# 第六章　Riemann 积分

## §1　Riemann 可积

如右图, 考虑由直线 $x=a$, $y=b$, $y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 围成的曲边梯形, 为了计算它的面积, 我们用若干小矩形面积之和去逼近: 将 $[a,b]$ 划分为

$$\pi:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

第 $i$ 个小梯形的面积可用 $f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ 近似逼近, 其中 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 于是和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ 表示曲边梯形 ABCD 的面积的近似值. 我们期望, 当 $[a,b]$ 的划分越来越细时, 这个近似值越来越接近所求面积.

我们用下式表示

$$S_{ABCD}=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

这里 $\|\pi\|=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$. 如果上述极限存在, 则记为 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

一般地, 设函数 $f(x)$ 定义于区间 $[a,b]$, $[a,b]$ 内有 $n+1$ 个点依次为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 它们将 $[a,b]$ 分成 $n$ 个小区间 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\cdots,n$, 这些分点及闭子区间构成了 $[a,b]$ 的一个分割, 记为

$$\pi:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

小区间 $\Delta_i$ 的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, 并称

$$\|\pi\|=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$$

为分割 $\pi$ 的模.

对于分割 $\pi$, 任取点 $\xi_i\in\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\cdots,n$. 称

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

为 $f$ 在 $[a,b]$ 上的一个 Riemann 和或积分和.

**定义 1 (Riemann 积分)**　设 $f$ 如上, 如果存在实数 $I$, 使得对 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 对任何分割 $\pi$, 只要 $\|\pi\|<\delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon, \quad \forall\,\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\ i=1,\cdots,n$$

则称 $f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积或可积, 积分为 $I$, 记为

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i.$$

其中 $f(x)$ 称为被积函数, $[a,b]$ 为积分区间, $a,b$ 分别称为积分下限与积分上限.

**注**　(1) 积分和变量 $x$ 的选择无关, 即 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

(2) 如果 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是惟一确定的.

**定理 1 (可积的必要条件)**　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f$ 在 $[a,b]$ 上有界, 反之不然.

**证明**　假设 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 沿用上面的记号, 记 $I$ 为其积分.

取 $\varepsilon=1$, 由定理 1, $\exists\,\delta>0$, 对 $[a,b]$ 的任意分割

$$\pi:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,\quad \|\pi\|<\delta$$

及 $\forall\,\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\cdots,n$, 有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < 1$$

特别地, 取自然数 $n>\dfrac{b-a}{\delta}$, 令 $x_i=a+\dfrac{i}{n}(b-a)$, $i=0,\cdots,n$, 则此时 $\|\pi\|=\dfrac{b-a}{n}<\delta$, 不等式成为

$$\left|\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi)-I\right|<1, \quad \forall\,\xi_i\in\left[a+\frac{i-1}{n}(b-a),a+\frac{i}{n}(b-a)\right].$$

对于 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$, 我们如下取 $\xi_i$, $i\neq j$:

$$\xi_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$$

令

$$M=\max_{0\le i\le n}\left\{\left|f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right|\right\}$$

我们有如下估计:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\right| &\le \frac{n}{b-a}(1+|I|)\\ |f(\xi_j)| &\le \left|\sum_{i\ne j} f(\xi_i)\right|+\frac{n}{b-a}(1+|z|)\\ &\le (n-1)\cdot M+\frac{n}{b-a}(1+|I|) \qquad (\xi_i=a+\frac{i}{n}(b-a))\end{aligned}$$

$\forall\ \xi_j\in\left[a+\dfrac{j-1}{a}(b-a),a+\dfrac{j}{a}(b-a)\right]$. 因为这个估计对于 $j=1,2,\cdots,n$ 都成立, 故

$$|f(x)|\le(n-1)M+\frac{n}{b-a}(1+|I|),\quad \forall\ x\in[a,b],$$

即 $f$ 有界.

**反例** 有界函数未必可积.

Dirichlet 函数 $D(x)$ 即为例子: 对于一个分割, 当 $\xi_i$ 取 $[x_{i-1},x_i]$ 中无理数时, 积分和为 0, 当 $\xi_i$ 取 $[x_{i-1},x_i]$ 中有理数时, 积分和为 1. 故积分和无极限 (完整证明留作习题).

根据定义 1 来直接判断一个函数是否可积是非常困难的. 下面引入新的方法来判断. 为此, 以下总假定 $f$ 有界, 并记 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, $m=\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, 对于分割

$$\pi:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

记

$$\begin{aligned}&M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x), &&m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),\\ &S=\sum_{i=1}^{n}M_i\cdot\Delta x_i, &&s=\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot\Delta x_i,\\ &\omega_i=M_i-m_i,\end{aligned}$$

我们称 $S$ 为 $f$ 关于 $\pi$ 的 Darboux 上和, 简称上和, 也记为 $S(\pi)$ 或 $S(\pi, f)$. 而 $s$ 称为 Darboux 下和, 简称下和, 也记 $S(\pi)$ 或 $S(\pi, f)$, 称 $\omega_i$ 为 $f$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅. 由定义, $S - s = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i$.

**习题** $\omega_i = \sup\{|f(x) - f(y)| \,\big|\, x, y \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

**引理 1** 对于一个确定的分割 $\pi$, 有

$$S = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \,|\, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], 1 \le i \le n\right\}$$
$$s = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \,|\, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], 1 \le i \le n\right\}.$$

**证明** 一方面, 由定义, 有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = S, \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad 1 \le i \le n$$

从而

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i | \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], 1 \le i \le n\right\} \le S$$

另一方面, $\forall\, \varepsilon > 0$, 由上确界的定义, 可选 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 使得

$$f(\xi_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$$

此时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i &> \sum_{i=1}^{n} (M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}) \cdot \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot \Delta x_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \\ &= S - \varepsilon\end{aligned}$$

这说明

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i | \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], 1 \le i \le n\right\} \ge S.$$

从而证明了第一个等式. 第二个等式可同理证明, 或考虑 $-f$, 然后利用前一个等式.

