第八章　数项级数

在研究 Taylor 展开时, 我们遇到过级数的收敛问题. 这一章和下一章我们就来处理这样的问题.

§1　级数收敛与发散的概念

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为一列实数, 形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为无穷级数, a_n 称为通项或一般项, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$ 称为第 n 个部分和.

如果 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在且有限, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

否则就称级数 $\sum_{n=1}^{n} a_n$ 发散.

级数收敛的必要条件： $\sum_{n=1}^{n} a_n$ 收敛 $\Rightarrow$ 通项 $a_n \to 0 (n \to \infty)$. 这是因为

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0 \qquad (n \to \infty).$$

级数收敛的充要条件 (Cauchy **准则**)： $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N = N(\epsilon)$, 当 $n > N$ 时

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon,\ \forall\ p \geq 1.$$

这时因为

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} = S_{n+p} - S_n,$$

对数列 $\{S_n\}$ 用 Cauchy 收敛准则即可.

例 1　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ 的敛散性.

解

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1,\ (n \to \infty)$$

故级数收敛.

例 2　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的敛散性.

解　$n > 1$ 时, $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. 与例 1 类似, 有

$$0 < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} \to 0,\ (n \to \infty).$$

由 Cauchy 准则, 级数收敛 (事实上其和为 $\frac{\pi^2}{6}$).

例 3　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的敛散性 (调和级数).

解　$\forall\, n \geq 1$, 有

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

由 Cauchy 准则, 级数发散.

例 4　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ 的敛散性.

解　利用等式

$$\sin(n+1) = \sin n \cdot \cos 1 + \cos n \cdot \sin 1$$

知, 如果级数收敛, 则 $\sin n \to 0 (n \to \infty)$, 从而 $\cos n \to 0 (n \to \infty)$. 但

$$\sin^2 n + \cos^2 n \equiv 1.$$

从而原级数发散.

例 5 $q>0$, 则当 $q<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛, $q \geq 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 发散 (几何级数).

证明

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} q^k = q\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \to \frac{q}{1-q},\ (0<q<1).$$

$q\geq 1$ 时, $q^n \not\to 0$, 故发散.

命题 (1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)$ 也收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)=\lambda\cdot\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\mu\cdot\sum_{n=1}^{\infty} b_n,\ (\lambda,\mu\in\mathbb{R}).$$

(2) 级数的敛散性与其有限项的值无关.

§2 正项级数收敛与发散的判别法

如果 $a_n>0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数. 此时, 部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_n$ 关于 n 是递增的. 因此有

(基本判别法) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有上界.

例 1 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\cdot(n+1)}$ 的敛散性.

解

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}\cdot(n+1)} &< \frac{2}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\cdot\sqrt{n+1}} \\
&= 2\cdot\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}} \\
&= 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

从而

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}\cdot(k+1)}<2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<2.$$

故原级数收敛.

定理 1 (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 如果 $\exists$ 常数 $M>0$, 使得

$$a_n \leq M \cdot b_n \tag{$*$}$$

则 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

证明 比较两级数的部分和并利用基本判别法即可.

注 (1) 条件 (*) 只要对充分大的 n 成立即可.

(2) (*) 也可改写为

$$\frac{a_n}{b_n} \leq M$$

M 的存在性通常用求极限的办法得到, 即如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda,$$

则有

(i) $0<\lambda+\infty$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;

(ii) $\lambda=0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; $\lambda=\infty$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(3) 另一个求 $\frac{a_n}{b_n}$ 上界的方法是利用单调性, 即如果

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad (\Leftrightarrow \ \frac{a_n}{b_n} \searrow)$$

则 (i)$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

(4) (Cauchy 判别法) 在定理 1 中取 $b_n = q^n$, 得到如下结果:

如果 n 充分大时, $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

如果存在无穷多个 n, 使得 $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

如果寻找 q ? 还是求极限比较方便: 设

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\lambda.$$

则 $\lambda<1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛; $\lambda>1$ 时, 级数发散 ($\lambda=1$ 时无法判别).

