数学分析习题: 第 7 周

梅加强

http://math.nju.edu.cn/~meijq

2007.4

说明: 只有习题是必须写在作业本上上交的, 思考题做好后可以交给我, 但必须是严格独立完成的.

习题:

1. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上二阶连续可微, 且 $f(-\pi)=f(\pi)$, $f'(-\pi)=f'(\pi)$, 证明其 Fourier 系数有如下估计
$$a_n=o(\frac{1}{n^2}),b_n=o(\frac{1}{n^2}),\ n\to\infty.$$

2. 在区间 $(-\pi,\pi)$ 中求下列函数的 Fourier 展开:

   (1) $|x|$, (2) $\cos ax$,

   (3) $\sin ax$, (4) $x\sin x$.

3. 设 f 是周期为 2π 的函数, 且
$$f(x)=\frac{\pi-x}{2},\ x\in[0,2\pi);\ f(2\pi)=\frac{\pi}{2}.$$
求 f 的 Fourier 展开.

4. 设 f 的 Fourier 系数为 a_n,b_n. 试求 $f(x)\sin x$ 的 Fourier 系数.

5. 设 f 是周期为 2π 的函数, 且在 $(0,2\pi)$ 上单调递减. 证明其 Fourier 系数 $b_n\geqslant 0$, $n=1,2,\cdots$.

6. 证明
$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})x=\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}},\ \forall\ n\geqslant 1,$$

并由此说明

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} dx = n\pi,\ \forall\ n \geqslant 1.$$

7. 求 $|\sin x|$ 和 $|\cos x|$ 的 Fourier 展开级数, 并说明其 Fourier 级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛到自身.

8. 在区间 $(-l, l)$ 上把下列函数展开为 Fourier 级数:

$$(1)\ x, \quad (2)\ x + |x|.$$

9. 把函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3 - x, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

展开成 Fourier 级数.

10. 把下列分段定义的函数展开为 Fourier 余弦级数:

$$(1)\ f(x) = x,\ x \in [0, 1];\ f(x) = 2 - x,\ x \in [1, 2], \quad (2)\ f(x) = 1,\ x \in [0, a];\ f(x) = 0,\ x \in [a, \pi].$$

11. 把下列函数展开为 Fourier 正弦级数:

$$(1)\ f(x) = \cos 2x,\ x \in [0, \pi], \quad (2)\ f(x) = x - \frac{x^2}{2},\ x \in [0, 1].$$

思考题:

1. 设 f 为 $[a, b]$ 上 Riemann 可积函数, g 为 $\mathbb{R}$ 上周期函数, 周期为 T 且在 $[0, T]$ 上可积. 证明

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b f(x) g(\lambda x) dx = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) dx \int_0^T g(x) dx.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 证明

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^a f(x) \frac{\sin^2 \lambda x}{\sin^2 x} dx = \frac{\pi}{2} f(0).$$