称为 n 级合冲模, 如果有正合列 $0\to A\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0$, 其中每个 P_i 是有限生成投射模.

引理 2.4 设 R 是左、右凝聚环, n 是正整数. 下列陈述等价:

(i) $\text{FP-id}(R_R)\leq n$, 即 $\mathrm{Ext}\,^{n+1}_R(A,R)=0$, 对任意有限表现右 R- 模 A;

(ii) $\mathrm{Ext}\,^n_R(B,R)=0$, 对任意有限表现无挠右 R- 模 B;

(iii) 右 n 级合冲模是 W^n- 模;

(iv) 右 n 级合冲模是 W^1- 模.

证明 由 [3] 引理 1 易知 (i) 和 (ii) 是等价的. 同样由 [3] 引理 1 知, A,B 中有一个存在, 另一个必存在, 使得有正合列 $0\to A\to P_{n-1}\to\cdots\to P_1\to P_0\to B\to 0$, 其中 A 为 n 级合冲模, B 为有限表现右 R- 模, 每个 P_i 为有限生成投射右 R- 模, 所以 $\mathrm{Ext}\,^i_R(A,R)\cong\mathrm{Ext}\,^{n+i}_R(B,R)$, 对任意 $i\geq 1$, 于是易知 (i), (iii) 和 (iv) 是彼此等价的.

3 FP- 自内射维数 ≤ 1

定理 3.1 设 R 是左、右凝聚环, 下列陈述等价:

(i) $\text{FP-id}(R_R)\leq 1$;

(ii) 左有限表现无挠模是自反模;

(iii) 左有限表现 W^1- 模是自反模;

(iv) 右有限表现无挠模是 W^2- 模;

(v) 右有限表现模的有限生成投射闭子模是直和项.

证明 先证 (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv)$\Leftrightarrow$(i).

(i)$\Leftrightarrow$(ii) 由 [3] 引理 2 知, A,B 中有一个存在, 另一个必存在, 使得有正合列 $0\to A\to A^{**}\to\mathrm{Ext}\,^1_R(B,R)\to 0$, 其中 A 为有限表现无挠左 R- 模, B 为有限表现无挠右 R- 模, 所以 A 是自反模, 即 $A\cong A^{**}$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}\,^1_R(B,R)=0$. 于是由引理 2.4 知 (i) 等价于 (ii).

(ii)$\Rightarrow$(iii) 设 A 为左有限表现 W^1- 模. 于是有正合列 $0\to K\to F\to A\to 0$, 其中 K 为有限表现无挠左 R- 模, F 为有限生成自由左 R- 模. 从而 $0\to A^*\to F^*\to K^*\to 0$ 正合.

由于 R 是右凝聚环, 所以 K^* 为有限表现无挠右 R- 模. 由 (ii) 等价于 (i) 及引理 2.4 知,

K^* 是 W^1- 模．于是有如下正合交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K & \to & F & \to & A & \to & 0 \\ & & \sigma_K \downarrow & & \sigma_F \downarrow & & \sigma_A \downarrow & & \\ 0 & \to & K^{**} & \to & F^{**} & \to & A^{**} & \to & \mathrm{Ext}\,_R^1(K^*, R) = 0 \end{array}$$

其中 $\sigma_K, \sigma_F, \sigma_A$ 均是典型赋值同态且 σ_F 是同构．由 (ii), K 是自反模, 所以 σ_K 是同构．由 "五引理" 知 σ_A 是同构，即 A 是自反模．

(iii)⇒(iv) 设 A 为有限表现无挠右 R- 模，则有正合列

$$F_1 \xrightarrow{f} F_0 \to A \to 0, \tag{1}$$

其中 F_0, F_1 为有限生成自由右 R- 模．于是得正合列

$$0 \to A^* \to F_0^* \xrightarrow{f^*} F_1^* \to N \to 0, \tag{2}$$

其中 $N = \mathrm{Coker}\, f^*$.

对 (1) 应用 [2] 引理 2.2, 则有正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}\,_R^1(N, R) \to A \xrightarrow{\sigma_A} A^{**} \to \mathrm{Ext}\,_R^2(N, R) \to 0. \tag{3}$$

由于 $A \cong \mathrm{Coker}\, f^*$．于是对 (2) 式后三项也可应用 [2] 引理 2.2, 得正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}\,_R^1(A, R) \to N \xrightarrow{\sigma_N} N^{**} \to \mathrm{Ext}\,_R^2(A, R) \to 0. \tag{4}$$

显然 N 是有限表现左 R- 模．由 (3) 式及 A 是无挠模知， N 是 W^1- 模．由于由 (iii) 知 N 是自反模．再由 (4) 式即知 A 是 W^2- 模．

(iv)⇒(i) 由引理 2.4 即得．

下证 (i)⇔(v).

