第七章　定积分的应用和推广

§7.1　定积分的应用

§7.1.1　曲线的长度

设 $I=[a,b]$ 为区间, 映射 $\sigma: I\to\mathbb{R}^2$ 用分量表示为

$$\sigma(t)=(x(t),y(t)),\ \ t\in I.$$

如果 $x(t)$, $y(t)$ 均为连续函数, 则称 σ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的连续曲线. 如果 $x(t)$, $y(t)$ 均可微 (连续可微), 则称 σ 为可微 (连续可微) 曲线.

设 σ 为连续可微曲线, 通过分割曲线并用直线段长度之和作逼近, 我们可以定义 σ 的长度为

$$L(\sigma)=\int_a^b[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{\frac{1}{2}}dt.$$

例 7.1.1. 求摆线

$$(x,y)=(a(t-\sin t),a(1-\cos t)),\ \ a>0$$

一拱的长度.

解 我们求 $t\in[0,2\pi]$ 时曲线的长度

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{2\pi}[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{\frac{1}{2}}dt\\
&= \int_0^{2\pi}a[(1-\cos t)^2+\sin^2 t]^{\frac{1}{2}}dt\\
&= 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=8a.
\end{aligned}$$

需要注意的是, 曲线也可以由别的参数给出, 例如极坐标.

§7.1.2　简单图形的面积

(**1**) 如果 $f>0$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 则由 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ 与 $y=0$ 围成的曲边梯形的面积为

$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$

一般地, 当 f 变号时, 上式仍有意义, 称为代数面积和, 而

$$S=\int_a^b|f(x)|dx$$

才是所围面积之和. 更一般地, 由 $y=f_2(x)$, $y=f_1(x)$ $(f_2\ge f_1)$ 以及 $x=a$, $x=b$ 围成的图形的面积为

$$S=\int_a^b |f_2(x)-f_1(x)|dx.$$

(**2**) 设 σ 为平面曲线, 由极坐标方程

$$r=r(\theta),\quad \theta\in[\alpha,\beta]$$

给出, 其中 $r(\theta)$ 关于 θ 连续, $\beta-\alpha\le 2\pi$. 则由 σ, $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 所围成的图形面积为

$$S=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^m \frac{1}{2}r^2(\xi)\cdot\Delta\theta_i=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta.$$

(**3**) 如果曲线 σ 由 $\sigma(t)=(x(t),y(t))$, $t\in[a,b]$ 给出, 则 σ 与 $x=a$, $x=b$ 以及 $y=0$ 围成的图形的面积为

$$S=\int_a^b |y(t)x'(t)|dt.$$

如果 σ 除在 $t=a,b$ 处以外无自交点, 则 σ 本身围成的图形的面积为

$$S=|\int_a^b y(t)x'(t)dt|=|\int_a^b x(t)y'(t)dt|.$$

例 7.1.2. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的面积.

解 由图形的对称性, 有

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx \\ &= 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,a\cos t dt \\ &= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\pi ab. \end{aligned}$$

例 7.1.3. 求双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 所围成的面积.

解 由图形的对称性, 有

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2(\theta)d\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta=a^2.$$

(**4**) 旋转曲面的面积.

设 σ 为平面曲线

$$\sigma(t)=(x(t),y(t)),\quad t\in[a,b],\ y(t)\ge 0.$$

σ 绕 x 轴旋转所得曲面的面积为

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\|\pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y(\xi)[(x'(\xi))^2 + (y'(\xi))^2]^{\frac{1}{2}} \Delta t_i \\ &= \int_a^b 2\pi y(t)[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

例 7.1.4. 求将 $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ $(0 < a \le b)$ 绕 x 轴旋转所得曲面的面积.

