Riemann 可积的充要条件*

梅加强
南京大学数学系
http://math.nju.edu.cn/~meijq

定义 1 设 $A \subset \mathbb{R}$, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 均存在覆盖 A 的至多可数个开区间, 使得这些开区间长度总和小于 ε, 则称 A 为零测集.

例子 (1) 可数集是零测集; (2) 零测度的子集仍为零测度; (3) 可数个零测度之并仍为零测集.

设 f 是定义在 $[a,b]$ 上有界的实函数, $\forall\, x \in [a,b]$, 定义 f 在 x 处的振幅 $w_f(x)$ 为

$$w_f(x) = \lim_{r\to 0} \sup\{|f(x_1) - f(x_2)| :\, x_1, x_2 \in (x-r, x+r) \cap [a,b]\}$$

易见, f 在 x 处连续 $\Leftrightarrow w_f(x) = 0$. 记 $D_\delta = \{x \in [a,b] | w_f(x) \geq \delta\}$, 则 f 的不连续点全体为 $D_f = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}$.

定理 (Riemann 可积的充要条件) $[a,b]$ 上的有界函数 f Riemann 可积 $\Leftrightarrow D_f$ 为零测集.

证明 $(\Rightarrow)$ 设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 固定 $\delta > 0$, 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在 $[a,b]$ 的分割

$$\pi :\; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{k} w_i(f) \cdot \Delta x_i < \varepsilon \cdot \frac{\delta}{2}$$

---

* 《数学分析》补充材料, 2007.3

这里 $w_i(x) = \sup\{|f(x') - f(x'')|\,|\,x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]\}$. 如果 $x \in D_\delta \cap (x_{i-1}, x_i)$, 则显然 $w_i(f) \geq w_f(x) \geq \delta$, 因此

$$\sum_{D_\delta \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$$

显然

$$D_\delta \subset \bigcup_{D_\delta \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset} (x_{i-1}, x_i) \bigcup_{i=0}^{n} (x_i - \frac{\varepsilon}{4(n+1)}, x_i + \frac{\varepsilon}{4(n+1)})$$

且

$$\sum_{D_\delta \cap (x_{i-1}, x_i) \neq \emptyset} \Delta x_i + \frac{\varepsilon}{4(n+1)} \cdot 2(n+1) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

由定义 1, D_δ 为零测集. 这说明, $Df = \bigcup_{n \geq 1} D_{\frac{1}{n}}$ 为零测集.

($\Leftarrow$) 设 $|f(x)| \leq M$, $\forall\, x \in [a, b]$, 由假设, D_f 为零测集, 故 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在开区间 $\{(\alpha_i, \beta_i) | i = 1, 2, \cdots\}$, 使得 $D_f \subset \bigcup_{i \geq 1} (\alpha_i, \beta_i)$, 且

$$\sum_{i \geq 1} (\beta_i - \alpha_i) < \varepsilon.$$

对 $\forall\, x \in [a, b] - \bigcup_{i \geq 1} (\alpha_i, \beta_i)$, 因 f 在 x 处连续, 故存在含 x 的开区间 I_x, 使得当 $t \in [a, b] \cap I_x$ 时

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

$\{(\alpha_i, \beta_i),\ I_x | i \geq 1, x \in [a, b] - \bigcup_{i \geq 1} (\alpha_i, \beta_i)\}$ 为紧致集 $[a, b]$ 的一个开覆盖, 故存在有限子覆盖 $\{(\alpha_{i_k}, \beta_{i_k}), I_{x_l} | k = 1, 2, \cdots, m,\ l = 1, 2, \cdots, n\}$. 由 Lebesgue 数定理, 可取 $[a, b]$ 的分割

$$\pi:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_l = b,$$

使得 $\forall\, [x_{i-1}, x_i]$ 必含于某 $(\alpha_{i_k}, \beta_{i_k})$ 或 I_{x_l} 中. 此时

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l} w_i(f) \Delta x_i &\leq \sum_{[x_{i-1}, x_i] \subset (\alpha_{i_k}, \beta_{i_k})} w_i(f) \cdot \Delta x_i + \sum_{[x_{i-1}, x_i] \subset I_{x_l}} w_i(f) \cdot \Delta x_i \\ &\leq 2M \cdot \varepsilon + 2\varepsilon \cdot (b - a) \end{aligned}$$

因此 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积.