

## 第十章 Fourier 分析

在前一章, 我们讨论了函数项级数, 并把幂级数作为重要的特殊函数项级数加以讨论. 为了研究周期现象, 下面我们研究另一类特殊的函数项级数.

### §1 Fourier 级数

函数列

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$$

称为三角函数系, 有限和

$$a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为三角多项式, 而形式和

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为三角级数, 其中  $a_0, a_k, b_k$  等称为该三角级数的系数.

三角函数都是周期为  $2\pi$  的函数. 一个自然的问题是, 如果  $f$  是一个周期为  $2\pi$  的函数, 能否用三角多项式去逼近它? 为了讨论这一问题, 以下我们假定  $f$  总是 Riemann 可积或反常绝对可积的函数.

**定义 (Fourier 系数)** 设  $f$  为  $[-\pi, \pi]$  上的 Riemann 可积函数, 周期为  $2\pi$ . 令

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

$a_0, a_k, b_k$  称为  $f$  的 Fourier 系数, 形式和

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为  $f$  的 Fourier 级数或 Fourier 展开, 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

**注** (1) 如果  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$  一致收敛, 则由逐项积分可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 \pi + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right) = a_0 \pi$$

同理,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos kx dx + \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx dx \right) \\ &= 0 + a_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx + 0 = a_k \pi \end{aligned}$$

对于  $b_k$  有类似结果, 这就是为什么我们要象前面那样定义 Fourier 系数.

(2) 简单的观察表明, 如果  $f$  为奇函数, 则  $a_k = 0$  ( $k \geq 0$ ), 此时的 Fourier 展开称为正弦级数; 如果  $f$  为偶函数, 则  $b_k = 0$  ( $k \geq 1$ ), 此时的 Fourier 展开称为余弦级数的.

**例 1** 设  $f$  为  $2\pi$  周期函数, 且

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \pm\pi, \\ -\frac{1}{2}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

求  $f$  的 Fourier 展开.

**解**  $f$  为奇函数, 因此  $a_k = 0$ . 而

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\pi} \sin kx dx - \int_{-\pi}^0 \sin kx dx \right] \\ &= \frac{1}{k\pi} [1 - (-1)^k] \end{aligned}$$

因此就得到了  $f$  的 Fourier 展开:

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

**例 2** 设  $f$  为  $2\pi$  周期函数, 且  $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi$ , 求  $f$  的 Fourier 展开.

**解**  $f$  为偶函数, 故  $b_k = 0$ , 而

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2}{k} x \sin kx dx \quad (\text{分部积分}) \\ &= (-1)^k \frac{4}{k^2} \quad (k > 0) \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2 \end{aligned}$$

这就得到了  $f$  的 Fourier 展开:

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} (-1)^k.$$

为了研究 Fourier 展开的收敛性, 我们需要对系数  $a_k, b_k$  做一些估计.

**定理 1 (Riemann-Lebesgue)** 设  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积或反常绝对可积, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , Riemann 可积或反常绝对可积的函数  $f$  可用阶梯函数逼近, 即存在阶梯函数  $g$ , 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon,$$

此时,

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx - \int_a^b g(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

因此, 只要对阶梯函数证明结论即可, 进而只要对  $[c, d] \subset [a, b]$  上的常值函数证明即可: 如果  $f = \mu$ , 则

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d \mu \cos \lambda x dx \right| &= \left| \mu \cdot \int_c^d \cos \lambda dx \right| = \left| \mu \cdot \frac{1}{\lambda} (\sin \lambda d - \sin \lambda c) \right| \\ &\leq \frac{2|\mu|}{\lambda} \rightarrow 0, \quad (\lambda \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

对  $\sin \lambda x$  有完全类似的证明.

**推论**  $f$  的 Fourier 系数  $a_k \rightarrow 0, b_k \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty)$ . 这说明, 周期函数作 Fourier 展开时, 其高频分量的振幅是很小的.