解 曲线的参数方程为

$$x(t) = a\cos t,\ y(t) = b + a\sin t,\quad t \in [0, 2\pi].$$

故旋转曲面面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} 2\pi(b + a\sin t)[a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t]^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 2\pi a \int_0^{2\pi} (b + a\sin t)dt = 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$

§7.1.3 简单立体的体积

(**1**) 平行截面之间的立体体积

设 Ω 为 $\mathbb{R}^3$ 中一块立体区域, 夹在平面 $x = a$ 与 $x = b$ $(a < b)$ 之间. 记 $S(x)$ 为 $x \in [a, b]$ 处垂直于 x 轴的平面截 Ω 的截面面积函数. 如果 $S(x)$ 关于 x 连续, 则 Ω 的体积为

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

特别地, 如果两块区域 Ω_A 和 Ω_B 的截面面积函数相等, 则其体积相同. 这个事实在公元 5 到 6 世纪由祖暅 (祖冲之之子) 所发现, 17 世纪时意大利人 Cavalieri 也发现了这一事实.

例 7.1.5. 求椭球体 $d\frac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的体积.

解 固定 $x \in (-a, a)$, 截面为椭圆面

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = (1 - \frac{x^2}{a^2}),$$

其面积为

$$S(x) = \pi b(1 - \frac{x^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} c(1 - \frac{x^2}{a^2})^{\frac{1}{2}} = \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2}).$$

故椭球的体积为

$$V = \int_{-a}^{a} S(x)dx = \int_{-a}^{a} \pi bc(1 - \frac{x^2}{a^2})dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

(**2**) 旋转体的体积.

设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数, Ω 是由平面图形

$$\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ 0\le |y|\le |f(x)|\}$$

绕 x 轴旋转一周所得旋转体. 则在 $x\in[a,b]$ 处的截面为圆盘, 其面积为

$$S(x)\pi f(x)^2.$$

因此 Ω 的体积为

$$V=\int_a^b S(x)dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

例 7.1.6. 求高为 h, 底半径为 r 的圆锥体的体积.

解 由上面的体积公式, 有

$$V=\pi\int_0^h(\frac{r}{h}x)^2dx=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

§7.1.4 物理应用举例

(**1**) 考虑空气阻力的自由落体运动.

质量为 m 的物体在重力作用下自由下落, 下落时所受空气阻力与下落速度成正比, 比例常数为 k, 则由牛顿定律,

$$mg-kv=m\frac{dv}{dt},$$

其中, g 为重力加速度, v 为物体的速度, 我们选择指向地心的坐标. 上面的方程等价于

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{k}{m}t}v)=ge^{\frac{k}{m}t},$$

假设初速度为零, 则

$$e^{\frac{k}{m}t}v=g\int_0^t e^{\frac{k}{m}s}ds=\frac{mg}{k}(e^{\frac{k}{m}t}-1),$$

即

$$v(t)=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t}).$$

特别地, $t\to\infty$ 时 $v(t)\to\dfrac{mg}{k}$, 即速度不会增加到无限大.

(**2**) 第二宇宙速度.

从地球表面发射火箭, 如果要求火箭无限飞离地球, 问: 火箭的初速度至少为多大?

根据万有引力定律, 在距地心 x 处火箭所受地球引力为

$$F = GMmx^{-2},$$

其中, G 为万有引力常数, M 为地球质量, m 为火箭质量. 在地球表面, 有

$$GMmR^{-2} = mg,$$

其中 R 为地球半径. 火箭从地面升到距地心 r $(r > R)$ 处需要做的功为

$$\int_R^r GMmx^{-2}dx = \int_R^r mgR^2x^{-2}dx = mgR^2(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}).$$

因此, 火箭无限飞离地球需要做功

$$W = \lim_{r\to\infty} mgR^2(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}) = mgR.$$

由能量守恒原理, 火箭的初速度至少为 v_0, 则

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR,$$

因而

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 9.81(m/s^2) \times 6.371 \times 10^6 m} \approx 11.2\,(km/s)$$

(**3**) 缆绳的工作原理

绳索在日常生活中应用十分广泛, 例如在码头上经常用来系住船舶. 为什么绳索能拉住大型船舶? 下面我们就来作一个力学分析, 它揭示了绳索产生巨大拉力的原理.