**引理 2**　设分割 $\pi'$ 是从 $\pi$ 添加 $k$ 个分点得到, 则有

$$S(\pi) \geq S(\pi') \geq S(\pi) - (M-m)\cdot k \cdot \|\pi\|,$$
$$s(\pi) \leq s(\pi') \leq s(\pi) + (M-m)\cdot k \cdot \|\pi\|$$

特别地, 对于给定的分割增加新的分点时, 下和不减, 上和不增.

**证明**　为了简单起见, 就 $k=1$ 证明. 此时, 设新添加的分点为 $\bar{x}$, 则 $\bar{x}$ 必落在某个区间 $(x_{k-1}, x_k)$ 内. 由上和的定义,

$$S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i = M_k \cdot \Delta x_k + \sum_{i\neq k} M_i \cdot \Delta x_i$$
$$S(\pi') = M_k' \cdot (\bar{x} - x_{k-1}) + M_k''(x_k - \bar{x}) + \sum_{i\neq k} M_i \cdot \Delta x_i$$

这里 $M_k'$ 及 $M_k''$ 分别是 $f$ 在 $[x_{k-1}, \bar{x}]$ 及 $[\bar{x}, x_k]$ 上的上确界. 因为 $M_k' \leq M_k$, $M_k'' \leq M_k$, 从而

$$\begin{aligned}
0 &\leq S(\pi) - S(\pi') = (M_k - M_k')(\bar{x} - x_{k-1}) + (M_k - M_k'')(x_k - \bar{x}) \\
&\leq (M-m)\cdot(\bar{x} - x_{k-1}) + (M-m)\cdot(x_k - \bar{x}) \\
&= (M-m)\cdot \Delta x_k \\
&\leq (M-m)\|\pi\|.
\end{aligned}$$

即

$$S(\pi) \geq S(\pi') \geq S(\pi) - (M-m)\cdot\|\pi\|.$$

同理可证

$$s(\pi) \leq s(\pi') \geq S(\pi) - (M-m)\cdot\|\pi\|.$$

**推论**　对于任意两个分割 $\pi_1$ 及 $\pi_2$, 有

$$S(\pi_1) \leq S(\pi_2).$$

**证明**　用 $\pi_1 \cup \pi_2$ 表示将 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 的所有分点合并后得到的分割 (重复的分点只取一次), 则 $\pi_1 \cup \pi_2$ 既可以看成由 $\pi_1$ 添加分点而来, 又可以看作从 $\pi_2$ 添加分点而来. 由引理 2, 有

$$s(\pi_1) \leq S(\pi_1 \cup \pi_2) \leq S(\pi_1 \cup \pi_2) \leq S(\pi_2).$$

**定理 2 (Darboux)** $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0} S(\pi) = \inf\limits_{\pi} S(\pi)$, $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0} s(\pi) = \sup\limits_{\pi} s(\pi)$.

**证明** 根据定义, 有下面的估计:

$$m(b-a) \leq S(\pi) \leq M \cdot (b-a), \quad m \cdot (b-a) \leq s(\pi) \leq M \cdot (b-a)$$

因此 $\inf\limits_{\pi} S(\pi)$ 和 $\sup\limits_{\pi} s(\pi)$ 都存在.

$\forall\, \varepsilon > 0$, 由下确界的定义知, $\exists$ 分割 $\pi'$, 使得

$$S(\pi') < \inf_{\pi} S(\pi) + \frac{\varepsilon}{2}$$

设 $\pi'$ 由 $k$ 个分点构成. 对于任意另一分割 $\pi$, $\pi \cup \pi'$ 至多比 $\pi$ 多 $k$ 个分点. 由引理 2, 有

$$S(\pi) - (M-m) \cdot k \cdot \|\pi\| \leq S(\pi \cup \pi') \leq S(\pi') < \inf_{\pi} S(\pi) + \frac{\varepsilon}{2}$$

于是, 当 $\|\pi\| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2(M-m+1) \cdot k}$ 时,

$$\begin{aligned} \inf_{\pi} S(\pi) &\leq S(\pi) \leq (M-m) \cdot k \cdot \frac{\varepsilon}{2(M-m+1)k} + \inf_{\pi} S(\pi) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \inf_{\pi} S(\pi) + \varepsilon \end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{\|\pi\|\to 0} S(\pi) = \inf_{\pi} S(\pi)$$

同理可证另一极限.

称 $\inf\limits_{\pi} S(\pi)$ 为 $f$ 在 $[a,b]$ 上的上积分, $\sup\limits_{\pi} s(\pi)$ 为 $f$ 在 $[a,b]$ 上的下积分.

**定理 3 (可积的充要条件)** 设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上有界, 即 $|f(x)| \leq M$, $\forall\, x \in [a,b]$, 则以下条件等价:

(1) $f$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

(2) $f$ 在 $[a,b]$ 上的上积分和下积分相等.

