9. 设 $\int_0^\infty f(x)dx$ 收敛，且 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，因此对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，使得只要 $x_1, x_2 \in [0,\infty), |x_1 - x_2| \le \delta$，便有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/2$，于是对于任意 $x \ge 0$ 有

$$(f(x) - \varepsilon/2)\cdot\delta \le \int_x^{x+\delta} f(u)du \le (f(x) + \varepsilon/2)\cdot\delta,$$

即

$$f(x) - \varepsilon/2 \le \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} f(u)du \le f(x) + \varepsilon/2,$$

也即

$$\left| f(x) - \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} f(u)du \right| \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.1}$$

对于上述 $\delta(\varepsilon)$, 因为 $\int_0^\infty f(x)dx$ 收敛, 由 Chauchy 收敛准则知 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} f(u)du = 0$，因此存在 $A(\varepsilon) > 0$，使得当 $x > A$ 时有

$$\left| \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} f(u)du \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.2}$$

于是当 $x > A$ 时由 (9.1),(9.2) 知 $|f(x)| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. 证毕。