设一段绳索缠绕在一圆柱体上, 绳索一端施以拉力 f, 绳索与圆柱体之间的摩擦系数为 k, 如果绳索共绕了 n 圈, 在绳索的另一端产生的拉力为 F, 我们来求 F 的值.

取长度为 $\Delta\theta$ 的一小段绳索, 研究其受力状况. 设这一段绳索承受圆柱体的正压力为 ΔN, 则摩擦力为 $k\Delta N$. 这一段绳索两端所受拉力分别为 $F, F + \Delta F$, 则考虑沿圆柱体外法向和切向这两个方向绳索的受力, 得到方程

$$\begin{cases} \Delta N = (F + \Delta F)\sin\dfrac{\Delta\theta}{2} + F\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}, \\ (F + \Delta F)\cos\dfrac{\Delta\theta}{2} = F\cos\dfrac{\Delta\theta}{2} + k\Delta N. \end{cases}$$

令 $\Delta\theta \to 0$, 得

$$\frac{dF}{d\theta} = kF,$$

利用积分解得

$$F(\theta) = f \cdot e^{k\theta}.$$

当 $\theta = 2n\pi$ 时, $F = f \cdot e^{2kn\pi}$. 例如, 设摩擦系数 $k = \dfrac{1}{4}$, $n = 6$, $f = 10kg$, 则 $F > 80000kg$.

§7.1.5 进一步应用的例子

(**1**) 近似计算

我们回忆一下, 设 f 为 $[a,b]$ 上的二次连续可微函数, 则由 Taylor 展开的应用可以证明,

$$|f(x)-l(x)| \le \frac{1}{2}M(x-a)(b-x), \quad x\in[a,b],$$

其中, $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$, 且

$$l(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a), \quad x\in[a,b].$$

由此我们得到如下的积分估计

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b l(x)dx\right| \le \frac{1}{2}M\int_a^b (x-a)(b-x)dx=\frac{1}{12}M(b-a)^2.$$

这就是 f 在 $[a,b]$ 上的积分用梯形面积逼近的误差公式.

我们考虑函数 $f=\log x$ 在 $[1,n]$ 上的积分. 令

$$\begin{aligned}
A_n &= \int_1^n \log x dx = x\log x|_1^n-\int_1^n dx = n\log n-n+1,\\
B_n &= \frac{1}{2}(\log 1+\log 2)+\frac{1}{2}(\log 2+\log 3)+\cdots+\frac{1}{2}(\log(n-1)+\log n)\\
&= \log n!-\frac{1}{2}\log n,
\end{aligned}$$

根据上面的估计, 有

$$\left|\int_k^{k+1}\log x dx-\frac{1}{2}(\log k+\log(k+1))\right| \le \frac{1}{12}\frac{1}{k^2}.$$

令 $C_n=A_n-B_n$, 由 f 为凸函数知 $C_n>0$, C_n 关于 n 是递增的. 从而

$$0<C_n<\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}<\frac{1}{12}(1+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}))=\frac{1}{6},$$

这说明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}C_n=C$ 存在, 且

$$\begin{aligned}
0<C-C_n &< \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}\\
&< \frac{1}{12}[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots]=\frac{1}{12}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}).
\end{aligned}$$

下面我们来求极限 C 的值. 由定义, 有

$$C_n=A_n-B_n=n\log n-n+1-\log n!+\frac{1}{2}\log n,$$

因此

$$n! = e^{1-C_n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

由 Wallis 公式,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi},$$

把 $n!$ 和 $(2n)!$ 的表达式代入, 有

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2(1-C_n)} n^{2n+1} e^{-2n}}{e^{1-C_{2n}} (2n)^{(2n+\frac{1}{2})}} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}} = \frac{e^{1-c}}{\sqrt{2}},$$

这就得到 $n!$ 的如下表示

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, (\frac{n}{e})^n\, e^{C-C_n}, \qquad (\text{ Stirling 公式}),$$

其中

$$1 < e^{C-C_n} < e^{\frac{1}{12}(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n})} < 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{10n^2}, \quad (n > 1).$$

(**2**) π 为什么为无理数.