(3) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, [a,b]$ 的某个分割 $\pi$, 使得

$$S(\pi) - s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon.$$

(4) $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\cdot\Delta x_i=0.$

(5) $\forall\varepsilon>0$, $\eta>0$, $\exists$ $[a,b]$ 的某个分割 $\pi$, 使得

$$\sum_{w_i\geq\varepsilon}\cdot\Delta x_i<\eta.$$

**证明** (1) $\Rightarrow$(2): 由 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 设积分为 $I$. $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 当 $\|\pi\|<\delta$ 时, 有

$$I-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i<I+\varepsilon$$

于是,

$$\begin{aligned}
I-\varepsilon &\leq s(\pi)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)\cdot\Delta x_i\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)\cdot\Delta x_i\\
&= S(\pi)\leq I+\varepsilon
\end{aligned}$$

由定理 2,

$$I-\varepsilon\leq\sup_{\pi}s(\pi)\leq\inf_{\pi}S(\pi)\leq I+\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to 0$, 得到

$$\sup_{\pi}s(\pi)=\inf_{\pi}S(\pi)=I.$$

(2) $\Rightarrow$(1): 设 $\sup\limits_{\pi}s(\pi)=\inf\limits_{\pi}S(\pi)$, 记为 $I$. 由 Darboux 定理, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 当 $\|\pi\|<\delta$ 时,

$$I-\varepsilon<s(\pi)\leq\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\leq S(\pi)<I+\varepsilon$$

即有

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=I.$$

也就是说 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 积分为 $I$.

(2) $\Rightarrow$(3): 由定理 2, 此时

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}(S(\pi)-s(\pi))=\inf_{\pi} S(\pi)-\sup_{\pi} s(\pi)=0$$

从而 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists$ 分割 $\pi$, 使得

$$S(\pi)-s(\pi)<\varepsilon.$$

(3) $\Rightarrow$(2): 如果存在分割 $\pi$, 使得

$$S(\pi)-s(\pi)<\varepsilon$$

则由

$$s(\pi)\le\sup_{\pi'} s(\pi')\le\inf_{\pi'} S(\pi')\le S(\pi)$$

知

$$0\le\inf_{\pi'} S(\pi')-\sup_{\pi'} s(\pi')\le S(\pi)-s(\pi)<\varepsilon$$

由 $\varepsilon$ 的任意性知上和下和相等.

以上证明了 (1), (2), (3) 互相等价. 下证 (2), (4), (5) 互相等价.

(2) $\Leftrightarrow$(4): 由定理 2

$$\begin{aligned}\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\cdot\Delta x_i &= \lim_{\|\pi\|\to 0}(S(\pi)-s(\pi))\\ &= \inf_{\pi} S(\pi)-\sup_{\pi} s(\pi).\end{aligned}$$

(4) $\Rightarrow$(5): $\forall\ \varepsilon>0$, $\eta>0$, 由 (4), 存在分割 $\pi$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\cdot\Delta x_i<\varepsilon\cdot\eta$$

从而

$$\varepsilon\cdot\sum_{\omega_i\ge\varepsilon}\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i\cdot\Delta x_i<\varepsilon\cdot\eta$$

即

$$\sum_{\omega_i\ge\varepsilon}\Delta x_i<\eta.$$

(5) $\Rightarrow$(3): $\forall\, \varepsilon > 0$, 由 (5), 存在 $[a,b]$ 的分割 $\pi$, 使得

$$\sum_{\omega_i \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4M}$$

对于这个分割, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i &= \sum_{\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \omega_i \cdot \Delta x_i x_i + \sum_{\omega_i \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \omega_i \cdot \Delta x_i \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_{\omega_i < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \Delta x_i + 2M \cdot \sum_{\omega_i \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \Delta x_i \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

**推论** (1) 设 $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, 如果 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上也可积.

(2) 设 $c \in (a,b)$, 如果 $f$ 在 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 上都可积, 则 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积.

**证明** (1) $\forall\, \varepsilon > 0$, 由于 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 由定理 3(4), $\exists\, \delta > 0$, 当 $\|\pi\| < \delta$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon$. 取 $[\alpha,\beta]$ 的一个分割 $\pi'$, 使得 $\|\pi\| < \delta$. 易见, 可构造 $[a,b]$ 的分割 $\pi$, 使得 $\pi$ 是 $\pi'$ 通过添加 $[a,b]-[\alpha,\beta]$ 中的分点得到, 且 $\|\pi\| < \delta$, 则

$$\sum_{\pi'} \omega_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_{\pi} \omega_i \cdot \Delta x_i < \varepsilon$$

由定理 3(3) 知, $f$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积.

(2) 用定理 3(3) 很容易证明, 留作习题.

**注** 如果 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g$ 与 $f$ 只在有限个点不同值, 则 $g$ 亦可积, 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$(习题).

**定理 4 (可积函数)** (1) 若 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(2) 若 $f$ 只在 $[a,b]$ 中有限个点处不连续, 则 $f$ 可积.

(3) 若 $f$ 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 $f$ 可积.

(4) 若 $f, g$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f \cdot g$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

(5) 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, $a \leq \varphi(t) \geq b, \forall t \in [\alpha,\beta]$, 则 $f \circ \varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上仍可积.

**证明** (1) 若 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f$ 在 $[a,b]$ 上一致连续. 因此, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists$ $\delta>0$, 使得当 $x,y\in[a,b]$, $|y-x|<\delta$ 时

$$|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

取 $[a,b]$ 的分割 $\pi$, 使得 $\|\pi\|<\delta$, 则

$$\omega_i=\sup_{y,x\in[x_{i-1},x_i]}|f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

$\forall\ i=1,2,\cdots,n$, 此时

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\cdot\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a)=\varepsilon$$

由定理 3(3) 知 $f$ 可积.

