南京大学数学系试卷

2005 / 2006 学年第 二 学期　　课程名称 数学分析

试卷类型 A 卷　考试形式 闭卷　　使用班级 2005 级

命题人 梅加强　　考试时间 2006 年 6 月 20 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

班级________ 学号________ 姓名________

装 订 线

说明:

1. **请将班级、学号、姓名写在试卷左侧装订线外。**
2. **本试卷共** 4 **道大题, 含** 12 **道小题, 满分** 100 **分, 考试时间** 120 **分钟。**

一、 叙述题（20分）

1. 设 $f: R^m \to R^n$为多元向量值函数, $x_0 \in R^m$. 叙述 f 在 x_0 可微的定义.（10分）

2. 叙述正项级数 Cauchy 判别法的条件及结论, 并举一个不能用 Cauchy 判别法判别收敛性的例子.（10分）

二、 计算题（25分）

1. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 之和.（5分）

2. 方程 $x^2+2y^2+3z^3+2xy-z=7$ 在 $(1,-2,1)$ 附近决定了隐函数 $z=z(x,y)$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,-2)$ 的值.（10分）

3. 求函数 $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ 在约束条件 $x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=12$ 下的极值.（10分）

三、 判断题（15分）判断如下级数的敛散性并说明理由:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.（5分）

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{(-1)^n}{2n}]$.（5分）

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n^2)$.（5分）

四、 证明题（40分）

1. 设 $f: R^n \to R$ 为任意次可微的多元函数, 且 $f(0,\cdots,0)=0$. 证明, 存在任意次可微的多元函数 $g_i: R^n \to R(i=1,2,\cdots,n)$, 使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ \forall\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n.$$

（10分）

2. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实正定对称方阵, $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数. 考虑 R^n 上的函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j-\sum_{i=1}^n b_ix_i$. 证明

(i) f 在 R^n 上有惟一的最小值点; (ii) f 的最小值为 $-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}b_ib_j$, 这里 a^{ij} 是 A 的逆矩阵在 ij 位置的元素. （10分）

3. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实方阵, 定义其范数为 $\|A\|=[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2]^{\frac{1}{2}}$. 对于一列 n 阶实方阵 $B_k=(b_{kij})$, 如果对于 $i,j=1,2,\cdots,n$, 每个数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty}b_{kij}$ 都收敛, 我们就称矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty}B_k$ 收敛, 其和仍为 n 阶实方阵, 此方阵在 i,j 位置的元素是上述 i,j 位置数项级数之和. 现假设 $\|A\|<1$, 证明

(i) 矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛, 其中 A^k 表示 A 的 k 次幂, A^0 为单位矩阵.

(ii) 把(i) 中矩阵级数之和记为B, 证明 B 为可逆矩阵, 且 $\|I_n-B\|\le\|A\|\cdot[1-\|A\|]^{-1}$.

（10分）

4. 设 $f:R^n\to R^n$ 为连续可微的映射, 满足条件

$$\|f(x)-f(y)\|\ge\|x-y\|,\ \ \forall x,y\in R^n.$$

证明 f 为一一映射, 且其逆映射 f^{-1} 也是连续可微的.（10分）