若 (i) 成立, 即 $\text{FP-id}(R_R) \le 1$. 设 P 是右有限表现模 A 的有限生成投射闭子模, 即 A/P 是右有限表现无挠模．由引理 2.4 易知 $\mathrm{Ext}\,_R^1(A/P, P) = 0$. 于是由正合列 $0 \to P \to A \xrightarrow{\pi} A/P \to 0$ 可得正合列 $\mathrm{Hom}\,_R(A/P, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,_R(A/P,\pi)} \mathrm{Hom}\,_R(A/P, A/P) \to 0$. 因此原正合列分裂．故 P 是 A 的直和项．反过来，若 (v) 成立．设 B 是任意有限表现无挠右 R- 模并设 $0 \to R \to A \to B \to 0$ 是 B 通过 R 的任一扩张，则 R 是右有限表现模 A 的投射闭子模．由 (v) 知，该正合列分裂，所以 $\mathrm{Ext}\,_R^1(B, R) = 0$. 于是由引理 2.4 知， $\text{FP-id}(R_R) \le 1$.

注　显然定理 3.1 的结论具有对称性．

下面这一结论是 [1] 定理 4.9. 我们用定理 3.1 给出它的另一个新的证明．

推论 3.2　设 R 是左、右凝聚环，下列陈述等价：

(i) R 是左、右 FP- 内射环;

(ii) 每个有限表现左 R- 模和每个有限表现右 R- 模是自反模．

证明　若 (i) 成立．设 A 为任意有限表现左 R- 模．因 R 是左 FP- 内射环，所以 A 为 W^1- 模．又 R 是右 FP- 内射环，由定理 3.1 知， A 是自反模．反之，若 (ii) 成立．设 B 为有限表现右 R- 模，则 B 是有限表现无挠的．由 (ii) 及定理 3.1 知 B 为 W^1- 模，所以 R 为右 FP- 内射环．

同理可证另一方面的结论.

推论 3.3 设 R 是左、右凝聚环, 下列陈述等价:

(i) FP-id$(R_R) \leq 1$ 和 FP-id$({}_RR) \leq 1$;

(ii) 对有限表现无挠左、右 R- 模正合列, $\mathrm{Hom}_R(\ ,R)$ 是正合函子;

(iii) $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(\ ,R),R)$ 保持有限表现左、右 R- 模的满同态.

证明 (i)⇒(ii) 设 $0 \to A \to B \xrightarrow{f} C \to 0$ 为左 R- 模正合列且 A,B,C 均是有限表现无挠模. 则 $0 \to C^* \xrightarrow{f^*} B^* \to A^*$ 正合, 并有如下正合交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \sigma_B & & \downarrow \sigma_C & & \\
0 & \to & (\mathrm{Coker}\, f^*)^* & \to & B^{**} & \to & C^{**} & &
\end{array}$$

由于 FP-id$(R_R) \leq 1$, 由定理 3.1, B,C 是自反模, 即 σ_B, σ_C 是同构, 所以 $A \cong (\mathrm{Coker}\, f^*)^*$. 又由定理 3.1 知, $\mathrm{Coker}\, f^*$ 是自反模, 所以 $A^* \cong (\mathrm{Coker}\, f^*)^{**} \cong \mathrm{Coker}\, f^*$. 故 $0 \to C^* \to B^* \to A^* \to 0$ 正合.

(ii)⇒(iii) 设有满同态 $B \to C \to 0$, 其中 B,C 为有限表现左 R- 模. 则 $0 \to C^* \to B^*$ 正合. 于是由 (ii) 知, $B^{**} \to C^{**} \to 0$ 正合.

(iii)⇒(i) 设 M 为有限表现无挠左 R- 模, 则存在有限生成自由左 R- 模 F, 有正合列 $F \to M \to 0$. 由 (iii), 有如下正合交换图:

$$\begin{array}{ccccc}
F & \to & M & \to & 0 \\
\sigma_F \downarrow & & \sigma_M \downarrow & & \\
F^{**} & \to & M^{**} & \to & 0
\end{array}$$

因为 σ_F 是同构, 所以 σ_M 是满同态. 而 M 是无挠模, 因此 M 是自反模. 由定理 3.1, FP-id$(R_R) \leq 1$.