如果  $f$  有更好的光滑性, 则其系数有更好的估计. 例如, 设  $f \in C^1[-\pi, \pi]$ , 且  $f(-\pi) = f(\pi)$ , 则

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ f(x) \cdot \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx \right] \\ &= -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (\text{Riemann - Lebesgue}) \end{aligned}$$

同理,  $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ . 一般地, 设  $f \in C^k([-\pi, \pi])$ ,  $f^{(i)}(-\pi) = f^{(i)}(\pi), i \leq k-1$ , 则

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

## §2 Fourier 级数的收敛性

在前一节我们已看到, 如果  $f \in C^2[-\pi, \pi]$ ,  $f(-\pi) = f(\pi), f'(-\pi) = f'(+\pi)$ , 则其 Fourier 系数满足估计  $a_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right), b_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ , 因而 Fourier 展开一致收敛. 本节研究一般情形下 Fourier 级数的收敛性.

记

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx.$$

利用

$$\sin \frac{1}{2}x \cos kx = \frac{1}{2} \left[ \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x \right]$$

我们得到下面的等式

$$\sigma_n(x) = \frac{\sin\left(\pi + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x}, \quad x \neq 2k\pi.$$

当  $x = 2k\pi$  时, 规定  $\sigma_n(x) = n + \frac{1}{2}$ , 这样得到的  $\sigma$  为连续函数, 且

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{1}{2}x} dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx\right) dx = \frac{\pi}{2}.$$

应用  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ .

首先, 此积分是收敛的, 我们可用 Cauchy 准则判断如下: 设  $B > A$ , 则

$$\begin{aligned} \left| \int_A^B \frac{\sin x}{x} dx \right| &= \left| \frac{-\cos x}{x} \Big|_A^B + \int_A^B \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \int_A^B \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{2}{A} \rightarrow 0, \quad A \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

记  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ , 则

$$\begin{aligned} I &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x} dx \quad (x \rightarrow (n+\frac{1}{2})x) \\ &= \frac{\pi}{2} + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \right) \cdot \sin(n+\frac{1}{2})x dx \\ &= \frac{\pi}{2}. \quad (\text{Riemann - Lebesgue}) \end{aligned}$$

其中, 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} - x}{2x \cdot \sin \frac{x}{2}} = 0,$$

故  $\frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \in C^0[0, \pi]$ , 从而可以应用 Riemann-Lebesgue 引理.

设  $f$  的 Fourier 级数部分和为  $S_n(x)$ , 则

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{K=1}^n \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \cos kx dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \sin kx dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{K=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{K=1}^n \cos k(t-x) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) \sigma_n(u) du \end{aligned}$$

其中最后一个等式用到了变量代换  $u = t - x$ , 并且利用了被积函数的周期性, 即在  $[-\pi - x, \pi - x]$  上的积分等于在  $[-\pi, \pi]$  上的积分. 我们可以进一步改写为

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} du$$

注意到,  $\forall \delta > 0$ , 由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} du \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2 \sin \frac{u}{2}} du \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} du \end{aligned}$$

因此,  $S_n(x)$  的收敛性只和  $f$  在  $x$  附近的性态有关, 这是 Riemann 的发现, 有时称为 Riemann 局部化原理.

**定理 1 (Dini 判别法)** 设  $f$  如前. 如果  $\exists \delta > 0$ , 使得

- (1)  $f$  在  $x$  处的右极限  $f(x_+)$  和左极限  $f(x_-)$  存在;
- (2) 积分

$$\int_0^\delta \frac{f(x+u) - f(x_+)}{u} du, \quad \int_0^\delta \frac{f(x-u) - f(x_-)}{u} du$$

绝对收敛, 则  $f$  的 Fourier 级数在点  $x$  处收敛于值  $\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$ .

