# 第十一章　度量空间与连续映射

## §1　内积与度量

**定义 1(内积)**　设 $X$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 如果映射

$$\begin{aligned} g = \langle , \rangle : \quad & X \times X \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \mapsto g(x, y) = \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

满足以下条件

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$, 且 $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (正定性).

(2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in X$ (对称性).

(3) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x, y \in X$ (双线性性)

则称 $g = \langle , \rangle$ 为 $X$ 上的一个内积, $(X, \langle , \rangle)$ 称为内积空间, $\langle x, y \rangle$ 称为 $x$ 与 $y$ 的内积, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ 称为 $x$ 的范数.

**例 1**　记 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ 为 $n$ 元有序实数组, 以显然的方式, $\mathbb{R}^n$ 成为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 称为 $n$ 维欧氏空间. $\mathbb{R}^n$ 上有标准的内积 $\langle , \rangle$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \qquad \forall\ x = (x_1, \cdots, x_n), \quad y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

**例 2**　记 $C^0[a, b]$ 为闭区间 $[a, b]$ 上连续函数的全体形成的向量空间. 定义内积 $\langle , \rangle$ 如下:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x.$$

**定理 1 (Schwarz 不等式)**　设 $(X, \langle , \rangle, )$ 为内积空间, 则

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

且等号成立当且仅当 $x$ 与 $y$ 线性相关.

**证明**　当 $x = 0$(或 $y = 0$) 时, 由内积的线性知

$$\langle 0, y \rangle = \langle 0 \cdot 0,\ y \rangle = 0 \langle 0,\ y \rangle = 0.$$

从而此时 Schwarz 不等式成立. 下设 $x \neq 0, y \neq 0$, 则对 $\forall\, t \in \mathbb{R}$, 有

$$\langle x,x\rangle - 2t\langle x,y\rangle + t^2 \cdot \langle x,y\rangle = \langle x-ty, x-ty\rangle \geq 0$$
$$\Rightarrow \Delta = 4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \leq 0 \qquad \text{(判别式)}$$

下面的证明略.

**定义 2 (度量)** 设 $X$ 为非零集合, 如果映射 $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ 满足以下条件

(1) $\rho(x,y) \geq 0$ 且 $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$. (三角不等式)

则称 $\rho$ 为 $X$ 上的一个度量 (或距离), $(X,\rho)$ 称为度量空间 (或距离空间), $\rho(x,y)$ 称为 $x, y$ 之间的距离.

**例 3 (内积诱导距离)** 设 $(X, \langle,\rangle)$ 为内积空间, 则令

$$\rho(x,y) = \|x-y\|, \quad \forall\, x,y \in X.$$

显然 $\rho$ 满足定义 2 中的 (1), (2), 而三角不等式也成立:

$$\begin{aligned}
\rho^2(x,z) &= \|x-z\|^2 = \langle x-z, x-z\rangle \\
&= \langle (x-y)+(y-z), (x-y)+(y-z)\rangle \\
&= \langle x-y, x-y\rangle + 2\langle x-y, y-z\rangle + \langle y-z, y-z\rangle \\
&\leq \langle x-y, x-y\rangle + 2\|x-y\| \cdot \|y-z\| + \langle y-z, y-z\rangle \\
&= (\|x-y\| + \|y-z\|)^2 = (\rho(x,y) + \rho(y,z))^2 .
\end{aligned}$$

因此 $\rho$ 为 $X$ 上的度量, 称为由内积诱导的度量.

## §2 度量空间的拓扑

本节假设 $(X,\rho)$ 为度量空间. 设 $x \in X$, $r > 0$, 记

$$B_r(x) = \{y \in X \mid \rho(y,x) < r\},$$

称为以 $x$ 为中心, $r$ 为半径的开球.

**定义 1 (开集和闭集)** 设 $U$ 为 $X$ 的子集, 如果 $\forall\ x \in U$, 均 $\exists\ \varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon(x) \subset U$, 则称 $U$ 为开集; 约定空集也是开集. 如果一个集合的补集 (余集) 是开集, 则称之为闭集.

显然, $X$ 为开集, 从而 $\emptyset$ 也是闭集. 含有 $x$ 的开集称为 $x$ 的开邻域.