(5) (d'Alembert 判别法) 在 (3) 中取 $b_n=q^n$, 得如下结果:

如果 n 充分大时, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le q<1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

如果 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge 1$(对充分大的 n 成立), 则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.
当然, 还是求极限来寻找 q 比较容易. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lambda,$$

则 $\lambda<1$ 时级数收敛, $\lambda>1$ 时发散 ($\lambda=1$ 时无法判别).

例 2 判别 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right]$ 的敛散性.

解

$$0<\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right]/\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛.

例 3 设 $p\in\mathbb{R}$, 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{p}{n})^{n^2}$ 的敛散性.

解

$$\sqrt[n]{a_n}=(1-\frac{p}{n})^n\to e^{-p},$$

故 $p>0$ 时原级数收敛; $p<0$ 时发散. 显然, $p=0$ 时级数也发散.

例 4 $x\in\mathbb{R}$ 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n!\cdot(\frac{x}{n})^n$ 的敛散性.

解

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{x}{e},$$

故 $0 < x < e$ 时级数收敛; $x > e$ 时发散. $x = e$ 时,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = e/(1+\frac{1}{n})^n \geq 1,$$

故此时级数也发散.

在前面, 我们说明了 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 为发散级数, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛. 对于一般的实数 $a \in \mathbb{R}$, 如果判别 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \xi(a)$ 的敛散性? 这个问题可以用下面的办法解决.

定理 2 (积分判别法) 设 $f(x)$ 是定义在 $[1, +\infty)$ 上的非负单调下降函数, $a_n = f(n)$, $n = 1, 2, \cdots$. 令

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性与数列 $\{F(n)\}$ 的敛散性相同.

证明 因为 f 单调下降, 故当 $n \leq x \leq n+1$ 时

$$a_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = a_n,$$

这说明

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leq a_n,$$

从而

$$S_n \leq a_1 + F(n),$$
$$F(n) \leq S_{n-1}.$$

其中 $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 为部分和. 因为 S_n 及 $F(n)$ 都是单调增加的, 故二者同时有界或无界, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\{F(n)\}$ 同敛散.

例 5 设 $a \in \mathbb{R}$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ 的敛散性.

解　$a \le 0$ 时, 一般项 $\not\to 0$, 故级数发散. $a > 0$ 时, 考虑 $f(x) = \frac{1}{x^a}$, f 单调下降, 且

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-a}\mathrm{d}t = \begin{cases} \ln x, & a = 1 \\ \dfrac{1}{1-a}(x^{1-a} - 1), & a \ne 1 \end{cases}$$

故当 $0 < a \le 1$ 时, $F(x) \to +\infty(x \to +\infty)$; $a > 1$ 时, $F(x) \to \dfrac{1}{a-1}(x \to +\infty)$. 这说明 $a \le 1$ 时, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ 发散; $a > 1$ 时 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ 收敛.

例 6　判断 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(\log(n+1))^a}$ 的敛散性, $a \in \mathbb{R}$.

解　$a \le 0$ 时, 一般项 $\ge \dfrac{1}{n+1}$, 而 $\sum \dfrac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散. 下设 $a > 0$. 令

$$f(t) = \frac{1}{(1+t)(\log(1+t))^a},$$

f 单调下降, 且

$$F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{dt}{(1+t)(\log(1+t))^a} = \begin{cases} \log\log(1+x) - \log\log 2, & a = 1, \\ \dfrac{1}{1-a}\left[(\log(1+x))^{1-a} - \log 2^{1-a}\right], & a \ne 1, \end{cases}$$

因此 $a \le 1$ 时原级数发散; $a > 1$ 时收敛.

现在, 如果在比较判别法中令 $b_n = \dfrac{1}{n^a}$ 或 $\dfrac{1}{n \cdot \log n}$ 等, 就可以由此得到新的判别法. 不过, 我们这里介绍一个相当一般的判别法, 由此出发再得到两个新的判别法.

