第五章 微分中值定理和 Taylor 展开

§5.1 函数极值

§5.2 中值定理

定理 5.2.1 (Rolle)**.** *设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $f(a)=f(b)$. 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.*

证明. 连续函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上可以取到最大值 M 和最小值 m. 如果 $M=m$, 则 f 恒为常数，从而 $f'\equiv 0$; 如果 $M>m$, 则由 $f(a)=f(b)$ 知 m 与 M 中至少有一个是被 f 在内点 $\xi\in(a,b)$ 处所取得，由 Fermat 定理，$f'(\xi)=0$. □

定理 5.2.2 (Lagrange)**.** *设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得*

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ 或 } f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

证明. 令

$$F(x)=f(x)-[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)]$$

则 $F(a)=F(b)=0$, F 满足定理 1 的条件. 从而 $\exists\,\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$. 此 ξ 即为满足定理要求的 ξ. □

定理 5.2.3 (Cauchy)**.** *设函数 f,g 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $g'(x)\neq 0$, $\forall\,x\in(a,b)$. 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明. 由定理 1 和 $g'\neq 0$ 知 $g(b)\neq g(a)$. 令

$$F(x)=f(x)-[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))]$$

则 $F(a)=F(b)=0$, F 满足定理 1 的条件, 从而 $\exists\,\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$. ξ 即为满足要求的点. □

注: 令 $g(x)=x$, 则 Cauchy 定理可以推出 Lagrange 定理. 以上三个定理均称为微分中值定理.

定理 5.2.4 (积分第一中值定理)**.** *设 f,g 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 且 $g(x)$ 不变号, 则 $\exists\,\mu$,*

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)\le\mu\le\sup_{x\in[a,b]} f(x),$$

使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

证明. 不失一般性, 可设 $g(x) \geq 0$. 则

$$\inf f \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq \sup f \cdot g(x)$$

$$\Longrightarrow \inf f \cdot \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \sup f \cdot \int_a^b g(x)dx$$

上式说明, 如果 $\int_a^b g(x)dx = 0$, 则 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, 此时定理当然成立.

如果 $\int_a^b g(x)dx > 0$, 则令

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

则显然有

$$\inf f \leq \mu \leq \sup f.$$

定理得证. □

注: (1) 当 $g(x) \equiv 1$ 时, $\int_a^b f(x) = \mu \cdot (b-a)$.

(2) 特别地, 如果 f 连续, 则由介值定理, $\exists\, \xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \mu$, 此时

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

定理 5.2.5 (积分第二中值定理). *设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.*

(1) 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调减, 且 $g(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$, 则 $\exists\, \xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int_a^\xi f(x)dx;$$

(2) 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调增, 且 $g(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$, 则 $\exists\, \eta \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \cdot \int_\eta^b f(x)dx;$$

(3) 一般地, 如果 g 在 $[a,b]$ 上单调函数, 则 $\exists\, \zeta \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int_a^\zeta f(x)dx + g(b) \cdot \int_\zeta^b f(x)dx.$$

证明. 我们只证明一个特殊情形: f 连续, g 连续可微, $g' \le 0$. 令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则 $F' = f(x)$. 从而

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b F^{'}(x)g(x)dx \\ &= F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b Fg'dx \\ &= F(b)\cdot g(b) - \mu\cdot\int_a^b g'dx \\ &= F(b)\cdot g(b) - \mu(g(b)-g(a)).\end{aligned}$$

这说明

$$\inf F\cdot g(a) \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \sup F\cdot g(a).$$

因此, 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(\xi)g(a) = g(a)\cdot\int_a^\xi f(x)dx.$$

§5.3 L'Hospital 法则

Motivation: 设 f, g 为函数, 求极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

困难的情形:

(1) $x\to x_0$ 时, $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$, $(\frac{0}{0})$ 型;

(2) $x\to x_0$ 时, $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$, $(\frac{\infty}{\infty})$ 型.

定理 5.3.1 (L'Hospital). *设 f, g 在 (a,b) 内可导, 且 $g(x)\ne 0$, $\forall\, x\in(a,b)$. 又设*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$$

如果极限

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在 (或为 ∞), 则

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

证明. 补充定义 $f(a) = g(a) = 0$, 则 f 在 $[a,b)$ 上连续. 由 Cauchy 中值定理, $\forall\, x\in(a,b)$, $\exists\,\xi\in(a,x)$, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

当 $x \to a^+$ 时, $\xi \to a^+$, 从而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \to \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

因此

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注: (1) 如果仍有 $f'(a^+) = g'(a^+) = 0$, 则可利用二次导数继续求:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f''(x)}{g''(x)},$$

高阶导数的情形类似.