**例 1** 开球为开集: 设 $x \in B_r(x_0)$, 则 $\rho(x, x_0) < r$, 令 $\varepsilon = r - \rho(x, x_0)$, 则当 $y \in B_\varepsilon(x)$ 时, 由三角不等式, 有

$$\rho(y, x_0) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_0) < \varepsilon + \rho(x, x_0) = r,$$

这说明 $y \in B_r(x_0$, 即 $B_\varepsilon(x) \subset B_r(x_0)$.

类似可证 $\{y \in X | d(y, x_0) > r\}$ 为开集, 其补集称为闭球, 是闭集.

**命题 1** (1) 有限多个开集之交仍为开集; 任意多个开集之并仍为开集;

(2) 有限多个闭集之并仍为闭集; 任意多个闭集之交仍为闭集.

**证明** (1) 设 $U_1, \cdots, U_k$ 为开集, $\forall x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$, 由定义, $\exists \varepsilon_i > 0$, 使得 $B_{\varepsilon_i}(x) \subset U_i$, $i = 1, \cdots, k$. 令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i | i = 1, \cdots, k\}$, 则 $B_\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$, 故 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$ 为开集, 从开集的定义立即可以推出任意多个开集之并为开集.

(2) 利用集合运算

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_k)^c = A_1^c \cap \cdots \cap A_h^c$$
$$(\bigcap_\alpha A_\alpha)^c = \bigcup_\alpha A_\alpha^c$$

及 (1) 即可.

为了刻画闭集, 我们引入极限的概念, 它和实数列的极限概念是一致的.

**定义 2 (极限)** 设 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $X$ 中点列, 如果存在 $x_0 \in X$, 使得 $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N = N(\varepsilon)$, 当 $n \geq N$ 时, $x_n \in B_\varepsilon(x_0)$, 则称 $\{x_n\}$ 收到极限 $x_0$, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

**注** (1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$.

(2) 由三角不等式和 (1) 易见, 极限如果存在, 则必唯一.

**命题 2** 集合 $A$ 为闭集当且仅当 $A$ 中任何收敛点列的极限仍在 $A$ 中.

**证明** 设 $A$ 为闭集, $\{x_n\} \subset A$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 如果 $x_0 \notin A$, 则 $\exists\ \varepsilon_0 > 0$, 使得 $B_{\varepsilon_0}(x_0) \subset A^c$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 意味着, $\exists\ N = N(\varepsilon_0)$ 使得 $n \geq N$ 时 $x_n \in B_{\varepsilon_0}(x_0)$, 这与 $x_n \in A$ 相矛盾! 因此 $x_0 \in A$.

反之, 如果 $A$ 中任何收敛点列的极限仍在 $A$ 中, 则任取 $x_0 \notin A$, 考虑 $r_n = n^{-1}$, 如果 $B_{r_n}(x_0) \cap A \neq \emptyset$, 则取 $x_n \in B_{r_n} \cap A$. 从而 $x_n \to x_0$, 这是矛盾. 因此, $\exists n_0 > 0$ 使得 $B_{r_{n_0}}(x_0) \subset A^c$, 即 $A^c$ 为开集, $A$ 为闭集.

## §3 度量空间的完备性

本节设 $(x, \rho)$ 为度量空间. 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $X$ 中点列. 如果 $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N = N(\varepsilon)$, 当 $n, m \geq N$ 时

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$$

则称点列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列 (或基本列).

**定义 1 (完备性)** 如果 $X$ 中 Cauchy 列均为收敛点列, 则称 $(X, \rho)$ 为完备度量空间.

**注** (1) 收敛点列必为 Cauchy 列;

(2) Cauchy 列如果有收敛子列, 本身也一定收敛 (习题).

**命题 1** $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 为完备度量空间.

**证明** 设 $\{x_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中点列, 把它写成分量形式

$$x_n = (x_n^1, x_n^2, \cdots, x_n^n),$$

则

$$\|x_k^i - x_l^i| \leq \left[\sum_{j=1}^{n} (x_k^j - x_i^j)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \|x_k - x_l\|$$

因此, 如果 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 则 $\{x_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ 对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$ 均为 Cauchy 列, 从而收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^i = x_0^i$, 则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = (x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^n).$$

设 $A$ 为 $X$ 中子集, 称 $\sup\{\rho(x, y) | x, y \in A\}$ 为 $A$ 的直径, 记为 $\mathrm{diam} A$. 直径有限的集合称为有界集合.

下面的定理是 $\mathbb{R}^1$ 中闭区间套原理的一般形式.

