数学分析习题: 第 5 周

梅加强

http://math.nju.edu.cn/~meijq

2007.3

说明: 只有习题是必须写在作业本上上交的, 思考题做好后可以交给我, 但必须是严格独立完成的.

习题:

1. 在区间 $[0,1]$ 上递归地定义函数列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_1(x) \equiv 1, \quad f_{n+1}(x) = \sqrt{xf_n(x)},\ n \geqslant 1.$$

证明 $\{f_n\}$ 一致收敛到 $[0,1]$ 上的一个连续函数.

2. 设 $f_1(x)$ 为 $[0,a]$ 上的连续函数, 递归地定义函数列 $\{f_n\}$ 如下:

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt, \quad n \geqslant 1.$$

证明 $\{f_n\}$ 一致收敛到 0.

3. 判断下列函数项级数的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}, x \in (0,+\infty)$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(\frac{1}{3^n x}), x \in (0,+\infty)$,

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}, x \in (-\infty,+\infty)$, (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}, x \geqslant 0$,

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+nx)^2}, x \in (0,+\infty)$, (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^3x^2}, x \in (-\infty,+\infty)$.

4. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证明, 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}, x \in [0,+\infty),$$

一致收敛.

5. 记 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+n^2x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$. 求极限 $\lim_{x\to\infty}f(x)$.

6. 证明函数
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$$
在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微.

7. 证明函数
$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$
在 $(1,+\infty)$ 上任意次可微.

8. 计算下列积分

   (1) $\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 5}\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}dx$,

   (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}dx$.

9. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=R>0$ 处收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,R]$ 上一致收敛.

思考题:

1. 设 $\{P_n(x)\}$ 为一列多项式, 证明, 如果 $P_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛到函数 $f(x)$, 则 $f(x)$ 也是多项式.

2. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 其部分和为 $S_n(x)$. 如果存在常数 M, 使得
$$|S_n'(x)|\leqslant M,\quad \forall\ x\in[a,b],\ n\geqslant 1,$$
则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

3. (1) 设 f_n 为 $[a,b]$ 上一列连续函数, 且 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, $\forall\ x\in[a,b]$. 证明, 存在常数 $M>0$ 以及子区间 $[c,d]\subset[a,b]$, 使得
$$|f(x)|\leqslant M,\ \forall\ x\in[c,d].$$
(2) 利用 (1) 证明, 如果 g 是在 $[a,b]$ 上的可微函数, 则其导函数 g' 一定在某个子区间上有界.