同理可证另一方面的结论.

下面我们给出一些 FP- 自内射维数 ≤ 1 的凝聚环的一些性质.

命题 3.4 设 R 是左、右凝聚环, FP-id$(R_R) \leq 1$ 和 FP-id$({}_RR) \leq 1$, A 为有限表现左 (右) R- 模. 则 A 为 $n+1$ 级合冲模当且仅当 A 是自反模且 A^* 是 W^n- 模, 其中 $n \geq 1$.

证明 ⇒) 设 A 为有限表现左 (右) R- 模. 若 A 是 $n+1$ 级合冲模, 由定理 3.1, A 是自反模. 下面对 n 作数学归纳法证明 A^* 是 W^n- 模. 当 $n=1$ 时, 因 A^* 是有限表现无挠右 (左) R- 模, 由定理 3.1 知, A^* 是 W^1- 模. 当 $n>1$ 时, 设有正合列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & P_n \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \\
 & & & \mathrm{Im}\, d_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

显然 $\mathrm{Im}\, d_n$ 是 n 级合冲模. 由归纳假设, $(\mathrm{Im}\, d_n)^*$ 是 W^{n-1}- 模. 而由定理 3.1, $\mathrm{Im}\, d_n$ 是 W^1- 模, 所以有正合列 $0 \to (\mathrm{Im}\, d_n)^* \to P_{n-1}^* \to A^* \to 0$. 易知 $\mathrm{Ext}_R^i(A^*,R) \cong \mathrm{Ext}_R^{i+1}\big((\mathrm{Im}\, d_n)^*,R\big)$, 因此 $\mathrm{Ext}_R^i(A^*,R)=0$, $2 \leq i \leq n$. 又前面已证 A^* 是 W^1- 模, 故 A^* 是 W^n- 模.

⇐) 对 n 作数学归纳法. 当 $n=1$ 时, 有正合列 $0 \to K \to F_1 \to A^* \to 0$, 其中 F_1 为有限生成自由右 (左) R- 模, K 为有限表现无挠右 (左) R- 模. 因 A^* 是 W^1- 模, 所以 $0 \to A^{**} \to$

$F_1^* \to K^* \to 0$ 正合. 而 K^* 为有限表现无挠左 (右) R- 模, 则有正合列 $0 \to K^* \to F_0$, 其中 F_0 为有限生成自由左 (右) R- 模. 又 A 自反, 即 $A \cong A^{**}$, 于是有正合列 $0 \to A \to F_1^* \to F_0$, 即 A 为 2 级合冲模. 当 $n > 1$ 时, 有正合列 $0 \to T \to F \to A^* \to 0$, 其中 F 为有限生成自由右 (左) R-模, T 为有限表现无挠右 (左) R- 模. 则 T 为 W^{n-1}- 模且有正合列 $0 \to A^{**} \to F^* \to T^* \to 0$. 由定理 3.1, T 及 T^* 均是自反模. 因此 $T^{**} \cong T$ 是 W^{n-1}- 模. 由归纳假设, T^* 是 n 级合冲模. 因 A 自反, 所以 $A \cong A^{**}$ 是 $n+1$ 级合冲模.

设 R 是交换凝聚环, S 是 R 的乘闭子集, A 为有限表现 R- 模, B 为任意 R- 模, 则 $\left[\mathrm{Ext}\,_R^n(A,B)\right]_S \cong \mathrm{Ext}\,_{R_S}^n(A_S, B_S)$, $n \geq 0$.

如果令 S 是 R 的所有非零因子组成的集合, 则称 $Q = R_S$ 为 R 的全商环.

命题 3.5 若交换凝聚环 R 的全商环 Q 是 FP- 内射环, 则每个有限表现 R- 模的对偶模是自反模.