**定理 1** 设 $(X,\rho)$ 为度量空间, 则下列几条等价:

(1) $(X,\rho)$ 为完备度量空间;

(2) (Cantor) 闭集套原理成立: 若 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots > F_n \supset \cdots$ 为一列非空闭集, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$, 则存在唯一的点 $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

(3) 闭球套原理成立: (2) 中 $F_i$ 换成直径 (半径) 趋于 0 的闭球时有相同结论.

**证明** (1)⇒(2): 取 $a_n \in F_n$, 由 $F_n \supset F_{n+1} \supset \cdots$ 知 $\{a_n, a_{n+1}, \cdots\} \subset F_n$. 因此, $m > n$ 时

$$\rho(a_m, a_n) \le \operatorname{diam} F_n \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

从而 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列, 设其极限为 $a$, 则 $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_m \in F_n$, $\forall n \ge 1$, 即 $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. 如果另有 $b \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, 则

$$\rho(a,b) \le \operatorname{diam} F_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

从而 $a = b$.

(2)⇒(3): 这是显然的.

(3)⇒(1). 设 $\{a_n\}$ 为 $X$ 中 Cauchy 列, 为了证明这是一个收敛点列, 只须证明它包含一个收敛子列即可. 由 Cauchy 列的定义, $\exists\ n_1 < n_2 < \cdots$, 使得 $m, n \ge n_k$ 时

$$\rho(a_m, a_n) < \frac{1}{2^{k+1}}.$$

考虑 $X$ 中的闭球 $F_k = \bar{B}_{2^{-k}}(a_{n_k}), k = 1, 2, \cdots$. 当 $x \in F_{n+1}$ 时,

$$\begin{aligned} \rho(x, a_{n_k}) &\le \rho(x, a_{n_{k+1}}) + \rho(a_{n_{k+1}}, a_{n_k}) \\ &\le \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

这说明 $x \in F_k$. 即 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k > F_{k+1} \supset \cdots$. 另一方面,

$$\operatorname{diam} F_k \le 2 \cdot 2^{-k} \to 0, \ (k \to +\infty),$$

故存在 $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_k$. 从而有

$$0 \le \rho(a, a_{n_k}) \le 2^{-k} \to 0 \quad (k \to +\infty)$$

即子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 $a$.

完备度量空间有如下有用的压缩映像原理.

**定义 2 (压缩映射)** 设 $A$ 为 $X$ 的子集, 映射 $f: A \to A$ 如果满足以下条件:

$$(*)\text{存在常数 } 0 \le q < 1, \text{ 使得 } \rho(f(a_1), f(a_2)) \le q \cdot \rho(a_1, a_2), \ \forall\, a_1, a_2 \in A.$$

则称之为压缩映射.

**定理 2 (压缩映射原理)** 如果 $A$ 为完备度量空间 $(X, \rho)$ 中闭集, $f: A \to A$ 为压缩映射, 则存在唯一的点 $a \in A$, 使得 $f(a) = a$ (不动点).

**证明** 任取 $a_0 \in A$, 递归地定义 $A$ 中点列 $\{a_n\}$ 如下:

$$a_n = f(a_{n-1}), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

则

$$\rho(a_{n+1}, a_n) = \rho\left(f(a_n), f(a_{n-1})\right) \le q \cdot \rho(a_n, a_{n-1}), \quad \forall\, n \ge 1$$

从而有

$$\begin{aligned}
\rho(a_{n+1}, a_n) &\le q \cdot \rho(a_n, a_{n-1}) \le q^2 \rho(a_{n-1}, a_{n-2}) \le \cdots \le q^n \cdot \rho(a_1, a_0), \quad \forall n \ge 0 \\
\rho(a_m, a_n) &\le \rho(a_m, a_{m-1}) + \rho(a_{m-1}, a_{m-2}) + \cdots + \rho(a_{n+1}, a_n) \\
&\le (q^{m-1} + q^{m-2} + \cdots + q^n) \cdot \rho(a_1, a_0) \\
&\le \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho(a_1, a_0) \to 0, \ (m > n, \ n \to \infty).
\end{aligned}$$

这说明 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列. 设其极限为 $a$, 则 $a \in A$, 且

$$\begin{aligned}
\rho(f(a), a) &\le \rho(f(a), f(a_n)) + \rho(f(a_n), f(a) + \rho(a_n, a) \\
&\le \rho \cdot \rho(a, a_n) + q^n \cdot \rho(a_1, a_0) + \rho(a_n, a) \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

这说明 $f(a) = a$.

