支集紧致的光滑函数*

梅加强

南京大学数学系

http://math.nju.edu.cn/~meijq

定理 1 存在常数 C_1, C_2 以及光滑函数 $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 使得 ϕ 满足如下条件

$$\begin{cases} \phi(x) = 0, \ \forall\ |x| \geq 1;\ 0 < \phi(x) < 1,\ \forall x \in (-1, +1); \\ (\phi'(x))^2 \leq C_1 \phi(x),\ \forall x \in \mathbb{R}; \\ |\phi''(x)| \leq C_2\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

证明. 先定义如下函数 $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

不难验证 φ_1 是 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数, 且

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{[\varphi_1'(x)]^2}{\varphi_1(x)} = \lim_{x \to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} (x-1)^{-4} = 0$$

以及

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{[\varphi_1'(x)]^2}{\varphi_1(x)} = \lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x-1}} (x-1)^{-4} = 0$$

结合 $\varphi_1(x) = 0,\ \forall x \geq 1$ 就知道存在常数 C_1', 使得

$$[\varphi_1'(x)]^2 \leq C_1' \varphi_1(x),\ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

*《数学分析》补充材料, 2007.3

类似地, 由

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi_1''(x)=\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x-1}}[(x-1)^{-4}+2(x-1)^{-3}]=0.$$

以及 $\varphi_1''(x)=0,\ \forall x\geq 1$ 就知道存在常数 C_2', 使得

$$|\varphi_1''(x)|\leq C_2',\quad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

其次, 考虑光滑函数 $\varphi_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

$$\varphi_2(x)=\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x)+\varphi_1(1-x)},\quad x\in\mathbb{R}.$$

由 φ_1 的定义知 $\varphi_2(x)=1,\ \forall x\leq 0;\ \ \varphi_2(x)=0,\ \forall x\geq 1.$ 因此, 如果按如下方式定义函数 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\phi(x)=\begin{cases}\varphi_2(x), & x\geq 0\\ \varphi_2(-x), & x\leq 0\end{cases}$$

则 ϕ 为 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数, 并且利用 (1), (2) 易验证, 存在常数 $C_1,\ C_2$, 使得 ϕ 就是满足引理要求的函数.

注 ϕ 在 $[-1,0]$ 上递增, 在 $[0,1]$ 上递减.

上面定理中的函数称为一个截断函数. 由此也可以得到 R^n 中的截断函数.

推论 存在光滑函数 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 使得 ϕ 满足条件

$$\begin{cases}0<\phi(x)\leq 1,\ \forall x\in= B_1(0)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid \sum_{i=1}^n x_i^2<1\};\\ \phi(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n-B(0);\\ |\nabla\phi(x)|^2\leq C_1\phi(x),\ \forall x\in\mathbb{R};\\ |\Delta\phi(x)|\leq nC_2,\ \forall x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

证明 如下定义函数 ϕ:

$$\phi(x)=\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\phi(r)=\phi([\sum_{i=1}^n x_i^2]^{\frac{1}{2}}),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

这里在后面两个等号后我们用了同一个 ϕ 表示上面定理中的一元截断函数 ($n=1$ 时二者一致). 显然, ϕ 在 $\mathbb{R}^n-0$ 上是光滑的, 不难验证 ϕ 在 0 处也是光滑的. 且

$$\begin{aligned}
&|\nabla\phi|^2=|\phi'(r)\nabla r|^2=|\phi'(r)|^2\leq C_1\phi(r)=C_1\phi(x),\\
&|\Delta\phi(x)|=|\phi''(r)+\phi'(r)r^{-1}(n-1)|\leq nC_2.
\end{aligned}$$

因此 ϕ 为满足要求的光滑函数.