(2) 区间 (a,b) 换成 $(-\infty,b)$ 或 (a,∞) 时, 有类似结论:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(作变量代换 $x = \frac{1}{t}$ 即可).

定理 5.3.2 (L'Hospital). 设 f, g 在 (a,b) 内可导, $g(x) \neq 0$ 且

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty,$$

如果极限

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

存在 (或为 ∞), 则

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明. 我们对

$$l = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} < \infty$$

的情形加以证明, $l = \infty$ 的情形类似的可证. $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, 使得当 $x \in (a, a+\delta)$ 时

$$l - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \varepsilon.$$

取 $c = a + \frac{\delta}{2}$, 则由 Cauchy 中值公式, $\exists\, \xi \in (a,c)$, 使得

$$l - \varepsilon < \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < l + \varepsilon,\ x \in (a,c).$$

因为 $x \to a+$ 时, $g(x) \to \infty$, 故在上式中令 $x \to a^+$, 得

$$l - \varepsilon \le \liminf_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \le \limsup_{x \to a^+} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} \le l + \varepsilon.$$

因为 ε 是任意取的, 令 $\varepsilon \to 0$, 就得

$$\liminf_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \limsup_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

注 和定理 1 的注记一样, 有类似的注记 (略).

例 5.3.1. 求极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

解

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

例 5.3.2. 设 $f''(x_0)$ 存在, 求极限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f^{'}(x_0)h}{h^2}.$$

解

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f^{'}(x_0)h}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{2h} = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

例 5.3.3. 设 $x_1 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = x_n \cdot (1 - x_n)$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明 $n \cdot x_n \to 1$.

证明 易见 $0 < x_n < 1$, $\forall\, n \ge 1$. 从而

$$x_{n+1} = x_n \cdot (1 - x_n) < x_n.$$

设 $x_n \to a$, 则在上式中令 $n \to \infty$, 得

$$a = a \cdot (1 - a)$$

$\Rightarrow a = 0$. 即 $x_n \to 0$. 从而

$$\lim_{n \to \infty} (\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 - x_n} = 1$$

因此

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot (\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n}) = 1,$$

这说明

$$\lim_{n \to \infty} n \cdot x_n = 1.$$

例 5.3.4. 设 f 在 $(a,+\infty)$ 中可微. 则

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x\cdot f'(x)=1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=+\infty$.

(2) 如果 $\exists\ \alpha>0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha\cdot f(x)+x\cdot f'(x))=\beta,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} f(x)=\frac{\beta}{\alpha}.$$

证明. (1) $x\to+\infty$ 时, $\log x\to+\infty$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{\log x}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{n\to\infty} x\cdot f'(x)=1$$

(2) 当 $\alpha>0$ 时, $x^{\alpha}\to+\infty$ $(x\to+\infty)$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x) &= \lim_{n\to\infty}\frac{x^{\alpha}\cdot f}{x^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\alpha-1}\cdot\alpha f+x^{\alpha}\cdot f'}{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\alpha}(\alpha\cdot f(x)+x\cdot f)=\frac{\beta}{\alpha}.\end{aligned}$$

§5.4 Taylor 展开

Motivation: 我们研究一元函数 f 的性态.

(1) 如果 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则

$$f(x)-f(x_0)=o(1),\ (x\to x_0),$$

即, 在 x_0 附近 f 可用常值函数 $f(x_0)$ 逼近.

(2) 如果 $f(x)$ 在 x_0 处可微, 则

$$f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]=o(x-x_0),\ (x\to x_0),$$

即, 在 x_0 附近 f 可用线形函数 L 逼近,

$$L(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

(3) 如果 $f''(x_0)$ 存在, 则由 §5.2 例 2,

$$f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2]=o((x-x_0)^2),\ (x\to x_0),$$

即 f 在 x_0 附近可以用 2 次多项式逼近. 一般地, 我们有

定理 5.4.1 (带 Peano 余项的 Taylor 公式). 设 f 在 x_0 处 n 次可导, 则

$$\begin{aligned}(*)\quad f(x) &= f(x_0)+f^{'}(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2+\cdots\\ &\quad +\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\quad (x\to x_0)\end{aligned}$$