(2) 我们用定理 3(5) 来证明. $\forall\ \varepsilon>0$, $\eta>0$, 设 $\bar{x}_k$ $(k=1,\cdots,m)$ 为 $f$ 的不连续点, 取 $0<\rho<\dfrac{\eta}{2m}$, 使得 $(\bar{x}_k-\rho,\bar{x}_k+\rho)$, $k=1,\cdots,m$ 互不相交. 去掉这些区间后, $[a,b]$ 剩下的部分由有限个闭区间组成, 且 $f$ 在这些闭区间上连续. 根据 (1) 的证明, 可以取这些闭区间的分割, 使得 $f$ 在小区间上振幅小于 $\varepsilon$. 这些分割连同 $(\bar{x}_k-\rho,\bar{x}_k+\rho)$, $k=1,\cdots,m$ 组成了 $[a,b]$ 的分割. 对于此分割, 有

$$\sum_{\omega_i\geq\varepsilon}\Delta x_i\leq\sum_{k=1}^{m}2\rho=2m\rho<\eta$$

由定理 3(5) 知 $f$ 可积.

(3) 设 $f$ 为 $[a,b]$ 上单调函数, 不妨设 $f$ 单调不减, $\forall\ \varepsilon>0$, 取 $[a,b]$ 的分割 $\pi$, 使得 $\|\pi\|<\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\cdot\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\cdot\Delta x_i\\ &< \sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\cdot\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}\\ &= (f(x_n)-f(x_0))\cdot\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}\\ &= (f(b)-f(a))\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}\leq\varepsilon\end{aligned}$$

由定理 3(3) 知 $f$ 可积.

(4) 若 $f,g$ 可积, 则 $f,g$ 有界. 因此, $\exists\, \mu>0$, 使得

$$|f(x)|\le M,\ |g(x)|\le M,\ \forall\, x\in[a,b],\ \forall\, \varepsilon>0,$$

由定理 3(3), $\exists\,[a,b]$ 的分割 $\pi_1$, $\pi_2$, 使得

$$\sum_{\pi_1}\omega_i(f)\cdot\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M+1},\qquad \sum_{\pi_2}\omega_i(g)\cdot\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M+1}$$

令 $\pi=\pi_1\cup\pi_2$, 如果 $[x_{i-1},x_i]$ 为 $\pi$ 中一个小区间, 则

$$\begin{aligned}
\omega_i(f\cdot g) &= \sup_{x'x''\in[x_{i-1},x_i]}|f(x')\cdot g(x')-f(x'')\cdot g(x'')|\\
&\le \sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}\big[|g(x')|\cdot|f(x')-f(x'')|+|f(x'')|\cdot|g(x')-g(x'')|\big]\\
&\le M\cdot(\omega_i(f)+\omega_i(g))
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
\sum_{\pi}\omega_i(f\cdot g)\cdot\Delta x_i &\le M\cdot\sum_{\pi}(\omega_i(f)+\omega_i(g))\cdot\Delta x_i\\
&= M\cdot\sum_{\pi}\omega_i(f)\cdot\Delta x_i+M\cdot\sum_{\pi}\omega_i(g)\cdot\Delta x_i\\
&\le M\cdot\sum_{\pi_1}\omega_i(f)\cdot\Delta x_i+M\cdot\sum_{\pi_2}\omega_i(g)\cdot\Delta x_i \qquad \text{(why?)}\\
&< M\cdot\frac{\varepsilon}{2M+1}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2m+1}\\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

由定理 3(3) 知 $f\cdot g$ 可积.

(5) 因为 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故一致连续, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 当 $x,y\in[a,b]$, $|x-y|<\delta$ 时, $|f(x)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}$. 因为 $\varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积, 由定理 3(5), $\exists$ $[\alpha,\beta]$ 的分割 $\pi$ : $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_m=\beta$, 使得

$$\sum_{\omega_i(\varphi)\ge\delta}\Delta t_i<\frac{\varepsilon}{4M+1}$$

其中 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i &= \sum_{\omega_i(\varphi)\geq\delta}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i+\sum_{\omega_i(\varphi)<\delta}\omega_i(f\circ\varphi)\cdot\Delta t_i\\ &\leq 2M\cdot\sum_{\omega_i(\varphi)\geq\delta}\Delta t_i+\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\cdot\sum_{\omega_i(\varphi)<\delta}\Delta t_i\\ &\leq 2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M+1}+\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\cdot(\beta-\alpha)<\varepsilon\end{aligned}$$

由定理 3(3), $f\circ\varphi$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积.

**例子** (1) 计算积分 $\displaystyle\int_a^b c\mathrm{d}x$, 其中 $c$ 为常数.

(2) 计算积分 $\displaystyle\int_0^1 a^x\mathrm{d}x(a>0)$.

(3) 计算积分 $\displaystyle\int_a^b x^\mu\mathrm{d}x$, $(0<a<b$, $\mu$ 为实数).