定理 3 (Kummer)　设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 如果 n 充分大时

(1) $\dfrac{1}{b_n} \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{b_{n+1}} \ge \lambda > 0$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) $\dfrac{1}{b_n} \cdot \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{b_{n+1}} \le 0$ 且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明　(1) 条件可写为

$$a_{n+1} \le \frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right),\ (n > N),$$

这说明

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &\le S_{N=1}+\frac{1}{\lambda}\sum_{k=N+2}^{n=1}\left(\frac{a_{k-1}}{b_{k-1}}-\frac{a_k}{b_k}\right)\\
&= S_{N+1}+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\\
&\le S_{N+1}+\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}.
\end{aligned}
$$

即 $\{S_n\}$ 有上界, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 由

$$\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}\le 0$$

知

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\le\frac{b_n}{b_{n+1}}$$

即 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 单调上升, 从而 a_n 不趋于零, 因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注 (1) 和前面一样, λ 的存在性用极限去判断较容易: 设

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}=\lambda,$$

则 $\lambda>0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; $\lambda<0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散;

(2) 取 $b_n=1$, 由 Kummer 判别法就得到了 d'Alembert 判别法.

(3) (Raabe) 取 $b_n=\dfrac{1}{n}$, 则得

(i) $n\cdot\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\ge\mu>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(ii) $n\cdot\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\le 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

Raabe 判别法当然也有极限形式 (略).

(4) (Gauss) 取 $b_n = \dfrac{1}{n\cdot\log n}$, 则得如下判别法: 假设

$$(*)\quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1+\frac{\theta}{n}+o(\frac{1}{n\cdot\log n}),$$

则 $\theta>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; $\theta\le 1$ 时级数发散.

事实上, 由 Raabe 判别法, 只要考虑 $\theta=1$ 的情形就可以了:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left\{n\cdot\log n[1+\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n\cdot\log n})]-(n+1)\cdot\log(n+1)\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}(n+1)\log\frac{n}{n+1}=-1<0.
\end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 故由 Kummer 判别法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

例 7 判别下列级数的敛散性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}\quad(\alpha>0);\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n_1)!!}{(2n)!!}\right)^s\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

解 (1) 因为

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty} n\cdot(\frac{\alpha+n+1}{n+1}-1)=\alpha,$$

故由 Raabe 判别法, $\alpha>1$ 时原级数收敛, $\alpha<1$ 时发散. $\alpha=1$ 时, $a_n=\dfrac{1}{n+1}$, 也发散.

(2) 因为

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= (\frac{2n+2}{2n+1})^s\cdot\frac{2n+3}{2n+1}=(1+\frac{1}{2n+1})^s\cdot(1+\frac{2}{2n+1})\\
&= (1+\frac{s}{2n+1}+O(\frac{1}{n^2}))(1+\frac{2}{2n+1})\\
&= 1+\frac{s+2}{2n+1}+O(\frac{1}{n^2})\\
&= 1+\frac{(s+2)/2}{n}+O(\frac{1}{n^2})
\end{aligned}$$

由 Gauss 判别法, 当 $s>0$ 时原级数收敛; $s\le 0$ 时发散.

§3 一般级数收敛与发散判别法

在 Taylor 公式那一章中我们曾得到如下等式:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1},$$
$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}.$$

上面两个级数的特点是正负项交替出现, 我们把这样的数称为交错级数.

定理 1 (Leibniz) 设 a_n 单调下降趋于 0, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

证明 我们利用 Cauchy 准则来证明. 考虑 $S_{n+p}-S_n$:

$$\begin{aligned} S_{n+p}-S_n &= (-1)^n\cdot a_{n+1}+(-1)^{n+1}a_{n+2}+\cdots+(-1)^{n+p-1}a_{n+p+1} \\ \Rightarrow (-1)^n(S_{n+p}-S_n) &= a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}-a_{n+4}+\cdots+(-1)^{p-1}a_{n+p+1} \end{aligned}$$

当 $p=2k-1$ 时,

$$\begin{aligned} (-1)^n(S_{n+p}-S_n) &= (a_{n+1}-a_{n+2})+(a_{n+3}-a_{n+4})+\cdots+(a_{n+2k-1}-a_{n+2k})\geq 0 \\ (-1)^n(S_{n+p}-S_n) &= a_{n+1}-(a_{n+2}-a_{n+3})-(a_{n+4}-a_{n+5})-\cdots\leq a_{n+1} \end{aligned}$$

因此

$$|S_{n+p}-S_n|\leq a_{n+1}\to 0,\ (n\to\infty)\quad (*)$$

当 $p=2k$ 时, 类似地可证上式仍成立. 因此原级数收敛.

