8. 设$f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上单调，且 $\int_0^\infty f(x)dx$ 收敛，则

$$\lim_{h\to 0+} h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^\infty f(x)dx. \tag{8.1}$$

证明：由题意知 ∞ 为唯一奇点，因为 $\int_0^\infty f(x)dx$ 收敛，故对任意单调上升趋于 ∞ 的数列 $\{A_n\}(A_0=0)$ 有函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)dx$ 收敛且

$$\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x)dx.$$

特别，对任意 $h>0$，取 $A_n := nh, n=0,1,\cdots$，则

$$\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h} f(x)dx. \tag{8.2}$$

不妨设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上单调上升，则对于任意 $n=0,1,\cdots$，有 $h\cdot f(nh) \le \int_{nh}^{(n+1)h} f(x)dx \le h\cdot f((n+1)h)$，于是

$$h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh) \le \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h} f(x)dx \le h\sum_{n=0}^{\infty} f((n+1)h).$$

利用 (8.2) 可得

$$h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh) \le \int_0^\infty f(x)dx \le h\sum_{n=0}^{\infty} f((n+1)h). \tag{8.3}$$

又

$$h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh) = h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) + h\cdot f(0), \quad h\sum_{n=0}^{\infty} f((n+1)h) = h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh), \tag{8.4}$$

而 $\lim_{h\to 0+} hf(0)=0$. 利用 (8.3),(8.4) 即可知道 (8.1) 成立 (请参看第 7 题的解答)。证毕。