12. 设 $f(x) \in C_{(-\infty,+\infty)}, \lim_{x\to+\infty} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2$ 均有限，试证明

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+1) - f(x)]dx$$

收敛，并计算 I 之值。

(1) **证明** $I = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+1) - f(x)]dx$ 收敛。

先证 $\int_0^{+\infty} [f(x+1) - f(x)]dx$ 收敛。因为 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l_1$，故 $\forall\varepsilon > 0, \exists A > 0$ s.t. (such that) 当 $x > A$ 时 $|f(x) - l_1| < \varepsilon/2$. 对于任意 $A_1 > A, A_2 > A_1 + 1$ 有

$$\begin{aligned}
& \int_{A_1}^{A_2} [f(x+1) - f(x)]dx \\
= & \int_{A_1+1}^{A_2+1} f(x)dx - \int_{A_1}^{A_2} f(x)dx \\
= & \left[\int_{A_1+1}^{A_2} f(x)dx + \int_{A_2}^{A_2+1} f(x)dx\right] - \left[\int_{A_1}^{A_1+1} f(x)dx + \int_{A_1+1}^{A_2} f(x)dx\right] \\
= & \int_{A_2}^{A_2+1} f(x)dx - \int_{A_1}^{A_1+1} f(x)dx \\
= & \int_{A_2}^{A_2+1} (f(x) - l_1)dx - \int_{A_1}^{A_1+1} (f(x) - l_1)dx.
\end{aligned}$$

由此我们得到

$$\begin{aligned}
& \left|\int_{A_1}^{A_2} [f(x+1) - f(x)]dx\right| \\
\leq & \int_{A_2}^{A_2+1} |f(x) - l_1|dx + \int_{A_1}^{A_1+1} |f(x) - l_1|dx \\
\leq & \int_{A_2}^{A_2+1} \varepsilon/2 \ dx + \int_{A_1}^{A_1+1} \varepsilon/2 \ dx = \varepsilon.
\end{aligned}$$

类似讨论可知当 $A_1 < A_2 \leq A_1 + 1$ 时也有 $|\int_{A_1}^{A_2} [f(x+1) - f(x)]dx| < \varepsilon$. 由 Cauchy 准则知 $\int_0^{+\infty} [f(x+1) - f(x)]dx$ 收敛，类似可证 $\int_{-\infty}^{0} [f(x+1) - f(x)]dx$ 收敛，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+1) - f(x)]dx$ 收敛。

(2) 计算 I 的值。

我们有

$$I = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A [f(x+1) - f(x)]dx + \lim_{A'\to\infty} \int_{-A'}^{0} [f(x+1) - f(x)]dx.$$

而当 $A>1, A^{'}>1$ 时

$$\begin{aligned}
\int_0^A [f(x+1)-f(x)]dx &= \int_1^{A+1} f(x)dx - \int_0^A f(x)dx \\
&= \int_A^{A+1} f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx; \\
\int_{-A'}^0 [f(x+1)-f(x)]dx &= \int_{-A'+1}^1 f(x)dx - \int_{-A'}^0 f(x)dx \\
&= \int_0^1 f(x)dx - \int_{-A'}^{-A^{'}+1} f(x)dx.
\end{aligned}$$

因此

$$I = \lim_{A\to+\infty} \int_A^{A+1} f(x)dx - \lim_{A'\to+\infty} \int_{-A'}^{-A^{'}+1} f(x)dx.$$

利用 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l_1$ 易知 $\lim_{A\to+\infty} \int_A^{A+1} (f(x)-l_1)dx = 0$(见上面的证明部分（1）)，因此 $\lim_{A\to+\infty} \int_A^{A+1} f(x)dx = l_1$，同理可知 $\lim_{A'\to+\infty} \int_{-A'}^{-A^{'}+1} f(x)dx = l_2$，因此 $I = l_1 - l_2$.