证明基本上是应用 Riemann-Lebesgue 引理, 以及注意到函数  $\frac{1}{u} - \frac{1}{2 \sin \frac{u}{2}}$  在  $[0, \delta]$  上的连续性. 下面我们以一个特殊情形加以证明, 这个情形对大多数应用是足够的.

**定义 1** 设  $f$  是定义在  $[a, b]$  上的函数, 如果存在  $[a, b]$  的划分

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b,$$

使得在每一个  $[t_{i-1}, t_i]$  ( $i = 1, 2, \cdots, m$ ) 上定义的函数

$$f_i(x) = \begin{cases} f(t_{i-1+}), & x = t_{i-1} \\ f(x), & x \in (t_{i-1}, t_i) \\ f(t_i-), & x = t_i \end{cases}$$

都是  $[t_{i-1}, t_i]$  上的可微函数, 则称  $f$  是分段可微函数.

**定理 2** 设  $f$  是周期为  $2\pi$  的一个分段可微函数, 则  $\forall x \in [-\pi, \pi]$ ,  $f$  的 Fourier 级数在  $x$  处收敛到  $\frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))$ .

**证明** 由前面的计算以及  $\frac{1}{u} - \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}$  在  $[0, \delta]$  上的连续以及 Riemann-Lebesgue 引理有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} \cdot \frac{\sin(n + \frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}} du \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2u} \cdot \sin(n + \frac{1}{2})u du \\ &= \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-)) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{f(x+u) - f(x_-)}{u} \sin(n + \frac{1}{2})u du \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cdot \frac{f(x_-) - f(x_+)}{u} \sin(n + \frac{1}{2})u du \\ &= \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-)). \end{aligned}$$

最后的等式是因为, 如果  $f$  分段可微, 则  $\frac{f(x+u) - f(x_-)}{u}$  和  $\frac{f(x_-) - f(x_+)}{u}$  关于  $u$  是分段连续 (可积) 的, 从而可以应用 Riemann-Lebesgue 引理.

前节例 1 和例 2 都满足上述定理的条件, 因此, 在例 1 中取  $x = 1$  就得到

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)}{2k+1},$$

在例 2 中取  $x = 0$  就得到

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k^2}.$$

下面接着举一些例子.

**例 1** 求函数  $f(x) = \cos \mu x$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$  的 Fourier 展开 ( $\mu$  不是整数).

**解** 把  $f$  延拓为  $\mathbb{R}$  上以  $2\pi$  为周期的周期函数, 这是偶函数, 因此  $b_k = 0$ .

而

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \mu x \cdot \cos kx dx \\&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(\mu - k)x + \cos(\mu + k)x] dx \\&= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(\mu - k)\pi}{\mu - k} + \frac{\sin(\mu + k)\pi}{\mu + k} \right] = \frac{2\mu(-1)^k \sin \mu\pi}{\pi(\mu^2 - k^2)} \\ \Rightarrow \cos \mu x &= \frac{2\mu \sin \mu\pi}{\pi} \left( \frac{1}{2\mu^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\mu^2 - n^2} \cos nx \right) \\ \Rightarrow \cos \mu\pi &= \frac{2\mu \sin \mu\pi}{\pi} \left( \frac{1}{2\mu^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2 - n^2} \right) \\ \Rightarrow \cot \pi\mu &= \frac{2\mu}{\pi} \left( \frac{1}{2\mu^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^2 - n^2} \right).\end{aligned}$$

当  $0 \leq \mu \leq q < 1$  时, 上式关于  $\mu$  一致收敛, 从而可逐项积分

$$\int_0^x (\cot \pi\mu - \frac{1}{\pi\mu}) d\mu = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - \frac{x^2}{n^2})$$

这就得到  $\sin \pi x$  的下面的展开式, 有意思的是它和因式分解十分类似:

$$\sin \pi x = \pi x (1 - \frac{x^2}{1^2})(1 - \frac{x^2}{2^2}) \cdot (1 - \frac{x^2}{n^2}) \cdots$$

在上式中令  $x = \frac{1}{2}$  就得到 Wallis 公式:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

**例 2** 类似地, 有

$$\sin \mu x = -\frac{2 \sin \mu\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n \sin nx}{\mu^2 - n^2}.$$

如果一个函数仅在  $(0, \pi)$  上定义, 则我们可以首先将它延拓为周期为  $2\pi$  的函数, 然后再作 Fourier 展开. 常用的延拓有奇延拓和偶延拓, 即分别延拓为奇函数和偶函数.