证明. 用数学归纳法. $n=1,\,2$ 已经在前面证明. 设 $n=k$ 时 $(*)$ 成立, 则 $n=k+1$ 时, 由假设, $f^{k+1}(x_0)$ 存在, 此时 $f'(x_0)$ 在 x_0 处 k 次可导, 由归纳假设,

$$\begin{aligned}f'(x) &= f'(x_0)+f''(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2!}f'''(x_0)\cdot(x-x_0)^2+\cdots\\ &\quad +\frac{1}{k!}f^{(k+1)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k+o((x-x_0)^k),\quad (x\to x_0),\end{aligned}$$

从而由 L'Hospital 法则

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}\cdot(x-x_0)^{k+1}]}{(x-x_0)^{k+1}}\\ &=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-[f'(x_0)+f''(x_0)\cdot(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^{k}]}{(k+1)(x-x_0)^{k}}\\ &=0.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0)+f^{'}(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2+\cdots\\ &\quad +\frac{1}{(k+1)!}f^{(k+1)}(x_0)\cdot(x-x_0)^{k+1}+o((x-x_0)^{k+1}),\quad (x\to x_0).\end{aligned}$$

从而 $(*)$ 对 $n=k+1$ 也成立. 由数学归纳法, $(*)$ 对任意的 n 都成立. □

记

$$R_n(x)=R_n(x_0,x)=f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n],$$

称 R_n 为 Taylor 展开的余项. 如果 f 在 x_0 处有 n 阶导数, 则

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n).\ \text{(Peano 余项)}$$

如果条件更强些, 则有

定理 5.4.2 (Taylor). 设 f 在开区间 (a,b) 中有直到 $n+1$ 阶导数, $x_0,\,x\in(a,b)$. 则 $\exists\,\xi\in(x,x_0)$(或 (x,x_0)) 以及 $\zeta\in(x_0,x)$(或 (x,x_0)), 使得余项可表示为

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1},\quad (\textit{Lagrange}\ \text{余项})$$

以及

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\zeta)\cdot(x-\zeta)^n\cdot(x-x_0),\quad (\textit{Cauchy}\ \text{余项})$$

证明. 令

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-t)^k,$$

对 t 求导, 得

$$(**)\quad F'(t) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n,$$

由 F 的构造, 有

$$F(x) - F(x_0) = R_n(x).$$

由微分中值公式, $\exists\, \zeta = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$, 使得

$$\begin{aligned} R_n(x) &= F'(\zeta)\cdot(x-x_0) \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\zeta)\cdot(x-\zeta)^n\cdot(x-x_0), \quad \text{(Cauchy 余项)} \end{aligned}$$

再由微分中值公式, $\exists\, \xi$, 使得 (取 $G(t) = (x-t)^{n+1}$)

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F(x)-F(x_0)}{0-(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F'(\xi)}{(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

即

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-x_0)^{n+1}, \quad \text{(Lagrange 余项)}$$

这就得到了余项的两种表达式. □

如果关于 f 的条件更强一些, 例如 f 是 $n+1$ 阶连续可微的, 则由 $(**)$ 知, F' 可积, 由微积分基本公式,

$$R_n(x) = F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} F'(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n dt.$$

这是余项的一个精确积分表示. 此时, 由于 $(x-t)^n$ 不变号, 由第一积分中值定理, $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ (或 (x, x_0)), 使得

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\cdot \int_{x_0}^{x} (x-t)^n dt = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

这也就是 Lagrange 余项. 同理可得 Cauchy 余项.

如果 f 在 x_0 附近无穷次可微, 则称形式和

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 f 在 x_0 处的 Taylor 展开. Taylor 展开在 $x_0 = 0$ 的特殊情形也称 Maclaurin 展开公式. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, 则记

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^n.$$

此时称 f 的 Taylor 展开收敛到自身.

例 5.4.1. $f(x)=\frac{1}{1-x}$ 在 $(-1,1)$ 中任意次可微. 求 x_0 处 f 的 *Taylor* 展开.

解 利用归纳法容易计算 f 的各阶导数为

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}},\ n=1,2,\cdots$$

因此 $f^{(n)}(0)=n!$, 故 Taylor 展开为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)(0)}}{n!}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

又因为余项

$$R_n(x)=\frac{1}{1-x}-(1+x+x^2+\cdots+x^n)=\frac{x^n}{1-x}\to 0,\ (n\to\infty)$$

故

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\ x\in(-1,1)$$

例 5.4.2. 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的 *Taylor* 展开式.