唯一性: 若 $f(b) = b$, 则

$$\rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) \le q \cdot \rho(a, b)$$

这说明 $\rho(a, b) = 0$, 从而 $a = b$.

## §4　度量空间与紧致性

设 $S$ 为度量空间 $(X,\rho)$ 的子集, 如果 $S\subset\bigcup\limits_{\alpha}G_\alpha$, 则称 $\{G_\alpha\}$ 为 $S$ 的一个覆盖. 当 $G_\alpha$ 均为开集时, 称 $\{G_\alpha\}$ 为开覆盖; 只有有限个元素的覆盖称为有限覆盖, 由 $\{G_\alpha\}$ 中若干元素组成的覆盖称为子覆盖.

**定义 1 (紧致性)**　如果集合 $S$ 的任何开覆盖都有有限子覆盖, 则称 $S$ 为紧致集合.

**命题 1**　紧致集合必为有界闭集.

**证明**　设 $A$ 为紧致集合, 取 $a\in A$, 因为 $A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n(a)$, 故 $\exists\ n_1,\cdots,n_k$, 使得 $A\subset\bigcup\limits_{n_i}B_{n_i}(a)=B_N(a)$, $N=\max\{n_1,\cdots,n_k\}$. 因此 $A$ 为有界集合. 下面证明 $A^c$ 为开集. 事实上, 任取 $b\in A$, 考虑 $A$ 中任意一点 $a$, 取 $0<r(a)<\dfrac{1}{2}\rho(a,b)$, 则 $B_{r(a)}(a)\cap B_{r(a)}(b)=\emptyset$, 且 $A\subset\bigcup\limits_{a\in A}B_{r(a)}(a)$, 由假设, 存在 $a_1,\cdots,a_k\in A$ 使得 $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}B_{r(a_i}(a_i)$. 令 $r=\min\limits_{1\le i\le k}\{r(a_i)\}$, 则 $B_r(b)\cap B_{r(a_i)}(a_i)=\emptyset$, $i=1,\cdots,k$. 从而 $B_r(b)\cap A=\emptyset$, 即 $A^c$ 为开集, $A$ 为闭集.

**定理 1**　设 $A$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中子集, 则以下几条等价:

(1) $A$ 为紧致集合;

(2) $A$ 为序列紧致集合, 即 $A$ 中任何点列均有收敛子列, 且该子列极限仍在 $A$ 中;

(3) $A$ 为有界闭集.

**证明**　(1) $\Rightarrow$ (2). (反证法). 设 $\{a_n\}$ 为 $A$ 中点列, 且它无收敛于 $A$ 中点的子列, 则 $\forall a\in A$, 存在开球 $B_{r(a)}(a)$, 使得 $B_{r(a)}(a)$ 最多只含有 $\{a_n\}$ 中有限项. 显然, $A\subset\bigcup\limits_{a\in A}B_{r(a)}(a)$, 由紧致性, 存在 $a_1,\cdots,a_k$ 使得 $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{k}B_{r(a_i)}(a_i)$, 特别地, $\{a_n\}$ 中只有限项能出现在 $A$ 中, 这是矛盾!

(2) $\Rightarrow$(3). 先证 $A$ 有界, (反证法). 如果 $\exists\ a_n\in A$, 使得 $\rho(a_0,a_n)\to\infty$ $(n\to\infty)$, 则显然 $\{a_n\}$ 中无收敛子列, 这是矛盾! 再证 $A$ 为闭集, 仍用反证法. 则存在 $a_n\in A$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\notin A$. $\{a_n\}$ 的一切子列均收敛于 $a\notin A$, 这与序列紧矛盾!

(3) $\Rightarrow$ (反证法). 设 $A$ 为有界闭集, 且存在 $A$ 的开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 使得其任何有限个元素均无法覆盖 $A$. 取闭正方体 $I_0 \supset A$, 将 $I_1$ 做 $2^n$ 等分, 必有一等分 $I_2 \subset I_1$, 使得 $I_2 \cap A$ 不能被有限个 $U_\alpha$ 覆盖. 依此类推, 得一串闭立方体 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, $\operatorname{diam} I_m \to 0$ $(m \to \infty)$. 由闭集套原理, 存在唯一的点 $a \in \cap I_m \cap A$. 又因为 $\{U_\alpha\}$ 为 $A$ 的开覆盖, 故存在 $\alpha_0$ 使得 $a \in U_{\alpha_0}$. 于是 $m$ 充分大时必有 $I_m \subset U_{\alpha_0}$. 这与 $I_m \cap A$ 不能被有限个 $U_\alpha$ 覆盖相矛盾!