**解** (1), (2), (3) 中被积函数都是连续的, 故可积. 为了计算积分, 只要选择适当的区间分割, 然后取极限即可.

(1) 对任意分割 $\pi:\ a\leftarrow x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}c\cdot\Delta x_i=c\cdot(b-a)$$

从而

$$\int_a^b c\cdot\mathrm{d}x=c\cdot(b-a).$$

(2) 取 $[0,1]$ 的分割 $\pi:\ 0\leq x_0<x_1<\cdots<x_n=1$, 使得 $x_i=\dfrac{i}{n}$, $i=0,\cdots,n$, 则 $\|\pi\|=\dfrac{1}{n}\to 0(n\to+\infty)$. 从而

$$\begin{aligned}\int_0^1 a^x\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot a^{\frac{i-1}{n}}\qquad(\text{取}\xi_i=\frac{i-1}{n})\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{a-1}{a^{\frac{1}{n}}-1}=\frac{a-1}{\log a}.\end{aligned}$$

(3) 取 $[a,b]$ 的分割 $\pi:\ a<a\cdot q<a\cdot q^2<\cdots<aq^{n-1}<aq^n=b$, 这里 $q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}>1$. 因为

$$\Delta x_i=a\cdot q^i-a\cdot q^{i-1}=a\cdot q^{i-1}(q-1)<b\cdot(q-1)$$

当 $n \to \infty$ 时, $q \to 1$, 故 $\|\pi\| \to 0$. 从而

$$\begin{aligned}\int_a^b x^\mu \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \sum_{=1}^{n} (a \cdot q^{i-1})^\mu \cdot (a \cdot q^i - a \cdot q^{i-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} a^{\mu+1} \cdot (q-1) \cdot \sum_{i=1}^{n} (q^{\mu+1})^{i-1} \\ &= \begin{cases} \dfrac{b^{\mu+1} - a^{\mu+1}}{\mu+1}, & \mu \neq = -1, \\ \log b - \log a, & \mu = -1. \end{cases}\end{aligned}$$

## §2 Riemann 积分的性质

为了方便, 我们约定

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \quad a < b, \\ &\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

**定理 1** 设 $f, g$ 在 $[a, b]$ 上可积, $\lambda$, $\mu \in \mathbb{R}$, 则 $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \mu \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $f$ 在 $[a, b]$ 上可积, $c \in (a, b)$, 则 $f$ 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** (1) $\forall\, \varepsilon > 0$, 由 $f, g$ 可积知, $\exists\, \delta > 0$, 当 $[a, b]$ 的分割 $\pi$ 满足 $\|\pi\| < \delta$ 时

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon, \quad \left| \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i) \cdot \delta x_i - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon,$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^{n}[\lambda\cdot f(\xi_i)+\mu\cdot g(\xi_i)]\cdot\Delta x_i-\left(\lambda\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\mu\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)\right|\\
&\le|\lambda|\cdot\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+|\mu|\cdot\left|\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\cdot\Delta x_i-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right|\\
&\le|\lambda|\cdot\varepsilon+|\mu|\cdot\varepsilon\\
&=(|\lambda|+|\mu|)\cdot\varepsilon
\end{aligned}$$

根据可积性及积分的定义知, $\lambda\cdot f+\mu\cdot g$ 可积, 且积分为

$$\lambda\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\mu\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 在前节已证 $f$ 在小区间上也可积. 设 $\pi_1$, $\pi_2$ 分别是 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 的分割, 当 $\|\pi_1\|\to 0$, $\|\pi_2\|\to 0$ 时, $\pi=\pi_1\cup\pi_2$ 满足 $\|\pi\|\to 0$. 于是

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \lim_{\substack{\|\pi_1\|\to 0\\ \|\pi_2\|\to 0}}\sum_{\pi_1\cup\pi_2}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\lim_{\|\pi_1\|\to 0}\sum_{\pi_1}f(\xi_i)\Delta x_i+\lim_{\|\pi_2\|\to 0}\sum_{\pi_2}f(\xi_i)\Delta x_i\\
&= \int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

**注** 如果 $a,b,c$ 属于 $f$ 的某可积区间, 则不论位置如何, (2) 中等式仍成立.

**定理 2** (1) 设 $f$ 为 $[a,b]$ 上非负可积函数, 则其积分非负;

(2) 如果 $f,g$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x)\ge g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 如果 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $|f(x)|$ 也可积, 且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\ge\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

**证明** (1) 如果 $f$ 非负可积, 则其部分和总是非负的, 从而积分非负.

(2) 由定理 1(1), $f-g$ 在 $[a,b]$ 上可积, 由 (1) 知

$$0\le\int_a^b(f-g)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ [a,b]$ 的分割 $\pi$ 满足

$$\sum_{\pi}\omega_i(f)\cdot\Delta x_i<\varepsilon$$

因为 $||f(x)|-|f(y)||\le|f(x)-f(y)|$, 故 $\omega_i(|f|)\le\omega_i(f)$, 从而

$$\sum_{\pi}\omega_i(|f|)\cdot\Delta x_i<\varepsilon$$

这说明 $|f|$ 可积, 因为

$$\left|\sum_{\pi}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\right|\le\sum_{\pi}|f(\xi_i)|\cdot\Delta x_i$$

取极限知

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

**习题** 如果 $f,g$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $\max\{f,g\}$ 及 $\min\{f,g\}$ 均可积 (提示: $\max\{f,g\}=\max\{f-g,0\}+g$).

