南 京 大 学 数 学 系 试 卷

2005 / 2006 学年第 二 学期　　课程名称 数学分析

试卷类型 B 卷　考试形式 闭卷　　使用班级 2005 级

命题人 梅加强　　考试时间 2006 年 6 月 19 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人
得分												

班级________ 学号________ 姓名________

装 订 线

说明：

1. **请将姓名、学号写清楚。**
2. **本试卷前四道大题共** 100 **分；最后一题为附加题。考试时间共** 120 **分钟。**

一、 叙述题（20 分）

1. 设 $f: R^n \to R^m$ 为多元向量值函数, $x_0 \in R^n$. 叙述 f 在 x_0 可微的定义.（10 分）

2. 叙述正项级数达朗贝尔判别法(也叫比值判别法)的条件及结论, 并举一个不能用达朗贝尔判别法判别收敛性的例子.（10 分）

二、 判断题（20 分）判断如下级数的敛散性并说明理由:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.（5 分）

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.（5分）

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.（5分）

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{(-1)^n}{2n}]$.（5分）

三、 计算题（20分）

1. 方程 $x^2+2y^2+3z^3+2xy-z=7$ 在 $(1,-2,1)$ 附近决定了隐函数 $z=z(x,y)$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,-2)$ 的值.（10分）

2. 求函数 $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$ 在约束条件 $x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=12$ 下的极值.（10分）

四、 证明题（40分）

1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}a_n$ 收敛. 证明, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛. (提示: Abel 判别法.)（10分）

2. 设 $\lambda\in(0,1)$为固定的实数, $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n):R^n\to R^n$ 为可微映射, 且 $\sum_{i,j=1}^{n}(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})^2\le\lambda$. 证明

(i) $\|f(x)-f(y)\|\le\sqrt{\lambda}\|x-y\|,\ \forall\ x,y\in R^n$;　(ii) 存在惟一的 $x\in R^n$, 使得 $f(x)=x$.（10分）

3. 设 $\alpha>1,\ a_n>0$, 记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i,\ n=1,2,\cdots$. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 总是收敛的. (提示: 可用积分判别法的思想.)（10分）

4. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶实正定对称方阵, $b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数. 考虑 R^n 上的函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j-\sum_{i=1}^n b_ix_i$. 证明

(i) f 在 R^n 上有惟一的最小值点;　(ii) f 的最小值为 $-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n a^{ij}b_ib_j$, 这里 a^{ij} 是 A 的逆矩阵在 ij 位置的元素.（10 分）

五、 附加题（10 分）设 $f:R^n\to R$ 为任意次可微的多元函数, 且 $f(0,\cdots,0)=0$. 证明, 存在任意次可微的多元函数 $g_i:R^n\to R(i=1,2,\cdots,n)$, 使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i\cdot g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ \forall\ (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n.$$