### 例 3 把函数

$$f(x) = x, \quad x \in (0, \pi)$$

分别作奇延拓和偶延拓, 然后分别求 Fourier 展开.

**解** 奇延拓: 令

$$f(x) = x, \quad x \in (-\pi, 0),$$

在 0 和  $\pm\pi$  处规定  $f$  为 0. 则 Fourier 系数为

$$\begin{aligned} a_k = 0, \quad b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cdot \sin kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} x \cdot \frac{-1}{k} \cos kx \Big|_0^\pi + \frac{2}{\pi} \Big|_0^\pi \frac{1}{k} \sin kx dx \\ &= (-1)^{k-1} \cdot \frac{2}{k} \end{aligned}$$

因此

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 \leq x < \pi.$$

偶延拓: 令

$$f(x) = -x, \quad x \in (-\pi, 0),$$

在 0 处  $f(0) = 0$ , 在  $\pm\pi$  处  $f$  为  $\pi$ , 则

$$\begin{aligned} b_k = 0, \quad a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos kx dx = \frac{2}{k^2 \pi} [(-1)^k - 1] \end{aligned}$$

因此

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

如果一个函数周期为  $2l$ , 则和周期  $2\pi$  的情形类似, 令

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

则  $f$  有 Fourier 展开

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right)$$

通过变量替换  $t = \frac{\pi x}{l}$  可以把周期  $2l$  的函数变为周期  $2\pi$  函数, 因此容易看出, 定理 2 对于周期  $2l$  的函数仍成立.

**例 4** 设  $f(x)$  是以 2 为周期的周期函数, 且

$$f(x) = x^2, \quad x \in [-1, 1]$$

求其 Fourier 展开.

**解**  $f$  为偶函数, 因此  $b_k = 0$ . 而

$$a_0 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$
$$a_n = 2 \int_0^1 x^2 \cdot \cos n\pi x dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} (-1)^n, \quad (\text{分部积分})$$

这说明

$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

如果作变量替代  $t = \pi x$ , 则上式就是前节例 2 中的等式. 如果把此例和本节例 3 结合起来, 就得到如下等式:

$$(\star) \quad x - \frac{x^2}{2\pi} = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

它当然也可以通过  $f(x) = x - \frac{x^2}{2\pi}$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$  作 Fourier 展开得到, 下一节我们将要用到这个等式.

### §3 Parseval 恒等式

在前一节我们考虑了 Fourier 级数的逐点收敛性. 本节我们考虑积分意义下的收敛性, 这时对函数的要求较低.

设  $[a, b]$  为闭区间, 我们定义函数集合  $R^2[a, b]$  如下:  $R^2[a, b]$  中的函数  $f$  Riemann 可积, 或  $f$  广义可积且  $f^2$  也广义可积. 显然,  $R^2[a, b]$  为线性空间, 且若  $f, g \in R^2[a, b]$ , 则

$$\int_a^b |f \cdot g| dx \leq \left[ \int_a^b f^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \int_a^b g^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{Cauchy - Schwarz不等式})$$

**定理 1 (Parseval 等式)** 设  $f \in R^2[-\pi, \pi]$ , 且  $f$  的 Fourier 展开为

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \quad (3.1)$$

下面我们以  $f$  Riemann 可积为例给出证明, 一般情形的证明只需略作改动即可.

