填满空间的曲线 (Peano 曲线)*

梅加强

南京大学数学系

http://math.nju.edu.cn/~meijq

1890 年,Peano 构造了连续曲线 $\sigma: I \to I^2, I = [0,1]$, 使得 $\sigma(I) = I^2$. 这和人们的直观想象大相径庭. 下面我们来给出一个例子, 这个例子是 1938 年由 Schoenberg 提出的.

考虑连续函数

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{3}], \\ 3t - 1, & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 1, & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

将 φ 延拓为 $\mathbb{R}$ 上周期为 2 的偶函数:

$$\varphi(t) = \varphi(t+2), \quad \varphi(t) = \varphi(-t), \ t \in \mathbb{R}.$$

令

$$\begin{cases} x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2n}t)}{2^n}, \\ y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2n+1}t)}{2^{n+1}}, \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

因为 $0 \le \varphi \le 1$, 故上面的两个级数一致收敛, 从而 $x(t), y(t)$ 连续,

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)) : I \to I \times I$$

为连续曲线.

---

* 《数学分析》补充材料, 2007.4

可以证明:

(1) $\sigma(I) = I \times I$;

(2) $x(t), y(t)$ 无处可导.

注 (1) 类似地可构造填满 I^3 的连续曲线.

(2) 这些曲线具有某种自相似性, 即是一种分形.

(3) (思考题), 如果 σ 是 C^1 曲线, 则还能填满 I^2 吗?