**推论** $\mathbb{R}^n$ 中有界点列必有收敛子列 ($\because$ 含于某闭球或立方体中).

**定义 2 (道路连通)**

## §5 连续映射

回忆一下连续函数的定义: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 $x_0$ 处连续是指, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ 使得 $|x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 用度量空间的语言可作如下推广:

**定义 1 (连续映射)** 设 $f : X \to Y$ 为度量空间 $(X, \rho_1)$, $(Y, \rho_2)$ 之间的映射, 设 $x_0 \in X$. 如果 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ 使得 $f(B_\delta^X(x_0)) \subset B_\varepsilon^Y(f(x_0))$, 则称 $f$ 在 $x_0$ 处连续. 如果 $f$ 处处连续, 则称 $f$ 为连续映射.

**命题 1 (连续映射的刻画)** 设 $f : X \to Y$ 为度量空间之间的映射, $x_0 \in X$. 则

(1) $f$ 在 $x_0$ 处连续 $\Leftrightarrow$ 对任意收敛于 $x_0$ 的点列 $x_n$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$;

(2) $f$ 为连续映射 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall$ 开集 $V \subset Y$, $f^{-1}(V)$ 为 $X$ 中开集;

(3) $f$ 为连续映射 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall$ 闭集 $V \subset Y$, $f^{-1}(V)$ 为 $X$ 中闭集.

**证明** (1) "$\Rightarrow$" 设 $f$ 在 $x_0$ 处连续, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ 使得

$$f(B_\delta^X(x_0) \subset B_\varepsilon^Y(f(x_0)).$$

因为 $x_n \to x_0$, 故 $n$ 充分大时 $x_n \in B_\delta^X(x_0)$, 从而 $f(x_n) \in B_\varepsilon^Y(f(x_0))$, 即 $f(x_n) \to f(x_0)$.

"$\Leftarrow$" (反证法) 如果 $f$ 在 $x_0$ 处连续, 则 $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ 使得对 $\delta = \dfrac{1}{n}$, $\exists\, x_n \in B_{\frac{1}{n}}^X(x_0)$, 而 $f(x_n) \notin B_{\varepsilon_0}^Y(f(x_0))$. 显然 $x_n \to x_0$, 但 $f(x_n) \not\to f(x_0)$, 矛盾!

(2), (3): 留作习题.

**注** (1) 如果 $A$ 为 $X$ 之子集, $f: A \to Y$ 为映射, 则把 $X$ 的度量限制于 $A$, 从而 $A$ 也为度量空间 (子度量空间), 此时可以定义 $f$ 的连续性, 并有类似的刻画.

(2) 设 $f: A \to Y$ 连续, 如果 $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ 使得 $\rho_1(a_1, a_2) < \delta$ 时 $\rho_2(f(a_1), f(a_2)) < \varepsilon$, 则称 $f$ 为一致连续映射.

**定理 1 (连续映射与紧性)** 设 $f: X \to Y$ 为连续映射, 则

(1) $f$ 把 $X$ 中紧致集合映为 $Y$ 中紧致集合;

(2) $f$ 在紧致集合上一致连续.

**证明** (1) 设 $A$ 为 $X$ 中紧致集合, 取 $f(A)$ 的开覆盖 $\{V_\alpha\}$, 则 $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ 为 $A$ 的开覆盖, 从而 $\exists\ \alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 使得 $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} f^{-1}(V_{\alpha_i})$. 这说明 $f(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_{\alpha_i}$.

(2) 设 $A$ 为紧致集合. 如果 $f$ 在 $A$ 上不是一致连续的, 则 $\exists\ \varepsilon_0 > 0$, 使得对 $\delta = \dfrac{1}{n}$, $\exists\ a_m, b_n \in A$, 使得

$$\rho_1(a_n, b_n) < \frac{1}{n},\ \rho_2(f(a_n), f(b_n)) > \varepsilon_0.$$

由 §4 定理 1, $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别存在收敛子列, 不妨设它们本身是收敛的, $a_n \to a_0$, $b_n \to b_0$, 则

$$\begin{aligned} \rho_1(a_0, b_0) &\leq \rho_1(a_0, a_n) + \rho_1(a_n, b_n) + \rho_1(b_n, b_0) \\ &< \frac{1}{n} + \rho_1(a_0, a_n) + \rho_1(b_m, b_0) \to 0 \end{aligned}$$

即 $a_0 = b_0$. 但

$$\varepsilon_0 < \rho_2(f(a_n), f(b_n)) \leq \rho_2(f(a_n), f(a_0)) + \rho_2(f(b_0), f(b_n)) \to 0.$$

这是矛盾!

