7. 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调，0 和 1 可以是 $f(x)$ 的奇点，若 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$$

证明：无论 0 和 1 是否为 $f(x)$ 的奇点，因为 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛，必有

$$\int_0^t f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-1}{n}} f(x)dx.$$

以下证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-1}{n}} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{7.1}$$

不妨设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调上升，则对任意 $k=1,2,\cdots,n-2$，我们有 $\frac{1}{n}\ f(\frac{k}{n})\leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx\leq \frac{1}{n}\ f(\frac{k+1}{n})$. 于是 $\frac{1}{n}\ \sum_{k=1}^{n-2} f(\frac{k}{n})\leq \sum_{k=1}^{n-2}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx\leq \frac{1}{n}\ \sum_{k=1}^{n-2} f(\frac{k+1}{n})$, 即

$$\frac{1}{n}\ \sum_{k=1}^{n-2} f\left(\frac{k}{n}\right)\leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-1}{n}} f(x)dx\leq \frac{1}{n}\ \sum_{k=1}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right). \tag{7.2}$$

又

$$\frac{1}{n}\ \sum_{k=1}^{n-2} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\ \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}\ f\left(\frac{n-1}{n}\right), \tag{7.3}$$

$$\frac{1}{n}\ \sum_{k=1}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\ \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{n}\ f\left(\frac{1}{n}\right). \tag{7.4}$$

若 0 不为 $f(x)$ 的奇点，则由 $f(x)$ 的单调性知 $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})$ 存在有限，因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}f(\frac{1}{n})=0$；若 0 为 $f(x)$ 的奇点，由 $f(x)$ 的单调性并利用 Chauchy 收敛准则 (考虑 $\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(u)du$) 必有 $\lim_{x\to 0+} xf(x)=0$, 故我们总有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ f\left(\frac{1}{n}\right)=0, \tag{7.5}$$

同理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ f\left(\frac{n-1}{n}\right)=0. \tag{7.6}$$

由 (7.3),(7.4),(7.5),(7.6) 知

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\ \sum_{k=1}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right)-\frac{1}{n}\ \sum_{k=1}^{n-2} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=0. \tag{7.7}$$

由 (7.2),(7.7) 知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-1}{n}} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2} f\left(\frac{k}{n}\right). \tag{7.8}$$

利用 (7.4),(7.5) 与 (7.8) (或者 (7.3),(7.6) 与 (7.8)) 立知 (7.1) 成立。证毕。