**定理 3 (积分第一中值定理)** 设 $f,g$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $g(x)$ 不变号, 则存在 $\mu$, $\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)\le\mu\le\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x=\mu\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** 不失一般性, 可设 $g(x)\ge 0$. 则

$$\inf_{x\in[a,b]}f(x)\cdot g(x)\le f(x)\cdot g(x)\le\sup_{x\in[a,b]}f(x)\cdot g(x)$$

由定理 2 知

$$\inf_{x\in[a,b]}f(x)\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\le\sup_{x\in[a,b]}f(x)\cdot\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

上式说明, 如果 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x=0$, 此时定理当然成立. 不然, 令 $\mu=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$, 则

$$\inf_{x\in[a,b]}f(x)\le\mu\le\sup_{x\in[a,b]}f(x).$$

**注** (1) 当 $g(x) \equiv 1$ 时,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu \cdot (b-a).$$

(2) 如果 $f$ 连续, 则由介值定理, $\exists\, \xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = \mu$, 即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

**引理 1** 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

**证明** 由前节结论, $F$ 是有定义的. 因为 $f$ 可积, 故有界: $|f(x)| \le M, \forall\, x \in [a,b]$, 从而

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_a^y f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_x^y f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\le \int_x^y |f(t)|\mathrm{d}t \qquad (\text{无妨设} x \le y) \\ &\le M \cdot |y-x| \end{aligned}$$

上式对 $\forall\, x, y \in [a,b]$ 成立, 即 $F$ 是 Lipschitz 函数, 当然连续.

**定理 4 (积分第二中值定理)** 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积.

(1) 如果 $g$ 在 $[a,b]$ 上单调减, 且 $g(x) \ge 0, \forall\, x \in [a,b]$, 则 $\exists\, \xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a) \cdot \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 如果 $g$ 在 $[a,b]$ 上单调增, 且 $g(x) \ge 0, \forall\, x \in [a,b]$, 则 $\exists\, \eta \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b) \cdot \int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 一般地, 如果 $g$ 为 $[a,b]$ 上单调函数, 则 $\exists\, \xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a) \cdot \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b) \cdot \int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

**证明** (1) 设 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. 由前面引理, $F$ 连续, 故达到最大值 $M$ 和最小值 $m$, 又 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 故有界. 设 $|f(x)|<L, \forall\, x\in[a,b]$. 因为 $g$ 单调减, 由前节结论, $g$ 可积. 从而 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,[a,b]$ 和分割 $\pi:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得

$$\sum_{\pi}\omega_i(g)\cdot\Delta x_i<\varepsilon$$

因此有

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\mathrm{d}x\\
&= \sum_{i-1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[g(x)-g(x_{i-1})]\cdot f(x)\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\cdot\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x\\
&\le \sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|g(x)-g(x_{i-1})|\cdot|f(x)|\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n g(x_{i-1})\cdot[F(x_i)-F(x_{i-1})]\\
&\le L\cdot\sum_{i=1}^n\omega_i(g)\cdot\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n-1}F(x_i)\cdot[g(x_{i-1}-g(x_i)]+F(b)\cdot g(x_{n-1})\\
&< L\cdot\varepsilon+M\cdot\sum_{i=1}^{n-1}[g(x_{i-1}-g(x_i)]+M\cdot g(x_{i-1})\\
&= L\cdot\varepsilon+M\cdot g(a).
\end{aligned}$$

对于 $-f(x)$, 上式成为 ($-F$ 的最大值是 $-m$)

$$\int_a^b(-f)\cdot g\mathrm{d}x<L\cdot\varepsilon-m\cdot g(a)$$

结合两个不等式, 得到

$$m\cdot g(a)-L\cdot\varepsilon<\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x<M\cdot g(a)+L\cdot\varepsilon$$

令 $\varepsilon\to 0$, 有

$$m\cdot g(a)\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le M\cdot g(a)$$

如果 $g(a)=0$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$. 不然,

$$m\le\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(a)}\le M$$

由介值定理, $\exists\ \xi \in [a,b]$ 使得 $F(\xi) = \dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{g(a)}$. 即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = F(\xi)\cdot g(a) = g(a)\cdot \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 令 $\tilde{F}(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$, 用类似 (1) 的办法得

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x)-g(x_i)]f(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n g(x_i)\cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x \\
&\le L\cdot \sum_{i=1}^n \omega_i(g)\cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(x_i)[\tilde{F}(x_{i-1}) - \tilde{F}(x_i)] \\
&< L\cdot\varepsilon + g(x_i)\cdot \tilde{F}(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{F}(x_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] \\
&< L\cdot\varepsilon + M\cdot g(x_1) + M\cdot \sum_{i=1}^{n-1} [g(x_{i+1}) - g(x_i)] \\
&= L\cdot\varepsilon + M\cdot g(b).
\end{aligned}$$

剩下的证明类似.

(3) 先设 $g$ 单调减, 令 $h(x) = g(x) - g(b)$, 则 $h$ 单调减, 且 $h \ge 0$. 由 (1), $\exists$ $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\cdot h(x)\mathrm{d}x = h(a)\cdot \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

将 $h(x) = g(x) - g(b)$ 代入上式, 化简即得欲证结论. $g$ 单调增的情况留作习题.

**注** (2) 可由 (1) 直接用变换 $t \to b + a - t$ 得到.

**例子** (1) 证明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = 0$.

(2) 证明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+p} \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x = 0$, 这里 $p$ 为固定正数.

**证明** (1) $x \in [0,1]$ 时, $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{1}{1+x} \le 1$, 故 $\dfrac{1}{2}x^n \le \dfrac{x^n}{1+x} \le x^n$,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^n\mathrm{d}x.$$

$n \to +\infty$ 时, 两边极限为 0. 本例也可以用第一中值公式证明.

(2) 由积分第一中值公式

$$\begin{aligned}\int_n^{n+p} \frac{\cos x}{x} \mathrm{d}x &= \cos \xi_n \cdot \int_n^{n+p} \frac{dx}{x} \\ &= \cos \xi_n \cdot \log(1 + \frac{p}{n})\end{aligned}$$

故 $n \to \infty$ 时极限为 0.

