

# 南京大学数学系试卷

共4页 第1页

2005 / 2006 学年第 二 学期      课 程 名 称      数学竞赛  
 试卷类型 A 卷    考试形式 闭卷      使 用 班 级      2005 级  
 命 题 人 郭学军, 梅加强, 张高飞      考 试 时 间      2006 年 5 月 \_\_\_\_\_ 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

**说明:**

1. 请将班级、学号、姓名写在试卷左侧装订线外。
  2. 本试卷共 8 道大题, 满分 100 分, 考试时间 180 分钟。
- 
1. 写出下列各题答案并说明理由.
    - 1) 将 2006 写成 49 个互不相同的自然数之和, 请问, 这些自然数中最少要有几个奇数?
    - 2) 是否存在有限个互不相同的自然数  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , 使得  $\frac{1}{2006} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i}$  ?
    - 3) 能否把区间  $(0, 1)$  中的所有有理数排成递增的一列? (15分)

姓名 \_\_\_\_\_  
 学号 \_\_\_\_\_  
 班级 \_\_\_\_\_

2. 把平面上单位圆周上的某偶数个点染成红色, 证明, 存在经过原点的一条直线, 使得它不经过这些点中的任何一个, 而且这条直线两边红色点的个数相等. (10分)

3. 设  $\{U_\alpha\}$  是  $R$  上一族互不相同的开区间. 假设存在正数  $I$ , 使得这些开区间中任意有限个的长度之和总是小于  $I$ , 证明

- 1) 这些开区间只有有限多个或可数多个;
- 2) 这些开区间无法覆盖整个  $R$ ;
- 3) 进一步,  $R$  上有不可数多个点不属于这些开区间中的任何一个. (10分)

4. 1) 记  $R$  上的有理数全体  $Q$  为  $Q = \{r_n | n = 1, 2, \dots\}$ . 令  $U = \cup_{n=1}^{\infty} (r_n - \frac{1}{2^n}, r_n + \frac{1}{2^n})$ . 定义  $R$  上的函数  $g$  如下:  $g(x) = \inf\{|x - y| : y \notin U\}$ . 证明  $g$  为连续函数.

2) 在  $R$  上定义函数  $\phi$  如下: 当  $x \in U$  时  $\phi(x) = 0$ ;  $x \notin U$  时  $\phi(x) = 1$ . 证明  $\phi$  在任何长度大于 2 的闭区间上都不是 Riemann 可积的.

3) 举例说明, 若函数  $f$  可积,  $g$  连续, 则复合函数  $f \circ g$  未必可积. (15分)

5. 制作平面地图至少要满足两个条件, 即, 不同地点在地图上也不同; 两个相邻的地点在地图上也是相邻的. 证明, 不可能为全球制作一张平面地图. (15分)

6. 设  $n$  阶复方阵  $A$  的特征值全是 1, 证明  $A$  的任意次幂都与  $A$  相似. (10分)

7. 如果  $A$  是  $n$  阶可逆复方阵, 则存在  $n$  阶复方阵  $B$  使得  $B^3=A$ . (10分)

8. 设数域  $F$  上的  $m \times n$  矩阵  $A, B$  和  $A+B$  的秩分别是  $r, s$  和  $r+s \leq \min\{m, n\}$ . 证明存在可逆矩阵  $P, Q$  使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad PBQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}.$$

这里的  $I_r, I_s$  分别表示  $r, s$  阶的单位方阵. (15分)