9. 证明 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上正常可积的冲要条件是：对任给的 $\eta>0,\sigma>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意的分法，只要最大直径 $d<\delta$，就有对应于 $f(x,y)$ 的振幅大于等于 σ 的小区域 $\triangle D_i$ 总面积小于 η.

证明. **充分性**: 我们用 $\mu(D)$ 表示 D 的面积，用 ω 表示 $f(x,y)$ 在 D 上的最大振幅（可假设 $\omega>0$，不然 $f(x,y)$ 为一个常数，在 D 上自然可积）。对任意 $\varepsilon>0$，取 $\eta>0,\sigma>0$，且满足 $\eta<\frac{\varepsilon}{2\mu(D)},\sigma<\frac{\varepsilon}{2\omega}$，则存在 $\delta>0$ 使得对任意的分法 $D_1,\cdots,D_n$，当最大直径 $d<\delta$ 时，由假设有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\triangle D_i &= \sum_{\omega_i<\sigma}\omega_i\triangle D_i+\sum_{\omega_i\geq\sigma}\omega_i\triangle D_i\\ &\leq \sigma\cdot\mu(D)+\omega\cdot\eta<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此由定义知 $f(x,y)$ 在 D 上正常可积。

必要性：用反证法，假设 $f(x,y)$ 在 D 上正常可积，而且存在 $\eta'>0,\sigma'>0$ 使得对任意 $\delta>0$，都存在对 D 的一个分法 $D_1,\cdots,D_n$ 满足最大直径 $d<\delta$ 而且振幅大于等于 δ' 的小区域的总面积大于等于 η'，则我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\triangle D_i &= \sum_{\omega_i<\sigma'}\omega_i\triangle D_i+\sum_{\omega_i\geq\sigma'}\omega_i\triangle D_i\\ &\geq \sum_{\omega_i\geq\sigma'}\omega_i\triangle D_i\geq\sigma'\cdot\eta'.\end{aligned}$$

而 $\sigma'\cdot\eta'$ 为有固定正常数，故由二重积分的等价性条件知 $f(x,y)$ 在 D 上不可积，与假设矛盾，因此假设不成立，从而命题的必要性成立。 □

10 **题**. **利用第** 9 **题的结论容易证明**。