(1) 记

$$S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

由三角函数系的正交性质, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 dx + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n a_k^2 \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx \right) \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f - S_n(f)]^2 dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot S_n(f) dx + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f dx + \sum_{K=1}^n \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \right) \right] + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right] + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f) dx \end{aligned} \quad (3.3)$$

由此得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f) dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx, \quad (3.4)$$

且 (3.1) 成立

$$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f) dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} [f - S_n(f)]^2 dx \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

(2) 由 (3.5) 知, 如果 (3.1) 对  $f, g \in R^2[a, b]$  成立, 则对  $\lambda f + \mu g$  也成立, 其中  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\lambda f + \mu g - S_n(\lambda f + \mu g)]^2 dx \leq 2 \cdot \lambda^2 \int_{-\pi}^{\pi} [f - S_n(f)]^2 dx + 2 \cdot \mu^2 \int_{-\pi}^{\pi} [g - S_n(g)]^2 dx \rightarrow 0.$$

(3) 显然, (3.1) 对常值函数成立. 下面考虑函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < a, \\ 1, & a \leq x \leq b, \\ 0, & b < x < \pi \end{cases}$$

将  $\varphi$  延拓为  $\mathbb{R}$  上周期  $2\pi$  函数, 其 Fourier 系数为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \frac{1}{\pi}(b-a) \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k} (\sin kb - \sin ka) \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sin kx dx = \frac{-1}{\pi} \cdot \frac{1}{k} (\cos kb - \cos ka) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \frac{1}{2\pi^2}(b-a)^2 + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} [(\sin kb - \sin ka)^2 + (\cos kb - \cos ka)^2] \\ &= \frac{1}{2\pi^2}(b-a)^2 + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} [1 - \cos k(b-a)] \\ &= \frac{1}{2\pi^2}(b-a)^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(b-a)}{k^2} \\ &= \frac{b-a}{\pi} \quad (\text{用到前一节最后的等式}(\star)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(x) dx. \end{aligned}$$

(4) 由 (2), (3) 知 (3.1) 对阶梯函数成立.

(5) 现在设  $f$  可积, 则  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在阶梯函数  $g$  使得

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f - g)^2 dx < \varepsilon$$

因为 (3.1) 对  $g$  成立, 故  $n$  充分大时

$$\int_{-\pi}^{\pi} [g - S_n(g)]^2 dx < \varepsilon,$$

从而

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [f - S_n(f)]^2 dx &\leq 3 \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (f - g)^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} [g - S_n(g)]^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} [S_n(g - f)]^2 dx \right\} \\ &\leq 3 \left\{ \varepsilon + \varepsilon + \int_{-\pi}^{\pi} (g - f)^2 dx \right\} \quad (\text{用(3.4)}) \\ &\leq 9 \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

这说明

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f - S_n(f)]^2 dx \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty)$$

即 (3.1) 对  $f$  成立.

**推论 2 (广义 Parseval 等式)** 设  $f, g \in R^2[-\pi, \pi]$ , 则

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x) dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \alpha_n + b_n \cdot \beta_n)$$

其中  $a_n, b_n$  是  $f$  的 Fourier 系数,  $\alpha_n, \beta_n$  是  $g$  的 Fourier 系数.

**证明** 分别对  $f + g$  和  $f - g$  应用 Parseval 等式, 然后二者相减即可.

**推论 3 (惟一性)** 设  $f, g$  为  $[-\pi, \pi]$  上的连续函数, 如果  $f$  和  $g$  的 Fourier 系数相同, 则  $f \equiv g$ .

**证明** 考虑  $f - g$ , 其 Fourier 系数恒为 0, 由 Parseval 等式,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f - g)^2 dx = 0.$$

由  $f - g$  连续知  $f \equiv g$ .

**推论 4** 设  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上连续, 如果其 Fourier 展开一致收敛, 则其和必为  $f$ .

**证明** 记其 Fourier 展开的和为

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则由一致收敛性知, 上式可逐项积分, 因此易见  $S(x)$  的 Fourier 系数和  $f$  的 Fourier 系数相同. 由推论 3 知  $S(x) \equiv f(x)$ .