解 $f^{(n)}(x)=e^x$, $\forall\ n\geq 1$. 故 $f^{(n)}(0)=1$ $(n\geq 1)$, 从而 e^x 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开式为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

其余项为

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}e^{\zeta}x^{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x}x^{n+1},\ \theta\in(0,1)$$

因此有估计

$$|R_n(x)|\leq e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\ (n\to\infty)$$

这说明

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\cdots,\ x\in(-\infty,\infty).$$

特别地

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdots$$

由此容易说明 e 为无理数: 首先

$$\begin{aligned}2<e &< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\\ &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots=3,\end{aligned}$$

如果 $e=\frac{p}{q}$, $(p,q)=1$, 则

$$\begin{aligned}0 &< q!\cdot e-q!(1+1+\cdots+\frac{1}{q!})\\ &= q!(\frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\cdots)\\ &< \frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\frac{1}{(q+2)(q+3)}+\cdots\\ &= \frac{2}{q+1}<1\end{aligned}$$

但 $q!\cdot e-q!(1+1+\cdots+\frac{1}{q!})$ 为整数, 这就得到了矛盾!

例 5.4.3. *求* $\sin x$, $\cos x$ *在* $x=0$ *处的 Taylor 的展开.*

解 $\sin' x=\cos x$, $\sin'' x=\cos' x=-\sin x$, 因此

$$\sin^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\cos x,\quad \sin^{(2k)}(x)=(-1)^k\sin x$$

特别地

$$\sin^{(2k+1)}(0)=(-1)^k,\quad \sin^{(2k)}(0)=0.$$

因此

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}\cos\theta x}{(2n+3)!},\ 0<\theta<1,$$

因为余项趋于零, 故

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in(-\infty,\infty)$$

类似地,

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,\ x\in(-\infty,\infty)$$

命题 5.4.3. *设* $f(x)$ *在* $x_0=0$ *处有 Taylor 展开*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n,$$

则

(1) $f(-x)$ *有 Taylor 展开* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\cdot x^n$;

(2) $f(x^k)$ *有 Taylor 展开* $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^{kn}$, *其中* k *为正整数;*

(3) $x^k f(x)$ 有 *Taylor* 展开 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{k+n}$, 其中 k 为正整数;

(4) $f^{'}(x)$ 有 *Taylor* 展开 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^n$;

(5) $\int_0^x f(t)dt$ 有 *Taylor* 展开 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$;

(6) 如果 $g(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处有 *Taylor* 展开 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$, 则 $\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)$ 有 *Taylor* 展开

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda \cdot a_n + \mu \cdot b_n) \cdot x^n.$$

这个命题虽然可以通过计算 $x_0 = 0$ 处的导数去证明, 但利用下一节中 Taylor 展开的惟一性可以更容易地得到, 因此我们先承认它.

例 由例 1,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots,$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots, \\
\frac{1}{1-x^2} &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots, \\
\frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots,
\end{aligned}$$

以及

$$\log(1-x) = -\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots, \qquad (*)$$

其余项

$$R_n(x) = \log(1-x) + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} = -\int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt,$$

如果 $-1 \le x < 0$, 则

$$|R_n(x)| \le |\int_0^x t^n| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \to 0, \ (n \to \infty),$$

如果 $0 \le x < 1$, 则

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n = \frac{x^{n+1}}{(1-x)(n+1)} \to 0 \ (n \to \infty),$$

因此 $(*)$ 对 $x \in [-1, 1)$ 均成立. 把 x 换成 $-x$, 则得

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots, \ x \in (-1, 1]$$

特别地, 在上式中取 $x=1$, 得

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

同理,

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x)$$

余项 $R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$, 当 $x \in [-1,1]$ 时

$$|R_n(x)| \le \int_0^{|x|} t^{2n}dt = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \to 0$$

这说明

$$\Rightarrow \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots,\ x \in [-1,1]$$

特别地，在上式中取 $x=1$, 得

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots, \qquad \text{(Leibnitz-Gregory)}$$

类似地我们有如下展开式

$$\begin{aligned}
e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}, \\
\sinh x &= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\
\cosh x &= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.
\end{aligned}$$

注 $\log 2, \pi$ 都是无理数.

§5.5 Taylor 展开的惟一性

定理 5.5.1 (惟一性). *设 f 在 x_0 处 n 阶可微, 且*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),$$

则

$$a_n = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0),\ k = 0, 1, \cdots, n.$$

证明. $k=0$ 时,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)) = a_0,$$

故 $a_0 = f(x_0)$.

