南京大学数学系试卷

2005 / 2006 学年 第 二 学期　　课程名称 数学分析

试卷类型 A 卷　考试形式 闭卷　　使用班级 2005 级

命题人 梅加强　　考试时间 2006 年 12 月 20 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

班级＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿

装 订 线

说明:

1. **请将班级、学号、姓名写在试卷左侧装订线外.**
2. **本试卷共** 12 **道大题, 满分** 150 **分, 考试时间** 180 **分钟。**

一、（30分）举例:

1. 举一个极限点在 $[0,1]$ 区间上稠密的数列.

2. 举一个有振动间断点的函数.

3. 举一个连续但不是一致连续的函数.

4. 举一个可逆的可微函数, 但其逆函数不可微.

5. 举一个非零的可微函数, 它在某一点的任意阶导数均为零.

6. 举一个 Riemann 不可积的函数.

7. 举一个非负函数 $f(x)$, 它在 $[0,+\infty)$ 上积分收敛, 但极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 不存在.

8. 举一个在 $[0,1]\times[0,1]$ 上定义的二元函数 $f(x,y)$, 它分别对于变量 x, y 连续, 但不是连续的二元函数.

9. 举一个偏导数存在, 但不可微的二元函数.

10. 举一个收敛但不绝对收敛的数项级数.

二、（10分）假设一元函数 $\phi(x)$ 一阶连续可导, 令 $f(x) = x^2\cdot\phi(x)$, 计算 $f''(0)$.

三、（10分）研究一元函数 $y=\sin(x^3)$ 的极值点、零点, 并画出草图.

四、（10分）计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos 20x)\cdot\sin(10x)dx$.

五、（10分）计算积分 $\iint_S \frac{ds}{(1+x+y)^2}$, 其中 S 为四面体 $x+y+z\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ 的边界曲面.

六、（10分）计算二重积分 $\iint_D |x-y|dxdy$, 其中 D 为圆域 $x^2+y^2\le a^2$.

七、（10分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间二阶连续可微, 且 $f(0)=0, f(1)=1$, $f''(x)<0, \forall x\in[0,1]$. 证明 $f(x)\ge x, \forall x\in[0,1]$.

八、（10分）设 $a_{n+1}>a_n>0$, $n=1,2,\cdots$. 证明, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1)$ 收敛的充分必要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$ 收敛.

九、（15分）设 $f_n(x)$ 是 $[0,1]$ 上的非负连续函数, 对 $\forall\epsilon>0$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[0,1-\epsilon]$ 上一致收敛到 $f(x)$. 若 $\lim_{x\to 1^-}f(x)=a$ 有限, 证明

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(1)$ 收敛；

(b) 进一步，假设 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(1)=a$, 令

$$\bar f(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,1)\\ a, & x=1\end{cases}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 $\bar f(x)$.

十、（10分）设 $f:R^2\to R$ 为二元连续函数. 证明存在两个不同的点 p,q 使得 $f(p)=f(q)$.

十一、（15分）(1) 设 $f(t)$ 连续, 试证明

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}f(ax+by+cz)dxdydz=\pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(ku)du,$$

其中 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$.

(2) 利用 (1) 或直接计算积分

$$\iint_S(\frac{1}{2}x^2+xy+xz)dydz$$

其中 S 是球面 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$, 且积分是沿球面外侧而取的.

十二、（10分）设 $f:R^n\to R^n$ 为 C^1 的向量值函数, 且满足条件

$$\|f(x)-f(y)\|\ge\|x-y\|,\ \ \forall x,y\in R^n.$$

这里, $\|\cdot\|$ 是 R^n 上的标准范数. 证明 f 可逆, 且其逆映射也是 C^1 的.