**例 1** 由 §1 例 2 及 Parseval 等式得

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \pi^2 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4}{k^2} \right)^2$$

这就得到下面的等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

#### §4 Fourier 级数的积分和微分

我们首先说明, 可积函数的 Fourier 级数总是可以逐项积分的.

**定理 1 (Reymond)** 设  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上 Riemann 可积, 其 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则对  $\forall [a, b] \subset [-\pi, \pi]$ , 有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx.$$

**证明** 考虑 §3 中用到的函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \in [-\pi, a) \cup (b, \pi], \end{cases}$$

其 Fourier 系数记为  $\alpha_n, \beta_n$ , 则由广义 Parseval 等式, 有

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \varphi(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \alpha_n + b_n \cdot \beta_n)$$

代入

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \frac{1}{\pi}(b-a), \\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b \cos nx dx, \\ \beta_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sin nx dx,\end{aligned}$$

即得欲证之等式.

为了考虑 Fourier 级数的微分, 我们先考虑一致收敛性.

**定理 2** 设  $f$  是  $[-\pi, \pi]$  上连续函数, 以  $2\pi$  为周期. 如果  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上逐段可微, 且  $f'$  Riemann 可积, 则  $f(x)$  的 Fourier 级数在  $[-\pi, \pi]$  上一致收敛于  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

**证明** 根据前一节推论 4, 只要证明上式右边是一致收敛就可以了. 事实上, 记  $f'$  的 Fourier 系数分别为  $a'_n, b'_n$ , 则

$$\begin{aligned}a'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) n \cdot \sin nx dx = n \cdot b_n \\ b'_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot n \cos nx dx = n \cdot a_n\end{aligned}$$

由  $f'$  Riemann 可积知

$$\frac{1}{2}(a'_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n)^2 + (b'_n)^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f')^2 dx$$

另一方面, 我们有估计

$$\begin{aligned}|a_n \cos nx + b_n \sin nx| &= (|a_n| + |b_n|) \\ &= \frac{1}{n}|a'_n| + \frac{1}{n}|b'_n| \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{n^2} + |a'_n|^2 \right) + \left( \frac{1}{n^2} + |b'_n|^2 \right) \right]\end{aligned}$$

从而  $f$  的 Fourier 展开的确是收敛的.

**定理 3** 设  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上 1 阶连续可微, 以  $2\pi$  为周期, 且  $f'$  在  $[-\pi, \pi]$  上逐段可微,  $f''$  Riemann 可积, 则  $f$  的 Fourier 展开

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

可在  $[-\pi, \pi]$  上逐次求导:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx),$$

且上式右边的级数是一致收敛的.

**证明** 应用定理 2 和“函数项级数”那一章 §2 定理 2 即可.

应用定理 2 我们可以用三角多项式去一致地逼近连续函数.

**定理 4 (Weierstrass)** 设  $f$  是  $[-\pi, \pi]$  上的连续函数, 周期  $2\pi$ , 则  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在三角多项式  $T(x)$ , 使得

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

**证明** 首先, 连续函数  $f$  可以用分段线性函数一致逼近. 即存在周期为  $2\pi$  的分段线性函数  $g$ , 使得

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

其次,  $g$  满足定理 2 的条件, 故其 Fourier 展开一致收敛于  $g$ . 即  $n$  充分大时

$$|g(x) - S_n(g)(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

这说明

$$|f(x) - S_n(g)(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - S_n(g)(x)| < \varepsilon.$$

**推论 5**  $f$  为  $[-\pi, \pi]$  上周期  $2\pi$  的连续函数, 则  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在多项式  $P(x)$ , 使得

