光滑函数的 Taylor 展开的系数可以为任意实数列*

梅加强

南京大学数学系

http://math.nju.edu.cn/~meijq

设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, 令

$$\xi_n = n + \sum_{i=0}^{n} |a_i|$$
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \varphi(\xi_n x) \cdot x^n$$

其中 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为光滑函数, 且 $0 \leq \varphi \leq 1$,

$$\varphi(x) = 1, \quad \forall\, x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]; \quad \varphi(x) = 0, \quad |x| \geq 1.$$

由于当 $|x| \leq \dfrac{1}{\xi_n}$ 时,

$$\left|\frac{a_n}{n!}\varphi(\xi_n x) \cdot x^n\right| \leq \frac{|a_n|}{n!}|x|^n \leq \frac{|a_n|}{n!}\frac{1}{(\xi_n)^n} \leq \frac{1}{n!}, \quad n \geq 1$$

而 $|x| > \dfrac{1}{\xi_n}$ 时上式也成立, 故级数一致收敛, f 连续, 且 $f(0) = a_0$.

可以证明, f 是无穷次可导的, 且

$$f^{(n)}(0) = a_n, \qquad n \geq 1.$$

(*) φ 怎样构造: 先取

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

* 《数学分析》补充材料, 2007.3

则 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. 再取

$$h(x) = \frac{g(x)}{g(x)+g(1-x)}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

h 也是光滑函数. 最后, 令

$$\varphi(x) = \begin{cases} h(2x+2), & x \le 0, \\ h(-2x+2), & x > 0. \end{cases}$$