**例子** 设 $\beta > 0$, $b > a > 0$, 证明

$$\left| \int_a^b \frac{e^{-\beta x}}{x} \cdot \sin x \mathrm{d}x \right| < \frac{2}{a}.$$

**证明** 对 $y(x) = \dfrac{e^{-\beta x}}{x}$, $f(x) = \sin x$ 用积分第二中值公式, $\exists\, \xi \in [a,b]$, 使得

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{e^{-\beta x}}{x} \cdot \sin x \mathrm{d}x &= \frac{e^{-\beta a}}{a} \cdot \int_a^\xi \sin x \mathrm{d}x \\ &= \frac{e^{-\beta a}}{a}(\cos a - \cos \xi) \\ \Rightarrow \left| \int_a^b \frac{e^{-\beta x}}{x} \cdot \sin x \mathrm{d}x \right| &\leq 2\frac{e^{-\beta a}}{a} < \frac{2}{a}.\end{aligned}$$

**例** 证明 $\lim\limits_{A \to \infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ 存在 (积分第二中值公式).

## §3 微积分基本公式

**定理 1 (微积分基本定理)** 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且在 $x_0 \in [a,b]$ 连续, 则 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x_0$ 处可导, 且

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

**证明** $\forall\, \varepsilon > 0$, 因 $f$ 在 $x_0$ 连续, 故 $\exists\, \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$, $x \in [a,b]$ 时,

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| &= \left|\frac{\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t}{x-x_0}-f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{\displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t-\int_{x_0}^{x} f(x_0)\mathrm{d}t}{x-x_0}\right| \\
&= \left|\frac{\displaystyle\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\mathrm{d}t}{x-x_0}\right| \\
&\le \frac{|\displaystyle\int_{x_0}^x |f(t)-f(x))||}{|x-x_0|}<\frac{\varepsilon\cdot|x-x_0|}{|x-x_0|}=\varepsilon
\end{aligned}$$

由导数定义知, $F(x)$ 在 $x_0$ 处可导, 且

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

**推论 1** 如果 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可微且 $F'(x)=f(x)$.

**注记** 类似地, 考虑 $\tilde{F}(x)=\displaystyle\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$, 有 $\tilde{F}'(x)=-f(x)$.

**推论 2** 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, $u(x):(c,d)\to\mathbb{R}$ 与 $v(x):(c,d)\to\mathbb{R}$ 可导, $a\le u(x)\le b$, $a\le v(x)\le b$, 则

$$\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)=f(u(x))\cdot u'(x)-f(v(x))\cdot v'(x).$$

**证明** 应用复合函数求导的链规则, 有

$$\begin{aligned}
\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' &= \left(\int_a^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' \\
&= \left(\int_a^u f(t)\mathrm{d}t\right)'\Bigg|_{h=u(x)}\cdot u'(x)-\left(\int_a^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)'\Bigg|_{v=v(x)}\cdot v'(x) \\
&= f(u(x))\cdot u'(x)-f(v(x))\cdot v'(x).
\end{aligned}$$

**例子** 设 $F(x)=\int_{-x}^{2x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, 求 $F'(x)$ 及 $F'(0)$.

**解** 在 $t=0$ 处定义 $\frac{\sin t}{t}$ 为 1, 此时 $\frac{\sin t}{t}$ 为 $\mathbb{R}$ 上连续函数. 由上述推论

$$F'(x)=\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot 2-\frac{\sin(-x)}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}(\sin x+\sin 2x)$$

$x=0$ 时, $F'(0)=1+2=3$.

**定理 2 (Newton-Leibniz 公式)** 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续, $F$ 为 $f$ 在 $[a,b]$ 上任一原函数, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

(此式又写为 $\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)|b_a)$.

**证明** 由推论 1, $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为 $f$ 的一个原函数, 因而存在常数 $c$, 使得

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$$

从而

$$\begin{aligned}F(b)-F(a) &= \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t+C\right)-\left(\int_a^a f(t)\mathrm{d}t+C\right)\\ &= \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

**注** 这个公式又称为微积分基本公式, 它把微分和积分完美地联系在了一起, 它的高维推广是流形上的 Stokes 积分公式.

**例 1** 计算下列积分

$$(1)\int_a^b x^\mu\mathrm{d}x\ (b>0,\ a>0,\ \mu\in\mathbb{R});\quad (2)\ \int_a^b\sin x\mathrm{d}x;\quad (3)\ \int_a^b e^x\mathrm{d}x.$$

**解** (1) 当 $\mu\neq=-1$ 时 $(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1})'=x^\mu$, 从而

$$\int_a^b x^\mu\mathrm{d}x=\left.\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right|_a^b=\frac{1}{\mu+1}[b^{\mu+1}-a^{\mu+1}]$$

当 $\mu=-1$ 时, $(\log x)'=x^\mu$, 从而

$$\int_a^b x^\mu \mathrm{d}x=\log x\Big|_a^b=\log b-\log a.$$

(2) $(-\cos x)'=\sin x\Rightarrow\int_a^b \sin x\mathrm{d}x=(-\cos x)\Big|_a^b=\cos a-\cos b.$

(3) $(e^x)'=e^x\Rightarrow\int_a^b e^x\mathrm{d}x=e^x\Big|_a^b=e^b-e^a.$

**例 2** 设 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续可导, $f(a)=0$, 则

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leq\frac{(b-a)^2}{2}\cdot\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