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

**证明** 由定理 4, 存在三角多项式  $T(x)$  使得

$$|f(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$



由于三角函数的 Taylor 展开都是一致收敛的, 从而存在多项式  $P(x)$  使得

$$|T(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

这说明

$$|f(x) - P(x)| \leq |f(x) - T(x)| + |T(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

**推论 6**  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数, 则  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在多项式  $P(x)$ , 使得

$$|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

**证明** 利用线性变换  $t = \frac{\pi}{b-a}(x-a)$  把  $[a, b]$  上的函数变为  $[0, \pi]$  上的函数. 对此函数以  $2\pi$  为周期作偶延拓, 然后利用推论 5 即可, 注意线性变换把多项式仍变成多项式.

**例 1** 设  $f$  在  $[a, b]$  上 Riemann 可积, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) |\cos \lambda x| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx.$$

**证明** 把偶函数  $|\cos t|$  作 Fourier 展开:

$$|\cos t| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

上式一致收敛, 可作逐项积分:

$$\int_a^b f(x) |\cos \lambda x| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cdot u_n(\lambda).$$

其中

$$u_n(\lambda) = \int_a^b f(x) \cos 2n\lambda x dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

由 Riemann-Lebesgue 引理,  $u_n(\lambda) \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow +\infty$ ), 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} u_n(\lambda)$  一致收敛, 故令  $\lambda \rightarrow +\infty$ , 逐项求极限即得

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) |\cos \lambda x| dx = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(x) dx.$$

## §5 Fourier 变换初步

**Motivation:** 定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的函数如何像周期函数那样作展开?

假定  $f$  满足适当的条件, 则在有限的区间  $[-l, l]$  上,  $f$  可展开为 Fourier 级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi}{l}x dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$
$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l}x dx, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

这说明

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi}{l}(x-t) dt.$$

如果  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可积且绝对可积, 则令  $l \rightarrow +\infty$ , 上式可写为

$$f(x) \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt \right] d\lambda$$

因此, 在一定的条件下, 我们有

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt \right] d\lambda \quad (5.1)$$

或

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda \quad (5.2)$$

其中

$$a(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad b(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt.$$

(5.1) 和 (5.2) 称为  $f$  的 Fourier 积分公式, 其右端称为 Fourier 积分,  $a(\lambda)$ ,  $b(\lambda)$  相当于 Fourier 系数.

当然, (5.1), (5.2) 的推导只是形式推导. 和 Fourier 级数一样, 要建立 (5.1) 那样的等式, 必须仔细考虑收敛性. 下面我们叙述一些相应的结果, 而把大多数的证明放到以后的课程.

**引理 1** 如果  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可积且绝对可积, 则  $a(\lambda), b(\lambda)$  关于  $\lambda \in \mathbb{R}$  一致连续, 且  $\lambda \rightarrow \infty$  时,  $a(\lambda) \rightarrow 0, b(\lambda) \rightarrow 0$ .

**证明** 由  $f$  的条件知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$ , 使得

$$\int_{-\infty}^{-A} |f(t)| dt + \int_A^{+\infty} |f(t)| dt < \varepsilon.$$

记  $M = \int_{-A}^A |f(t)| dt + 1$ , 由于  $\cos x$  在  $x \in (-\infty, +\infty)$  上一致连续, 故  $\exists \eta > 0$ , 使得  $|x' - x''| < \eta$  时

$$|\cos x' - \cos x''| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

于是当  $|\lambda' - \lambda''| < \frac{\eta}{A}$  时,

$$\begin{aligned} |a(\lambda') - a(\lambda'')| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \cdot |(\cos \lambda't - \cos \lambda''(t))| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-A} 2 \cdot |f(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_A^{+\infty} 2 \cdot |f(t)| dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A |f(t)| |\cos \lambda't - \cos \lambda''t| dt \\ &\leq \frac{2}{\pi} \varepsilon + \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{M} \int_{-A}^A |f(t)| dt < \frac{3}{\pi} \varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

对  $g(\lambda)$  有类似的证明. 同时

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} |a(\lambda)| \leq \varepsilon + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \left| \int_{-A}^A f(t) \cos \lambda t dt \right| = \varepsilon$$

这说明  $a(\lambda) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$ . 同理,  $b(\lambda) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty$ .