证明 设 A 为任意有限表现 R- 模, 则 A_S 为有限表现 R_S- 模. 由已知, $\left[\mathrm{Ext}\,_R^1(A,R)\right]_S \cong \mathrm{Ext}\,_{R_s}^1(A_S, R_S) = 0$. 记 $M = \mathrm{Ext}\,_R^1(A,R)$, 即 $M_S = 0$. 显然 M 有限生成, 于是由 [6] 命题 7.5 知, 存在 $s \in S$, 使得 $sM = 0$. 设任意 $f \in M^* = \mathrm{Hom}\,_R(M,R)$, 则对任意 $x \in M$, $sf(x) = f(sx) = 0$, 所以 $f(x) = 0$. 由 x 的任意性, $f = 0$. 从而 $M^* = 0$, 即 $\left[\mathrm{Ext}\,_R^1(A,R)\right]^* = 0$. 由 [3] 推论 7 知, 任意有限表现 R- 模的对偶模是自反模.

4　FP- 自内射维数 $\leq n$

定理 4.1 设 R 是左、右凝聚环. 若 FP-id$(R_R) \leq 2$, 则任意左有限表现 W^2- 模是自反模.

证明 设 A 为左有限表现 W^2- 模. 则有正合列 $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \to A \to 0$, 其中 P_0, P_1 为有限生成投射左 R- 模. 令 $N = \mathrm{Coker}\, f^*$. 类似定理 3.1 的证明, 由 [2] 引理 2.2, 有正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}\,_R^1(N,R) \to A \xrightarrow{\sigma_A} A^{**} \to \mathrm{Ext}\,_R^2(N,R) \to 0, \tag{5}$$

$$0 \to \mathrm{Ext}\,_R^1(A,R) \to N \xrightarrow{\sigma_N} N^{**} \to \mathrm{Ext}\,_R^2(A,R) \to 0. \tag{6}$$

由 (6) 式及 A 是 W^2- 模知, N 是自反模. 因 N^* 为有限表现左 R- 模, 于是有正合列 $P_1' \xrightarrow{g} P_0' \to N^* \to 0$, 其中 P_0', P_1' 为有限生成投射左 R- 模. 从而 $0 \to N \to P_0'^* \to P_1'^*$ 正合. 因 FP-id$(R_R) \leq 2$, 所以 $\mathrm{Ext}\,_R^1(N,R) \cong \mathrm{Ext}\,_R^3(\mathrm{Coker}\, g^*, R) = 0$, $\mathrm{Ext}\,_R^2(N,R) \cong \mathrm{Ext}\,_R^4(\mathrm{Coker}\, g^*, R) = 0$. 于是由 (5) 式知, A 是自反模.

定理 4.2 设 R 是左、右 - 凝聚环且 FP-id$(R_R) = n$ (≥ 3), 则任意有限表现无挠左 W^n- 模是自反模. 如果 FP-id$({}_RR)$ =FP-id$(R_R) = n$, 则任意有限表现左 (右) W^n- 模是自反模.

证明 设 M 为有限表现无挠左 W^n- 模. 由 [3] 引理 2 知, 存在有限表现无挠右 R- 模 N 满足如下正合列:

$$0 \to N^* \to F \to M \to 0, \tag{7}$$

$$0 \to M \xrightarrow{\sigma_M} M^{**} \to \mathrm{Ext}\,_R^1(N,R) \to 0, \tag{8}$$

$$0 \to N \xrightarrow{\sigma_N} N^{**} \to \mathrm{Ext}\,_R^1(M,R) \to 0, \tag{9}$$

其中 F 为有限生成自由左 R- 模.

因 $\mathrm{Ext}\,_R^1(M,R) = 0$, 由 (9) 式知 N 是自反模. 由于 M 是 W^n- 模, 由 (7) 式易知 N^* 是 W^{n-1}- 模.

考虑正合列

$$0 \to K \to F_{n-2} \to \cdots \to F_0 \to N^* \to 0,$$

其中每个 F_i 是有限生成自由左 R- 模， K 为有限表现左 R- 模. 由引理 2.2, $0 \to N^{**} \to F_0^* \to \cdots \to F_{n-2}^* \to K^* \to 0$ 正合. 由于 K^* 是有限表现无挠右 R- 模，因此由引理 2.4 知, $\mathrm{Ext}\,_R^n(K^*, R) = 0$. 所以 $\mathrm{Ext}\,_R^1(N, R) \cong \mathrm{Ext}\,_R^1(N^{**}, R) \cong \mathrm{Ext}\,_R^n(K^*, R) = 0$. 由 (8) 式知， M 是自反模.