**推记** 连续映射 (连续函数)$f: X \to \mathbb{R}$ 在紧致集合上可以取到最大值, 最小值.

**定义 2 (道路连通)** 设 $G$ 为 $X$ 的子集, 如果任给 $x_1, x_2 \in G$, 均存在连续映射 (连续曲线) $\sigma: I = [0,1] \to X$ 使得 $\sigma(0) = x_1$, $\sigma(1) = x_2$, $\sigma(I) \subset G$, 则称 $G$ 道路连通.

**命题 2** $\mathbb{R}^1$ 中道路连通集合必为区间.

**证明** 设 $G \subset \mathbb{R}^1$ 道路连通, $a, b \in G$. 我们证明 $[a,b] \subset G$. 事实上, 由定义, 存在连续映射 $f:[0,1] \to \mathbb{R}$, 使得 $f(0)=a$, $f(1)=b$, $f([0,1]) \subset G$. $f$ 为一元连续函数, 由介值定理, $[a,b] \subset f([0,1]) \subset G$.

**定理 2 (连续映射与连通性)** 连续映射把道路连通的集合映为道路连通集合.

**证明** 设 $G \subset X$ 道路连通, $f: X \to Y$ 连续. 任取 $y_1, y_2 \in f(G)$, 则存在 $x_1, x_2 \in G$ 使得 $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$. 由定义, 存在连续映射 $\sigma:[0,1] \to X$ 使得 $\sigma(0)=x_1$, $\sigma(1)=x_2$, $\sigma([0,1]) \subset G$. 复合映射 $f \circ \sigma:[0,1] \to Y$ 连续, 且 $f\circ\sigma(0)=f(x_1)=y_1$, $f\circ\sigma(1)=f(x_2)=y_2$, $f\circ\sigma([0,1]) \subset f(G)$. $f\circ\sigma$ 就是 $f(G)$ 中连接 $y_1, y_2$ 的道路.

**推论** 设 $f: X \to \mathbb{R}$ 为连续函数, $G \subset X$ 道路连通.

(1) 如果存在 $x_1$, $x_2 \in G$, 使得 $f(x_1)\cdot f(x_2) < 0$, 则存在 $x_0 \in G$ 使得 $f(x_0)=0$;

(2) 对于满足条件 $f(x_1) \le y \le f(x_2)$ 的任意 $y$, 一定存在 $x \in G$ 使得 $y=f(x)$.

映射 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 称为二元函数. $\mathbb{R}^2$ 中的点用坐标 $(x,y)$ 表示. 设 $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, 如果 $\exists\, A \in \mathbb{R}$, 使得任给 $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ 使得当

$$0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$$

时,

$$|f(x,y)-A| < \varepsilon,$$

就称 $f$ 在 $(x_0,y_0)$ 处有极限 (重极限), 记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

或

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A.$$

如果对于每一个固定的 $y$, 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$ 存在, 则可以定义极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\varphi(y).$$

类似地定义 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, 称它们为累次极限.

**例 1** (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0\left(\because \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\le\dfrac{1}{2}xy\le\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

(2) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处无极限 (分别考虑 $y=x$ 和 $y=x^2$.)

(3) $f(x,y)=x\cdot\sin\dfrac{1}{y}$. 由 $|f(x,y)|\le x$ 知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$, 但 $\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ 不存在.

(4) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=0$, 但由 (2), 重极限不存在.

**定理 3** 如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)=A$, 且 $\forall\, y\neq b$, $\lim\limits_{x\to a}f(x,y)=\varphi(y)$ 存在, 则

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y)=\lim_{y\to b}\varphi(y)=A$$

如果 $\forall\, x\neq a$, $\lim\limits_{y\to b}f(x,y)$ 也存在, 则

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y)=A=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y).$$

**证明** 以 $A$ 有限为例. 由假设, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 当

$$0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$$

时 $|f(x,y)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 固定 $y$, 令 $x\to a$, 得

$$\left|\lim_{x\to a}f(x,y)-A\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,\qquad\forall\, 0<|y-b|<\frac{\delta}{2}.$$

这说明

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y)=A.$$