$k=1$ 时,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)}{x-x_0} = a_1,$$

故 $a_1 = f'(x_0)$. 依次类推可得 $a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$, $k \le n$. □

由惟一性定理可以立即推出上节最后的命题.

通常, 一个函数的 Taylor 展开可以由很多方法得到, 但要判断 Taylor 展开式是否收敛以及是否收敛到原函数就不是很容易了.

例 5.5.1. *定义函数*

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

显然, 在 $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ 上 ϕ 是无限次可微的, 利用归纳法不难证明, ϕ 在 $x=0$ 处也无限次可微, 且 $\phi^{(n)}(0)=0$, $n\ge 0$. 因此, ϕ 虽然为非零光滑函数, 它在 $x=0$ 处的 Taylor 展开式却恒为 0.

注 这个看上去有些奇怪的函数在一些后续课程中非常有用.

在后面的章节中, 我们将发展一些判断级数是否收敛的办法. 下面我们对一个非常特殊的情形给出判断.

定理 5.5.2 (Bernstein)**.** *设 f 在 $[a,b]$ 上任意阶可微, 且 $f^{(n)}(x)\ge 0$, $n \ge 1$. 则当 $x, x_0 \in (a,b)$, 且 $|x-x_0| < b-x_0$ 时*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

证明. 记 $M = f(b)-f(a)$, 由 $f'\ge 0$ 知 f 为单调递增函数, 从而任取 $x\in(a,b)$, 取 $x'\in(x,b)$, 由中值定理, 有

$$M = f(b)-f(a) \ge f(x')-f(x) = (x'-x)f'(\xi) \ge (x'-x)f'(x).$$

令 $x'\to b$, 就得到估计

$$M \ge (b-x)f'(x).$$

同理,

$$M \ge f(x')-f(x) = f'(x)(x'-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x'-x)^2 \ge \frac{1}{2}f''(x)(x'-x)^2$$

这就得出下面的估计

$$M \ge \frac{1}{2}(b-x)^2 f''(x).$$

依此类推, 我们得到如下估计:

$$0 \le f^{(n)}(x) \le \frac{n!M}{(b-x)^n},\ x \in (a,b).$$

下面分两种情况讨论余项 $R_n(x)$ 的极限.

(1) $x > x_0$. 此时

$$\begin{aligned} 0 \le R_n(x) &= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)(t)}}{n!}(x-t)^n dt \\ &\le \int_{x_0}^{x} (n+1)M \cdot \frac{(x-t)^n}{(b-t)^{n+1}} dt \\ &\le \frac{(n+1)M}{b-x} \int_{x_0}^{x} (\frac{x-t}{b-t})^n dt \\ &\le \frac{(n+1)M}{b-x} (\frac{x-x_0}{b-x_0})^n (x-x_0) \to 0,\ (n \to \infty) \end{aligned}$$

(2) $x < x_0$. 此时, 如果 $x_0 - x < b - x_0$, 则

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= |\int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)(t)}}{n!}(x-t)^n dt| \\ &\le \int_{x}^{x_0} \frac{f^{(n+1)(t)}}{n!}(t-x)^n dt \\ &\le \frac{1}{n!} f^{(n+1)(x_0)} \int_{x}^{x_0} (t-x)^n dt \\ &\le \frac{1}{n!} \frac{(n+1)!M}{(b-x_0)^{n+1}} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \\ &\le M(\frac{x_0-x}{b-x_0})^{n+1} \to 0,\ (n \to \infty) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{1}{(n+1)!}(x_0-x)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \\ &\le \frac{1}{(n+1)!}(x_0-x)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0) \\ &\le M(\frac{x_0-x}{b-x_0})^{n+1} \to 0,\ (n \to \infty) \end{aligned}$$

这说明余项的确是趋于零的. □

§5.6 Taylor 展开的应用

(1) 函数极值的判断

我们知道, 如果 x_0 为 f 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$. 进一步, 如果 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 为极大值点; 如果 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 为极小值点. 利用 Taylor 公式, 我们可以推广如下

定理 5.6.1. 设 f 在 x_0 处 n 阶可微, 且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

则

(1) n 为偶数时, 如果 $f^{(n)}(x_0) < 0$, 则 x_0 为极大值点; 如果 $f^{(n)}(x_0) > 0$, 则 x_0 为极小值点;

(2) n 为奇数时, x_0 不是极值点.