历史上, 第一个被发现的无理数是 $\sqrt{2}$, 这是毕达哥拉斯学派发现的, 这个发现在当时引起了很大的恐慌. 1761 年, J. Lambert 证明了 π 为无理数. 1947 年, 由 I. Niven 给出了 π 为无理数的一个简单证明, 下面我们给出的证明基本上就是 Niven 提出的.

证明用的是反证法. 假设 π 为有理数, $\pi = \frac{a}{b}$, a, b 为互素正整数. 令

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n, \quad x \in [0, \pi],$$

其中 n 为待定正整数. 我们有

(1) $f(x) = f(\pi - x)$, $x \in [0, \pi]$;

(2) $f^{(k)}(0)$ 为整数, $k = 1, 2, \ldots, 2n$;

(3) $f^{(k)}(\pi)$ 为整数, $k = 1, 2, \ldots, 2n$.

令

$$F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$

则显然有

$$F''(x) + F(x) = f(x),$$

因此

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = [F'(x) \sin x - F(x) \cos x]\Big|_0^{\pi} = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}.$$

另一方面, 在 $(0,\pi)$ 上 $0<f(x)\le \frac{1}{n!}(\pi a)^n$, 因此

$$\begin{aligned} 1\le \int_0^\pi f(x)\sin x dx &\le \int_0^\pi f(x)\,dx \\ &\le \frac{(\pi a)^n}{n!}\int_0^\pi dx \to 0, \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

这就得到了一个矛盾.

§7.2 广义积分

在前一章中, 我们在闭区间上研究了有界函数的 Riemann 积分. 一个自然的问题就是, 对于一般的区间以及对于无界的函数, 如何定义积分? 我们在前一节计算第二宇宙速度时, 曾经用到取极限的办法, 得到了区间 $[R,+\infty)$ 上的积分. 我们来看另一个例子, 这个例子中涉及的函数不是有界的. 事实上, 考虑 $(0,1]$ 区间上的函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, 这是一个连续函数, 其图像 $y=f(x)$ 和直线 $x=0$, $x=1$ 以及 $y=0$ 围成的区域虽然无界, 但其面积却是有界的. 下面我们就把这些例子推广到一般的情形.

定义7.2.1 (无穷积分). *设 $a\in\mathbb{R}$, 定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数 f 如果在任何有限区间 $[a,A]$ 上都是 Riemann 可积的, 且极限*

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx$$

存在 (且有限), 则称无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 存在或收敛, 记为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx,$$

否则就称无穷积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 不存在或发散.

类似地, 我们也可以定义无穷积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$, 以及 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. 并且 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛当且仅当 $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 均收敛, 此时

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^a f(x)\,dx+\int_a^{+\infty} f(x)\,dx,\quad \forall\ a\in\mathbb{R}.$$

需要注意的是, 利用极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^A f(x)\,dx$$

也可以定义 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一种积分, 它和前一种定义不是等价的, 称为 Cauchy 主值积分, 记为

$$(V.P.)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

从无穷积分的定义立即得到如下的基本判别法:

(无穷积分的 Cauchy 准则) $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的积分收敛 $\Leftrightarrow$ 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $M=M(\varepsilon)$, 使得当 $B>A>M$ 时,

$$\left|\int_A^B f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

对于 $(-\infty,a]$ 和 $(-\infty,+\infty)$ 上的无穷积分有完全类似的判别法.