设 FP-id$({}_RR)$ =FP-id$(R_R) = n$, H 是有限表现左 W^n- 模，则有正合列 $0 \to M \to F \to H \to 0$, 其中 F 为有限生成自由左 R- 模， M 为有限表现无挠左 R- 模. 易知 M 也是 W^n- 模，所以 M 是自反模，并且有如下正合交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M & \to & F & \to & H & \to & 0 \\ & & \downarrow \sigma_M & & \downarrow\cong & & \downarrow \sigma_H & & \\ 0 & \to & M^{**} & \to & F^{**} & \to & H^{**} & & \end{array}$$

由 “Snake 引理” 知 $\mathrm{Ker}\,\sigma_H = \mathrm{Coker}\,\sigma_M$. 因 M 是自反模, 所以 $\mathrm{Coker}\,\sigma_M = 0$. 从而 $\mathrm{Ker}\,\sigma_H = 0$, 即 H 是无挠模. 由前面的讨论知 H 是自反模.

推论 4.3 设 R 是左、右凝聚环且 FP-id(R_R) =FP-id$({}_RR) < \infty$, A 为有限表现左 (右) R-模. 若 $\oplus_{i\geq 0}\mathrm{Ext}\,_R^i(A, R) = 0$, 则 $A = 0$.

证明 设有限表现左 (右) R- 模满足 $\oplus_{i\geq 0}\mathrm{Ext}\,_R^i(A, R) = 0$, 即 $\mathrm{Ext}\,_R^i(A, R) = 0, i = 0, 1, 2, \cdots$. 因 FP-id$(R_R)$ =FP-id$({}_RR) < \infty$, 所以由定理 3.1, 定理 4.1 和定理 4.2 知 A 是自反模. 故 $A \cong A^{**} = 0$.

注 环 R 说是满足强 Nakayama 猜想 (SNC), 如果对任意有限生成模 A, 能由 $\oplus_{i\geq 0}\,\mathrm{Ext}\,_R^i(A, R) = 0$ 可推出 $A = 0$. 著名的广义 Nakayama 猜想 (GNC) 是：设 R 是 Artin 环， S 是单 R- 模. 若 $\oplus_{i\geq 0}\mathrm{Ext}\,_R^i(S, R) = 0$, 则 $S = 0$. 它有一等价形式：设 R 是 Artin 环， $0 \to R \to E_0 \to E_1 \to \cdots$ 是 R 作为正则 R- 模的极小内射分解. 则每个不可分内射模必是某个 E_i 的直和项. 由推论 4.3, 我们有

推论 4.4 任意 Gorenstein 环满足 SNC. 特别地， GNC 在 Artin Gorestein 环上成立.

推论 4.5 设 R 是 Gorenstein 环. E 是一个不可分内射 R- 模 (此时可设 $E = E(R/I)$, 即 R/I 的内射包络，这里 I 是 R 的某个不可约理想). 若 R/I 是 W^n- 模，这里 n 为 R 的自内射维数，则 E 是 $E(R)$ 的直和项.

证明 由已知条件及定理 3.1, 定理 4.1 和定理 4.2 知， R/I 是无挠模，所以存在正整数 t, 使得 $R/I \subset R^t$. 因此 $E = E(R/I)$ 是 $E(R)^t$ 的直和项，而 E 是不可分的，故 E 是 $E(R)$ 的直和项.

下面这一推论是 [9] 定理 2.

推论 4.6 设 R 是 Gorenstein 环， $0 \to {}_RR \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_n \to 0$ 是左 R- 模 R 的极小内射分解. 则 $\oplus_{i=0}^n E_i$ 是内射余生成元.

证明 由定理 3.1, 定理 4.1 和定理 4.2 知，对任意非零左单模 S, 存在 i $(0 \leq i \leq n)$, 使得 $\mathrm{Ext}\,_R^i(S, R) \neq 0$ (否则 $S = 0$). 因为 $\mathrm{Hom}\,_R(S, E_i) \cong \mathrm{Ext}\,_R^i(S, R)$. 所以 $\mathrm{Hom}\,_R\big(S, \oplus_{i=0}^n E_i\big) \neq 0$. 故 $\oplus_{i=0}^n E_i$ 是内射余生成元.