证明. f 在 x_0 处有 Taylor 展开:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \\ &= f(x_0) + (x-x_0)^n[\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0) + o(1)]. \end{aligned}$$

因此结论的证明都是显然的. □

(2) 二阶可微函数的线性逼近

定理 5.6.2. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二阶可微, 并且

$$M = \sup_{x\in(a,b)} |f''(x)| < \infty,$$

则

$$|f(x) - l(x)| \le \frac{1}{8}M(b-a)^2,\quad \forall\ x \in [a,b],$$

其中

$$l(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),\ x \in [a,b].$$

证明. 由连续性, 只要对 $x \in (a,b)$ 证明即可. 取 a', b', 使得

$$a < a' < x < b' < b.$$

由 Taylor 公式, 有

$$\begin{aligned} f(a') - f(x) &= f'(x)(a'-x) + \frac{1}{2}(a'-x)^2 f''(\xi), \\ f(b') - f(x) &= f'(x)(b'-x) + \frac{1}{2}(b'-x)^2 f''(\eta), \end{aligned}$$

其中 $\xi \in (a', x)$, $\eta \in (x, b')$. 简单的计算表明

$$\begin{aligned} & |(b'-x)(f(a')-f(x)) - (a'-x)(f(b')-f(x))| \\ = & \frac{1}{2}(x'-a)(b'-x)|(x-a')f''(\xi) + (b'-x)f''(\eta)| \\ \le & \frac{1}{2}(x'-a)(b'-x)[M(x-a') + M(b'-x)] \\ = & \frac{1}{2}M(b'-a')(x'-a)(b'-x). \end{aligned}$$

在上式中令 $a' \to a$, $b' \to b$, 得

$$|f(x)-l(x)| \le \frac{1}{2}M(b-x)(x-a) \le \frac{1}{8}M(b-a)^2.$$

其中 l 为线性函数. □

注 最后我们实际上得到了一个逐点的估计

$$|f(x)-l(x)| \le \frac{1}{2}M(b-x)(x-a), \quad x \in [a,b]$$

以后我们会用到这个估计.

(3) 计算某些极限

例 5.6.1. 求极限

$$\lim_{x\to\infty}[x - x^2\log(1+\frac{1}{x})].$$

解 当 $x \to \infty$ 时, $x^{-1} \to 0$, 因此

$$\log(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}),$$

这说明

$$x - x^2\log(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{2} + o(1) \to \frac{1}{2}, \ (x \to \infty).$$

例 5.6.2. 设 f 在 0 附近二阶可微, 且 $|f''| \le M$, $f(0)=0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) = \frac{1}{2}f'(0).$$

证明. 由 Taylor 公式,

$$f(\frac{k}{n^2}) = f(0) + f'(0)\frac{k}{n^2} + R_{k,n},$$

其中

$$|R_{k,n}| = \frac{1}{2}|f''(\xi_{k,n})|(\frac{k}{n^2})^2 \le \frac{1}{2}M\frac{k^2}{n^4},$$

因此

$$|\sum_{k=1}^{n} R_{k,n}| \le \frac{1}{2}Mn^{-4}\sum_{k=1}^{n}k^2 \to 0, \quad (n\to\infty),$$

这说明

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) &= f'(0)\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}R_{k,n} \\ &= f'(0)\frac{n+1}{2n} + o(1), \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

由此就得到了要证明的极限等式. □

(4) 近似计算

例 5.6.3. 求 e 的近似值, 要求误差小于 10^{-4}.

解 我们利用等式

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

当 $n = 7$ 时,

$$0 < \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{8!} < 10^{-4},$$

这说明

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{7!} \approx 2.71825.$$

例 5.6.4. 求 π 的近似值.

解 利用恒等式

$$\arctan u + \arctan v = \arctan(\frac{u+v}{1-uv})$$

可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = \arctan 1 &= \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} \\ &= 2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7} = \cdots \end{aligned}$$

然后利用 Taylor 展开

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

就可以把 π 很快地算到很精确的值.

注 历史上, 公元 4 到 5 世纪时刘辉和祖冲之分别将 π 的值精确地计算到了小数点后第 4 位和第 7 位, 领先欧洲一千多年, 当然那时 Taylor 展开的理论还远没有出现.

例 5.6.5. 求 $\log 2$ 的近似值.

解 我们利用 Taylor 展开

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

在上式中令 $x = \frac{1}{2}$, 得

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k},$$

且有如下误差估计

$$|\log 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}| < \frac{1}{(n+1)2^n},$$

例如, 取 $n = 10$ 时, 误差即小于 10^{-4}.