处处连续但无处可导的函数*

梅加强

南京大学数学系

http://math.nju.edu.cn/~meijq

在数学分析微积分发展的早期, 人们猜测: 连续函数的不可导点至多只有可数个. 1872 年, Weierstrass 利用无穷级数的理论给出了一个反例:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cdot\sin(b^n\alpha),\qquad 0<a<1,\quad b>\frac{1}{a}.$$

这个函数处处连续但无处可导! 1930 年, Van Der Waerden 给出了更简单的例子, 下面我们讨论的例子基本上就是他举出来的.

用 $\varphi(x)$ 表示 x 与离它最近的整数之间的距离, 这是一个周期为 1 的连续函数,

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \dfrac{1}{2},\\ 1-x, & \dfrac{1}{2}<x\le 1.\end{cases}$$

令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(4^n x)}{4^n},\ x\in\mathbb{R}.$$

因为 $0\le\varphi\le\frac{1}{2}$, 故上面的函数项级数在整个 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛, 从而 f 在 $(-\infty,\infty)$ 上处处连续.

下面我们说明 f 无处可导. 首先注意到 f 也是周期函数, $f(x)=f(x+1), \forall\, x\in\mathbb{R}$. 我们只要说明 f 在 $[0,1)$ 中无处可导即可. 先以 $x_0=0$ 为例看一下. 取 $h_m=4^{-m}$, 则当 $n\le m-1$ 时, $\varphi(4^n h_m)=4^n h_m$; $n\ge m$

*《数学分析》补充材料, 2007.3

时, $\varphi(4^n h_m) = 0$. 因此

$$\frac{f(h_m) - f(0)}{h_m} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\varphi(4^n h_m)}{4^n \cdot h_m} = \sum_{n=0}^{m-1} 1 = m,\ m \geq 1.$$

因为 $h_m \to 0$ $(m \to \infty)$, 故上式表明 f 在 0 处不可导.

对于一般的 $x_0 \in (0,1)$, 做法类似. 把 x_0 写成 4 进位无穷小数 (对于有限小数, 可在末尾添无穷个 0).

$$x_0 = 0 \cdot x_1 x_2 x_3 \cdots x_m \cdots$$

其中 x_m 可取 0,1,2,3. 我们这样选取 h_m:

$$h_m = \begin{cases} 4^{-m}, & \text{当 } x_m = 0 \text{ 或 } 2; \\ -4^{-m}, & \text{当 } x_m = 1 \text{ 或} 3. \end{cases}$$

注意到

$$4^n x_0 = x_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1} \cdots x_m \cdots$$
$$4^n (x_0 + h_m) = x_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1} \cdots (x_m \pm 1) \cdots$$

根据 h_m 的选取, $4^n x_0$ 和 $4^n(x_0 + h_m)$ 同时属于 $[k, k + \frac{1}{2}]$ 或同时属于 $[h + \frac{1}{2}, h + 1]$. 因此

$$\varphi(4^n(x_0 + h_m)) - \varphi(4^n x_0) = \pm 4^n \cdot h_m$$
$$\frac{f(x_0 + h_m) - f(x_0)}{h_m} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\varphi(4^n(x_0 + h_m) - \varphi(4^n x_0))}{4^n \cdot h_m} + 0 = \sum_{n=0}^{m-1} \pm 1$$

特别地, m 分别取奇数和偶数时, 上式右边也是奇数或偶数, 因此, $h_m \to 0$ $(m \to \infty)$, 但极限 $\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{f(x_0 + h_m) - f(x_0)}{h_m}$ 不存在. 因此 f 在 x_0 处不可导.

注 $\varepsilon - \delta$ 语言就是 Weierstrass 发明的. 今后在 “实变函数论” 中可学习到这样的事实: “大部分” 连续函数都是处处不可导的!