**引理 2** 记

$$S(A, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^A d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt,$$

$f$  条件同上, 则

$$S(A, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin At}{t} dt.$$

**证明** 在“含参变量积分”那一章中将证明积分次序的可交换性, 现在我们先承认这一点, 此时

$$\begin{aligned} S(A, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^A d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^A f(t) \cos \lambda(x-t) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \frac{\sin A(x-t)}{x-t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin At}{t} dt. \end{aligned}$$

**引理 3**  $\forall \delta > 0$ , 有

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\delta}^A [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin At}{t} dt = 0.$$

**证明** 和引理 1 中  $a(\lambda) \rightarrow 0$  的证明完全类似, 故略去.

引理 3 说明,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} S(A, x)$  只与  $f$  在  $x$  附近的性质有关. 因此, 与 Fourier 级数类似, 我们有 Dini 判别法, 这里只叙述一个特殊情形:

**定理 4** 设  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  中可积且绝对可积, 如果  $f$  分段可微, 则

$$\begin{aligned} \frac{f(x+) + f(x-)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda \end{aligned}$$

其中

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt.$$

如果  $f$  满足上述条件的连续偶函数, 则积分公式可写为

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda x d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad (\text{Fourier 余弦公式})$$

类似地,  $f$  为奇函数时

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt, \quad (\text{Fourier 正弦公式}).$$

**例 1** 计算函数  $f(x) = e^{-\beta x}$  ( $\beta > 0, x > 0$ ) 的 Fourier 余弦公式和正弦公式.  
解

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot \cos \lambda t dt = \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2} \quad (\text{分部积分})$$

由余弦公式  $\Rightarrow$

$$e^{-\beta x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2} \cos \lambda x d\lambda, \quad (\beta > 0, x \geq 0)$$

同理,

$$\int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt = \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cdot \sin \lambda t dt = \frac{\lambda}{\beta^2 + \lambda^2} \quad (\text{分部积分})$$

由正弦公式  $\Rightarrow$

$$e^{-\beta x} = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{\beta^2 + \lambda^2} \sin \lambda x d\lambda \quad (\beta > 0, x > 0)$$

从而得到如下积分公式

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha t}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} \sin \alpha t dt = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

令  $i = \sqrt{-1}$ , 则  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \theta \in \mathbb{R}$ .

**定义 1 (Fourier 变换)** 设  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可积且绝对可积, 令

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad w \in \mathbb{R}$$

称  $\hat{f}$  为  $f$  的 Fourier 变换.

Fourier 积分公式可以改写成复数形式: 由  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt$  关于  $\lambda$  为偶函数, 故 Fourier 积分可写为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt$$

而  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(x-t) dt$  关于  $\lambda$  为奇函数, 故 (至少在主值意义下)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(x-t) dt = 0$$

因此

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \end{aligned}$$

我们不加证明地列举 Fourier 变换的一些性质:

(1)  $|\hat{f}(w)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \forall w \in \mathbb{R};$  且  $\hat{f}(w) \rightarrow 0, w \rightarrow \infty.$

(2)  $\lambda \cdot \widehat{f + \mu \cdot g} = \lambda \cdot \hat{f} + \mu \cdot \hat{g}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R};$

(3)  $\hat{f}$  为连续函数;

(4)  $\hat{f}'(w) = i \cdot w \cdot \hat{f}(w), \forall w \in \mathbb{R};$

(5)  $\widehat{f * g}(w) = \hat{f}(w) \cdot \hat{g}(w),$  其中

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \cdot g(t) dt,$$

称为  $f$  和  $g$  的卷积.