数学分析期末考试　　2007.1.12.

姓名 ____________ 年级 ____________ 学号 ____________

一、计算题（每题 8 分，共 32 分）。

1. 计算二重积分 $\iint_{(x-2)^2+y^2\leq 4} (x-2)y^2dxdy$.

2. 计算曲面积分 $\iint_S (2x+z)dydz+(2y+x)dzdx+(2z+y)dxdy$, 其中 S 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围立体的边界曲面，取外侧。

3. 验证以下积分与路径无关，并计算。
$\int_{(3,1)}^{(1,3)} \frac{ydx-xdy}{x^2}$, 沿不与 oy 轴相交的路径。

4. 计算曲面积分 $\iint_S xdS$，其中 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

二、(10 分) 设 D 是由 $x^2=a, x^2=by, y^2=px, y^2=qx$ 所围成的区域，其中 $0<a<b, 0<p<q$，计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2\sin(xy)}{y}dxdy$.

三、(12 分) 证明 $\mathbf{A}=(x^2-2yz, y^2-2xz, z^2-2xy)$ 是有势场，并求其势函数。

四、(12 分) 给定函数

$$f(x) = \mathrm{sgn}\ x = \begin{cases} -1, & 当\ -\pi < x < 0; \\ 0, & 当\ x = 0; \\ 1, & 当\ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

(1) 求 $f(x)$ 的 Fourier 级数，并说明在哪些点上该级数收敛到 $f(x)$.

(2) 利用以上级数证明以下的等式：

$$\frac{\pi}{2} = 2(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots).$$

五、(12 分) 设函数 $F(x, y, z)$ 二阶连续可微，$F(x, y, z) = 0$ 给定了一光滑曲面 S，D 是 S 所包含的区域，且 $F(x, y, z)$ 在内小于零，求以下的积分

$$\iiint_D \left(\mathrm{div} \frac{\mathrm{grad} F}{|\mathrm{grad} F|} \right) dxdydz.$$

六、(12 分) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，且具有连续导函数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$，
(1) 试证存在常数 $M > 0$ 使得 $f(x)$ 的 Fourier 系数 a_n, b_n 满足

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{M}{n^2};$$

(2) 试证 $f(x)$ 的 Fourier 级数一致收敛到 $f(x)$.

七、(12 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上非负连续，$x = b$ 是 $f(x)$ 的一个奇点，且反常积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛。在 $[a, b)$ 上定义函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，对任意 $x \in [a, b), n \geq 1$, 定义

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{如果 } f(x) \leq n; \\ n, & \text{如果 } f(x) > n. \end{cases}$$

试证：
(1) 对任意 $\delta, 0 < \delta < b, f_n(x)$ 在 $[a, b - \delta]$ 上一致收敛到 $f(x)$.
(2) $\int_a^b f_n(x)dx$ 关于 n 一致有界.
(3) $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.