5 应用

设 A 是有限表现左 (右) R- 模，即有正合列 $P_1 \xrightarrow{h} P_0 \to A \to 0$, 其中 P_0, P_1 为有限生成投射左 (右) R- 模. 称 $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Coker} h^*$ 为 Auslander 转置 (transpose). 如果对 $n \geq 1$, $\operatorname{Tr} A$ 是 W^n- 模，即 $\operatorname{Ext}_R^i(\operatorname{Tr} A, R) = 0$, $i = 1, \cdots, n$, 则称 A 为左 (右) n- 挠自由 (n-torsionfree) 模. 由 [2] 引理 2.2 知， A 是 1- 挠自由模当且仅当 A 是无挠模. A 是 2- 挠自由模当且仅当 A 是自反模. 记 $r\mathcal{T}_n = \{n$- 挠自由右 R- 模 $\}$, $l\mathcal{T}_n = \{n$- 挠自由左 R- 模 $\}$.

我们知道，可解 (resolving) 模范畴和余可解 (coresolving) 模范畴是代数表示论中两个非常重要的概念. 研究一个模范畴是可解的或余可解的是代数表示论中的一个课题. 设 $\mathcal{X}$ 是一个模范畴, 要使它的一个子模范畴 $\mathcal{Y}$ 是可解的或余可解的，一个必要条件是 $\mathcal{Y}$ 必须是扩张闭的 (closed extensions), 即，设 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是一个 $\mathcal{X}$- 模正合列. 若 $A, C \in \mathcal{Y}$, 则 $B \in \mathcal{Y}$. 因此，研究一个模范畴是否是扩张闭的有相当现实的意义. 作为前面主要结果的应用，在本节我们将证明如下结论.

定理 5.1 设 R 是左、右凝聚环且 $\text{FP-id}(R_R) \leq n$, n 为正整数，则 $r\mathcal{T}_n$ 是右 R- 模范畴的扩张闭子模范畴.

我们将分三步证明该定理.

引理 5.2 设 R 是左、右凝聚环且 $\text{FP-id}(R_e) \leq 1$, $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是有限表现右 R-模正合列. 若 A, C 是无挠模，则 B 也是无挠模.

证明 因 $\text{FP-id}(R_R) \leq 1$ 且 C 是有限表现无挠右 R- 模，所以由定理 3.1 知 C 是 W^2- 模. 于是易知有如下正合交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow \sigma_A & & \downarrow \sigma_B & & \downarrow \sigma_C & & \\ 0 & \to & A^{**} & \to & B^{**} & \to & C^{**} & & \end{array}$$

其中 σ_A 和 σ_C 是单同态. 所以 σ_B 也是单同态，即 B 是无挠模.

引理 5.3 设 R 是左、右凝聚环且 $\text{FP-id}(R_R) \leq 2$. $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是有限表现右 R-模正合列. 若 A, C 是自反模，则 B 也是自反模.

证明 因 $\text{FP-id}(R_R) \leq 2$, 由定理 4.1, 任意左有限表现 W^2- 模是自反模. 于是由 [8] 引理 1.1 知，任意右有限表现自反模是 W^2- 模. 所以 A, C 均为 W^2- 模. 故 B 也是 W^2- 模. 再由 [8] 引理 1.1 知， B 是自反模.

引理 5.4 设 R 是左、右凝聚环且 $\text{FP-id}(R_R) \leq n$, $n \geq 3$, 则 $r\mathcal{T}_n$ 是扩张闭的.

证明 设 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 是右有限表现 R- 模正合列， A, C 是 n- 挠自由模， $n \geq 3$. 则易知 A^*, C^* 是 W^{n-2}- 模.

考虑正合列

$$P_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to C^* \to 0,$$

其中每个 P_i 是有限生成投射左 R- 模. 于是有正合列

$$0 \to C \to P_0^* \to P_1^* \to \cdots \to P_{n-2}^* \to P_{n-1}^* \to H \to 0, \tag{10}$$

其中 $H = \operatorname{Coker}\left(P_{n-2}^* \to P_{n-1}^*\right)$.

设 $0 \to {}_R R \to I_0 \to I_1 \to \cdots \to I_i \to \cdots$ 是左 R- 模 R 的极小内射分解. 由 (10) 式及 [10] 定理 9.51 知， $\operatorname{Hom}_R\big(\operatorname{Ext}_R^1(C, R), \oplus_{i=0}^{n-1} I_i\big) \cong \operatorname{Tor}_1^R\big(C, \oplus_{i=0}^{n-1} I_i\big) \cong \operatorname{Tor}_{n+1}^R\big(H, \oplus_{i=0}^{n-1} I_i\big)$. 由 [4] 命题 2.2 知，每个 I_i 的平坦维数 $\leq n$, $0 \leq i \leq n-1$, 所以 $\operatorname{Hom}_R\big(\operatorname{Ext}_R^1(C, R), \oplus_{i=0}^{n-1} I_i\big) = 0$. 因