**证** 我们来估计 $f^2(x)$:

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= (f(x)-f(a))^2=\left[\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2\\
&\leq \int_a^x[f'(t)]^2\mathrm{d}t\cdot\int_a^x 1^2\mathrm{d}t \qquad (\text{Cauchy}-\text{Schwarz})\\
&\leq (x-a)\cdot\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x\\
\Rightarrow\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x &\leq \int_a^b(x-a)\cdot\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\
&= \int_a^b\cdot[f'(t)]^2\mathrm{d}t\cdot\frac{(x-a)^2}{2}\Big|_a^b\\
&= \frac{(b-a)^2}{2}\cdot\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

**定理 3 (换元法)** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导, 且 $\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b],\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

**证明** 因为 $f$ 连续, 由微积分基本定理, $f$ 有原函数 $F$, 即 $F'(x)=f(x)$, 故

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t).$$

再由 Newton-Leibniz 公式,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta [F(\varphi(t))]'\mathrm{d}t\\ &= F(\varphi(t))|_\alpha^\beta\\ &= F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))\\ &= F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

**定理** 2 (**分部积分**) 设 $u(x)$, $v(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续可导函数, 则

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\mathrm{d}x.$$

**证明**

$$\begin{aligned}&\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\mathrm{d}x+\int_a^b u'(x)\cdot v(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_a^b (u(x)\cdot v'(x)+u'(x)\cdot v(x))\mathrm{d}x\\ &=\int_a^b (u\cdot v)'(x)\mathrm{d}x\\ &=u(x)\cdot v(x)|_a^b \qquad (\text{Newton}-\text{Leibniz})\end{aligned}$$

**例 3** 求下列积分

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{t\cdot\sin 2t^2}{1+\sin t^2}\mathrm{d}t$; (2) $\displaystyle\int_a^{2a}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\mathrm{d}x(a>0)$; (3) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

**解** (1) 因为

$$t\cdot\sin 2t^2 = 2t\sin t^2\cdot\cos t^2 = \sin t^2\cdot(\sin t^2)',$$

故令 $x=\sin t^2$, 有

$$\text{积分}=\int_0^1\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=[x-\log(1+x)]\Big|_0^1=1-\log 2.$$

(2) 令 $x=\dfrac{a}{\cos t}$, 当 $x$ 从 $a$ 到 $2a$ 时, $t$ 从 0 到 $\dfrac{\pi}{3}$,

$$\text{积分}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{a^2}\sin^2 t\cdot\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{3a^2}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$$

(3) 记

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

对后一积分令 $x=\pi-t$, 有

$$
\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\sin t}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t \\
\Rightarrow I &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t = \pi(-\mathrm{arctg}(\cos t)]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}
$$

**思考题** 计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$. $(\frac{\pi}{8}\log 2)$.

**例 4** 计算积分

$$
I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\mathrm{d}x, \quad J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\mathrm{d}x, \quad (m\in\mathbb{N}).
$$

**解** 用分部积分法:$I_0=\pi/2$, $I_1=(-\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$. $m\geq 2$ 时

$$
\begin{aligned}
I_m &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\mathrm{x} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\mathrm{d}\cos x \\
&= (-\sin^{m-1} x(\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(m-1)\sin^{m-2} x\cdot\cos^2 x\cdot\mathrm{d}x \\
&= (m-1)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}x \\
&= (m-1)I_{m-2} - (m-1)\cdot I_m
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow I_m = \dfrac{m-1}{m}\cdot I_{m-2}$. 因此

$$
\begin{aligned}
&I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\cdot I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{2n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.
\end{aligned}
$$

利用变换 $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ 知 $J_m=I_m$.

**注** 由上可得到 $\frac{\pi}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}]^2\cdot\frac{1}{2n+1}$. 事实上

$$\begin{aligned}
x\in[0,\frac{\pi}{2}] &\to \sin^{2n+1}x\le\sin^{2n}x\le\sin^{2n-1}x\\
&\Rightarrow I_{2n+1}\le I_{2n}\le I_{2n-1}\\
&\Rightarrow \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\le\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\le\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\\
&\Rightarrow \frac{1}{2n+1}[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}]^2\le\frac{\pi}{2}\le[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}]^2\frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

两端之差小于 $\frac{1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}$, 故极限存在且为 $\frac{\pi}{2}$.

**例 5** 设 $f$ 为连续函数, 周期为 $T$. 则 $\forall\ a\in\mathbb{R}$, 有

$$\int_b^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

**证**

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int^T 0f(x)+\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x.$$

最后的一项通过变换 $x=t+T$ 成为

$$\int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

**注** $f$ 可积时上式仍成立 (习题).

最后, 给出的另一应用: 带积分型余项的 Taylor 公式. 为此设 $f$ 在 $x_0$ 的邻域内有直到 $n+1$ 阶的连续导数. 因为

$$\Big[(x-t)^n\cdot f^{(n)}(t)+n\cdot(x-t)^{n-1}\cdot f^{(n-1)}(t)+\cdots+n!f(t)\Big]'=(x-t)^n\cdot f^{(n+1)}(t)$$

故

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^x(x-t)^n\cdot f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t &= \Big[(x-t)^nf^{(n)}(t)+n\cdot(x-t)^{n-1}\cdot f^{(n-1)}(t)+\cdots+n!\cdot f(t)\Big]\Big|_{x_0}^x\\
&= n!\left\{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n]\right\}
\end{aligned}$$

即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t$$

由于 $(x-t)^n$ 在 $(x_0,x)$(或 $(x,x_0)$) 上不变号, 由积分第一中值公式, $\exists\ 0<\theta<1$ 使得 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$ 满足

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\cdot\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

此即 Taylor 公式之 Lagrange 型余项.