例 7.2.1. 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$ $(p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

解 当 $A>1$ 时,

$$\int_1^A \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases}\log A, & p=1,\\ \frac{1}{1-p}(A^{1-p}-1), & p\neq 1.\end{cases}$$

因此只有 $p>1$ 时积分才是收敛的, 此时

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{1-p}(A^{1-p}-1) = \frac{1}{p-1}.$$

一般地, 如果连续函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上存在原函数 F, 则由微积分基本公式,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} F(A)-F(a),$$

即积分收敛与否和极限 $\lim_{A\to+\infty}F(A)$ 是否存在是一致的.

例 7.2.2. 计算无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$.

解 $\frac{1}{1+x^2}$ 的原函数为 $\arctan x$, 因此

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx+\int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \arctan x|_{-\infty}^0+\arctan x|_0^{+\infty}\\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.\end{aligned}$$

和无穷积分类似, 我们也可以通过极限来处理无界函数的积分.

定义7.2.2 (瑕积分). 设函数 f 在任何区间 $[a',b]$ $(a < a' < b)$ 上均 *Riemann* 可积, 如果极限

$$\lim_{a'\to a}\int_{a'}^{b} f(x)\,dx$$

存在（且有限）, 则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 存在或收敛, 记为

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{a'\to a}\int_{a'}^{b} f(x)\,dx$$

否则就称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 不存在或发散.

不难看出, 如果 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则 f 的瑕积分等于其 Riemann 积分. 如果 f 在 a 附近无界, 或在 $[a,b]$ 上不是 Riemann 可积的, 则称 a 为 f 的瑕点. 类似地, 可以在 $[a,b)$ 上定义瑕积分, 当瑕点不只一个时也可类似地定义瑕积分, 瑕积分的收敛性仍有类似的 Cauchy 准则判别法.

如果一个函数既是无界的, 定义域又是无界区间, 则把上面两种积分, 即无穷积分和瑕积分的处理方法结合起来往往可以对于这种函数的积分加以处理, 得到的积分统称广义积分.

例 7.2.3. 讨论积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ $(p\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

解 当 $0 < a < 1$ 时,

$$\int_a^1 \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} -\log a, & p = 1, \\ \frac{1}{1-p}(1-a^{1-p}), & p \neq 1. \end{cases}$$

因此只有 $p < 1$ 时积分才是收敛的, 此时

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to 0}\frac{1}{1-p}(1-a^{1-p}) = \frac{1}{1-p}.$$

例 7.2.4. 计算积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

解 被积函数有两个瑕点 ± 1. 我们有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= \arcsin x|_{-1}^0 + \arcsin x|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

广义积分具有和 Riemann 积分类似的性质, 一些运算法则, 例如分部积分, 变量代换等也可以直接推广过来.

命题 7.2.1. 假设积分限 a, b, c 等可以取 $-\infty$ 或 $+\infty$, 则

(1) 如果 f 在 $[a,b]$, $[b,c]$ 上积分存在, 则 f 在 $[a,c]$ 上的积分也存在, 且

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx;$$

(2) 如果 f, g 在 $[a,b]$ 上积分存在, 则 $\lambda f + \mu g$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ 在 $[a,b]$ 上的积分也存在, 且

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx;$$

例 7.2.5. 计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$.

解 利用 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\log x = 0$ 得

$$\int_0^1 \log x\,dx = x\log x\big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}\,dx = 1.$$

例 7.2.6. 讨论积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$ 的敛散性.

解 只要讨论被积函数在 $[1,+\infty)$ 上的积分就可以了. 作变量代换 $x = \sqrt{t}$, 得

$$\int_1^{+\infty} \cos x^2\,dx \frac{1}{2} = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt.$$

我们利用分部积分和 Cauchy 准则来判断积分的收敛性:

$$\begin{aligned}\left|\int_A^B \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt\right| &= \left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\Big|_A^B + \frac{1}{2}\int_A^B \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt\right| \\ &\le \frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{1}{2}\int_A^B t^{-\frac{3}{2}}\,dt = \frac{2}{\sqrt{A}} \to 0, \quad (B > A \to +\infty).\end{aligned}$$

这说明积分是收敛的.