为 $\mathrm{Coker}\, f^* \subset \mathrm{Ext}\,^1_R(C,R)$, 所以 $\mathrm{Hom}\,_R\big(\mathrm{Coker}\, f^*, \oplus_{i=0}^{n-1} I_i\big) = 0$. 于是易知 $\mathrm{Ext}\,^i_R(\mathrm{Coker}\, f^*, R) = 0$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$. 当然有 $(\mathrm{Coker}\, f^*)^* = 0 = \mathrm{Ext}\,^1_R(\mathrm{Coker}\, f^*, R)$. 于是由正合列 $0 \to C^* \xrightarrow{g^*} B^* \xrightarrow{f^*} A^* \to \mathrm{Coker}\, f^* \to 0$ 可得正合列 $0 \to A^{**} \to B^{**} \to C^{**}$. 考虑如下正合交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \cong\downarrow & & \sigma_B\downarrow & & \cong\downarrow & & \\ 0 & \to & A^{**} & \to & B^{**} & \to & C^{**} & & \end{array}$$

所以 σ_B 是同构, 即 B 是自反模.

因 $0 \to \mathrm{Coker}\, g^* \to A^* \to \mathrm{Coker}\, f^* \to 0$ 正合. 且 A^* 是 W^{n-2}- 模, $\mathrm{Coker}\, f^*$ 是 W^{n-1}-模, 所以 $\mathrm{Coker}\, g^*$ 是 W^{n-2}- 模.

由正合列 $0 \to C^* \xrightarrow{g^*} B^* \to \mathrm{Coker}\, g^* \to 0$ 可得长正合列 $0 \to (\mathrm{Coker}\, g^*)^* \to B^{**} \to C^{**} \to \mathrm{Ext}\,^1_R(\mathrm{Coker}\, g^*, R) \to \mathrm{Ext}\,^1_R(B^*, R) \to \mathrm{Ext}\,^1_R(C^*, R) \to \mathrm{Ext}\,^2_R(\mathrm{Coker}\, g^*, R) \to \mathrm{Ext}\,^2_R(B^*, R) \to \mathrm{Ext}\,^2_R(C^*, R) \to \cdots$. 因 B, C 是自反模且 C^* 是 W^{n-2}- 模, 所以 $\mathrm{Ext}\,^i_R(\mathrm{Coker}\, g^*, R) \cong \mathrm{Ext}\,^i_R(B^*, R)$, $i = 1, \cdots, n-2$. 而 $\mathrm{Coker}\, g^*$ 是 W^{n-2}- 模, 所以 B^* 也是 W^{n-2}- 模. 故 $\mathrm{Tr}\, B$ 是 W^n- 模, 即 B 是 n- 挠自由模.

由引理 5.2, 引理 5.3 和引理 5.4 即知定理 5.1 是成立的.

注 显然定理 5.1 的结论具有对称性, 即我们有

定理 5.5 设 R 是左、右凝聚环且 $\mathrm{FP\text{-}id}(_RR) \le n$, n 为正整数. 则 $l\mathcal{T}_n$ 是左 R- 模范畴的扩张闭子模范畴.

致谢 作者感谢导师刘绍学教授的指导和张英伯教授的鼓励和帮助.

参 考 文 献

1 Stenträm B. Coherent rings and FP-injective modules. J London Math Soc, 1970, 2(2):323–329
2 Jain S. Flat and FP-injectivity. Proc Amer Math Soc, 1973, 41(2):437–442
3 丁南庆. 凝聚环中的对偶性. 南京大学学报数学半年刊, 1990, 7(1):60–66
4 丁南庆. GQF- 环. 数学年刊, 1992, 13A(2):230–239
5 Glaz S. Commutative Coherent Rings, Lecture Notes in Math 1371. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1989
6 Jacobson N. Basic Algebra II. San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1980
7 Bass H. Injective dimension in Noetherian rings. Trans Amer Math Soc, 1962, 102(1):18–29
8 Hoshino M. Reflexive modules and rings with self-injective dimension two. Tsukuba J Math, 1989, 13(2):419-422
9 Iwanaga Y. On rings with finite self-injective dimension. Comm in Algebra, 1979, 7(4):393–414
10 Rotman J J. An Introduction to Homological Algebra. New York: Academic Press, 1979