数学分析习题: 第 8 周

梅加强

http://math.nju.edu.cn/~meijq

2007.4

说明: 只有习题是必须写在作业本上上交的, 思考题做好后可以交给我, 但必须是严格独立完成的.

习题:

1. 证明下列等式:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4},\ x \in (-\pi, \pi),$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2}{12}x - \frac{x^3}{12},\ x \in [-\pi, \pi].$$

2. 证明下列等式:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n} = \log(2\cos\frac{x}{2}),\ x \in (-\pi, \pi),$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n} = -\log(2\sin\frac{x}{2}),\ x \in (0, 2\pi).$$

3. 设 $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(c_n \cos nx + d_n \sin nx)$ 为三角多项式, 证明, 对任何 Riemann 可积函数 f, 均有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - T_n(x)|^2 dx \geqslant \int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - S_n(x)|^2 dx,$$

其中 $S_n(x)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 展开的部分和.

4. 利用 $f(x) = x^3$ 的 Fourier 展开及 Parseval 等式求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

5. 利用函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{\pi-x}{2}, & 1<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

的 Fourier 展开求下列级数的和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}.$$

6. 用 Fourier 积分表示函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(a,b),\\ 0, & x\in(-\infty,a]\cup[b,+\infty).\end{cases}$$

并通过取特殊的值重新得到积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

7. 用 Fourier 积分表示函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in(-\pi,\pi),\\ 0, & x\in(-\infty,-\pi]\cup[\pi,+\infty).\end{cases}$$

8. 利用用 Fourier 积分证明

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cos 2xt dt=\begin{cases}1-x, & x\in[0,1],\\ 0, & x\in[1,+\infty).\end{cases}$$

思考题:

1. 证明

$$(1)\ \int_0^1\frac{\log x}{1-x}dx=-\frac{\pi^2}{6},\quad (2)\ \int_0^1\frac{\log x}{1+x}dx=-\frac{\pi^2}{12}.$$

2. 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可微, 且

$$f(-\pi)=f(\pi),\quad \int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0.$$

如果 f' 可积并平方可积, 则

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2dx\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx,$$

并求等号成立的条件.