这个例子也告诉我们, f 在 $[a,+\infty)$ 上的积分存在并不意味着 $f(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$.

§7.3 广义积分的收敛判别法

在前一节我们知道可以用 Cauchy 准则来判断广义积分的敛散性. 下面我们进一步介绍其它的判别法, 首先研究非负函数. 我们注意到, 如果 f 非负, 则积分 $\displaystyle\int_a^A f(x)\,dx$ 关于 A 单调递增, 因此其极限存在当且仅当它有上界, 这就得到了非负函数广义积分的如下基本判别法:

定理 7.3.1. 设 $f \geq 0$, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛当且仅当 $F(A) = \int_a^A f(x)\,dx$ 是 $A \in [a, +\infty)$ 的有界函数; 对瑕积分有完全类似的结果.

由此又得到如下的比较判别法:

定理 7.3.2. 设 $0 \leq f \leq M \cdot g$, $M > 0$ 为常数, 则当无穷积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛时, 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 也收敛; 当无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散时, 无穷积分 $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 也发散; 瑕积分有完全类似的结果.

证明. 令

$$F(A) = \int_a^A f(x)\,dx, \quad G(A) = \int_a^A g(x)\,dx,$$

则 $0 \leq F(A) \leq M \cdot G(A)$, $A \in [a, +\infty)$. 因此, 如果 $G(A)$ 有界, 则 $F(A)$ 也有界; $F(A)$ 无界时, $G(A)$ 也无界. □

注. (1) 常数 M 的存在性通常利用极限去找. 如果极限

$$l = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

存在, 则当 $0 < l < \infty$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 同时收敛或发散; 当 $l = 0$ 时, 如果 $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 也收敛; 当 $l = +\infty$ 时, 如果 $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 发散, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 也发散.

(2) 我们可以拿函数 f 与 $\frac{1}{x^p}$ 比较, 则得到如下的 Cauchy 判别法:

(i) 如果 $p > 1$, 且存在常数 $C > 0$, 使得当 x 充分大时

$$f(x) \leq \frac{C}{x^p}, \quad x \geq x_0,$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛;

(ii) 如果 $p \leq 1$, 且存在常数 $C > 0$, 使得当 x 充分大时

$$f(x) \geq \frac{C}{x^p}, \quad x \geq x_0,$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散;

当然, 常数 C 通常是求极限得到的, 即如果极限

$$\lim_{x \to +\infty} x^p f(x) = l$$

存在, 则

(iii) 如果 $p>1$, $0\le l<+\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛;

(iv) 如果 $p\le 1$, $0<l\le+\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散;

例 7.3.1. 判别积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ 的敛散性.

解 因为

$$0\le \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\le x^{-2},\quad x\ge 1,$$

故积分是收敛的.

例 7.3.2. 判别积分 $\int_1^{+\infty} x^a e^{-x}\,dx$ $(a\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{x\to+\infty} x^2x^ae^{-x}=0,\qquad (\text{ L'Hospital 法则})$$

故积分收敛.

例 7.3.3. 判别积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+\log x)}\,dx$ 的敛散性.

解 在 $[e,+\infty)$ 上, 有

$$\int_e^A \frac{1}{x\log x}\,dx=\log\log x\Big|_e^A=\log\log A\to+\infty,\quad (A\to+\infty)$$

而且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\log x}{x(1+\log x)}=1,$$

故积分 $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(1+\log x)}\,dx$ 发散, 从而原积分也发散.

对于一般函数的广义积分, 有时可以化为非负函数的积分来判断是否收敛. 记

$$f^+(x)=\max\{0,f(x)\},\quad f^-(x)=\max\{0,-f(x)\},$$

则 f^+ 和 f^- 均为非负函数, 且 $f=f^+-f^-$. 因此, 如果 f^+ 和 f^- 的积分均收敛, 则 f 的积分也收敛, 此时称 f 的积分**绝对收敛**, 这和 $|f|=f^++f^-$ 的积分收敛是等价的. 如果 f 的积分收敛, 但 $|f|$ 的积分发散, 则称 f 的积分**条件收敛**.

例 7.3.4. 判别积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx$ $(p>1)$ 的敛散性.

解 因为

$$\left|\frac{\cos x}{x^p}\right|\le x^{-p},\quad x\ge 1$$

故积分是绝对收敛的.

例 7.3.5. 判别积分 $\int_1^{+\infty} \cos x^p \, dx$ $(p > 1)$ 的敛散性.

解 利用变量代换 $x = t^{\frac{1}{p}}$ 以及前面例子中的办法 (Cauchy 准则), 不难看出积分是收敛的. 但是

$$|\cos x^p| \geq \cos^2 x^p = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x^p),$$

因此 $\cos x^p$ 在 $[1, +\infty)$ 上的积分是条件收敛的.

对于不是绝对收敛的广义积分, 利用第二积分中值公式可以给出下面的判别法:

定理 7.3.3 (Abel)**.** 如果广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ 收敛, 函数 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调有界, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) \, dx$ 也收敛.

证明. 因为 g 有界, 可设

$$|g(x)| \leq C, \quad \forall\, x \in [a, +\infty).$$

又因为 f 积分收敛, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 使得当 $A, B > M$ 时

$$\left| \int_A^B f(x) \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2C}$$

由积分第二中值定理,

$$\begin{aligned} \left| \int_A^B f(x)g(x) \, dx \right| &= \left| g(A) \int_A^\xi f(x) \, dx + g(B) \int_\xi^B f(x) \, dx \right| \\ &\leq C \left| \int_A^\xi f(x) \, dx \right| + C \left| \int_\xi^B f(x) \, dx \right| \\ &\leq C \frac{\varepsilon}{2C} + C \frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon. \end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) \, dx$ 收敛. □

定理 7.3.4 (Dirichlet)**.** 设 $F(A) = \int_a^A f(x) \, dx$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界, 函数 $g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) \, dx$ 收敛.

证明. 设 $|F(A)| \leq C$, $A \geq a$. 则

$$\left| \int_A^B f(x) \, dx \right| \leq 2C, \quad \forall\, A, B \geq a.$$

又因为 $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $M>0$, 使得当 $x>M$ 时

$$|g(x)|\le\frac{\varepsilon}{4C}.$$

由积分第二中值定理, 当 $A,B>M$ 时

$$\begin{aligned}\left|\int_A^B f(x)g(x)\,dx\right| &= \left|g(A)\int_A^\xi f(x)\,dx+g(B)\int_\xi^B f(x)\,dx\right|\\ &\le \frac{\varepsilon}{4C}\left|\int_A^\xi f(x)\,dx\right|+\frac{\varepsilon}{4C}\left|\int_\xi^B f(x)\,dx\right|\\ &\le \frac{\varepsilon}{4C}2C+\frac{\varepsilon}{4C}2C=\varepsilon.\end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛. □

这些判别法对于瑕积分也有完全类似的表达形式, 我们不再赘述.

例 7.3.6. 判断积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\,dx$ $(0<p<2)$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{x\to+0} x^{p-1}\frac{\sin x}{x^p}=1,$$

而当 $p<2$ 时 x^{p-1} 在 $(0,1]$ 上收敛, 故我们只要判断 $\frac{\sin x}{x^p}$ 在 $[1,+\infty)$ 上的敛散性即可. 由于积分 $\int_1^A \sin x\,dx$ 显然有界, 而 $\frac{1}{x^p}$ $(p>0)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调趋于零, 故由 Dirichlet 判别法知原积分是收敛的. 请读者自行证明, 当 $1<p<2$ 时积分是绝对收敛的, 当 $0<p\le 1$ 时, 积分是条件收敛的.

例 7.3.7. 判断积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\arctan x\,dx$ $(p>0)$ 的敛散性.

解 令 $f(x)=\frac{\sin x}{x^p}$, $g(x)=\arctan x$, 则 f 在 $[1,+\infty)$ 上的积分收敛, 而 g 在 $[1,+\infty)$ 上单调有界, 故由 Abel 判别法知原积分收敛.

§7.4 广义积分的几个例子

我们计算几个广义积分作为示例.

例 7.4.1. 计算积分 $I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ (n 为非负整数).

解 当 $n=0$ 时,

$$I_0=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx=-e^{-x}\big|_0^{+\infty}=1,$$

当 $n \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = -e^{-x}x^n|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx \\ &= n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx = nI_{n-1}, \end{aligned}$$

因此

$$I_n = n!, \quad n \geq 0.$$

例 7.4.2. **计算积分** $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$ $(n \geq 1)$.

解 当 $n = 1$ 时,

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx \\ &= I_{n-1} + \int_0^{+\infty} \frac{-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx \\ &= I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}|_0^{+\infty} - \frac{1}{2(n-1)}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}\,dx \\ &= \frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}. \end{aligned}$$

因此

$$I_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}, \quad n \geq 1.$$

例 7.4.3. **计算积分** $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ (*Euler-Poisson* **积分**).

解 由 Taylor 展开易见

$$e^t \geq 1+t, \quad \forall\ t \in \mathbb{R},$$

因此

$$1-x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall\ x > 0.$$

从而得到如下的积分估计

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx < \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx,$$

上式左边利用变量代换 $x = \sin t$, 中间利用变量代换 $x = \dfrac{t}{\sqrt{n}}$, 右边利用上面的例子, 最后得到

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!},$$

利用 Wallis 公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2(2n+1)}$$

和数列极限的夹逼定理可得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 7.4.4. 计算积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\, dx$. (*Euler* 积分)

解 作变量代换 $x = 2t$, 得

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin 2t\, dt = \frac{\pi}{2}\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin t\, dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos t\, dt,$$

在上式最后的积分中作变量代换 $t = \frac{\pi}{2} - s$, 得

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin 2t\, dt = \frac{\pi}{2}\log 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin t\, dt + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log\sin s\, ds,$$

即

$$I = \frac{\pi}{2}\log 2 + 2I,$$

因此 $I = -\frac{\pi}{2}\log 2$.

象 Riemann 积分一样, 广义积分有时也可以看成某种部分和的极限.

命题 7.4.1. 设函数 f 在 $(0,b]$ 上是单调递减的, 则

$$\int_0^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}b);$$

类似地, 如果函数 f 在 $[0,b)$ 上是单调递增的, 则

$$\int_0^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k-1}{n}b);$$

证明. 当 f 在 $(0,b]$ 上单调递减时, 不妨设 $f \geq 0$ (不然考虑 $f(x) - f(b)$), 则有估计

$$\frac{b}{n}f(\frac{k+1}{n}b) \leq \int_{\frac{k}{n}b}^{\frac{k+1}{n}b} f(x)\, dx \leq \frac{b}{n}f(\frac{k}{n}b),$$

因此有

$$\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}b) \le \int_0^b f(x)\,dx$$

以及

$$\int_{\frac{b}{n}}^{b} f(x)\,dx \le \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}b) \le \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}b),$$

当 $\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx$ 收敛时, 由数列极限的夹逼定理知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}b)$ 存在且等于积分 $\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx$. 反之, 如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}b)$ 存在, 则积分 $\displaystyle\int_{\frac{b}{n}}^{b} f(x)\,dx$ 有上界, 因而收敛, 因此也得到欲证极限等式.

当 函数 f 在 $[0,b)$ 上单调递增时, 证明是完全类似的, 略. □

同理, 无穷积分有时也可以转化为极限, 这种极限要用到无穷求和, 这是下一章的内容.