注 在 (*) 中令 $p\to\infty$ 得

$$|S-S_n|\leq a_{n+1},$$

其中 $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, 这是交错级数的误差估计.

例 1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛 ($\because \frac{1}{\sqrt{n}}\searrow 0$).

为了得到更一般的结果, 我们需要一个求和变换的技巧.

Abel 变换 设 a_i, b_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 为两组实数, 记

$$B_0=0,\ B_i=b_1+b_2+\cdots+b_i\ (1\le i\le m),$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_i &= \sum_{i=1}^{m}a_i(B_i-B_{i-1})\\ &= \sum_{i=1}^{n}a_i\cdot B_i-\sum_{i=1}^{m}a_i\cdot B_{i-1}\\ &= \sum_{i=1}^{m-1}a_i\cdot B_i+a_m\cdot B_m-\sum_{i=1}^{m-1}a_{i+1}\cdot B_i \qquad (\because B_0=0)\\ &= \sum_{i=1}^{m-1}(a_i-a_{i+1})\cdot B_i+a_m\cdot B_m.\end{aligned}$$

引理 2 (Abel) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为单调数列, 且 $|B_i|\le M$, $1\le i\le m$, 则

$$\left|\sum_{i=1}^{m}a_i\cdot b_i\right|\le M\cdot(|a_1|+2\cdot|a_m|).$$

证明 由 Abel 变换, 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{m}a_i\cdot b_i\right| &\le \left|\sum_{i=1}^{m-1}(a_i-a_{i+1})\cdot B_i\right|+|a_m\cdot B_m|\\ &\le M\cdot\sum_{i=1}^{m-1}|a_i-a_{i+1}|+M\cdot|a_m|\\ &= M\cdot|a_1-a_m|+M\cdot|a_m| \qquad (\because a_i\text{单调})\\ &\le M\cdot(|a_1|+2\cdot|a_m|).\end{aligned}$$

定理 3 (Dirichlet) 设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于 0, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和有界, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot b_n$ 收敛.

证明 由假设, $\exists\ M>0$ 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_i\right|\le M,\ \forall\ n\ge 1,$$

从而

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+k} b_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n+k} b_i - \sum_{i=1}^{n} b_i\right| \leq 2M.$$

由 Abel 引理,

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \cdot b_i\right| \leq 2M(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leq 6M \cdot |a_{n+1}| \to 0.$$

由 Cauchy 准则知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ 收敛.

定理 4 (Abel) 如果 $\{a_n\}$ 为单调有界数列, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ 收敛.

证明 $\{a_n\}$ 单调有界意味着极限 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 存在. 于是 $\{a_n - a\}$ 单调趋于 0. 由定理 3, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n$ 收敛. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a)b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot b_n$ 收敛.

例 2 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin nx$ 的敛散性.

解 $a_n = \frac{1}{n}$ 单调趋于 0, $b_n = \sin nx$, 利用

$$2\sin\frac{x}{2} \cdot \sin kx = \cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x$$

得

$$\sum_{k=1}^{n} b_n = \begin{cases} 0, \quad x = 2k\pi, \\ (\cos\frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x)/2\sin\frac{x}{2}, \quad \neq 2k\pi \end{cases}$$

即 b_n 的部分和总有界. 故由 Dirichlet 判别法, 原级数收敛.

例 3 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证明 $a_n = \frac{1}{n} \cdot (n \cdot a_n)$, 而 $\frac{1}{n}$ 单调趋于 0, $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n$ 收敛, 故由 Abel 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

对于更一般的级数, 没有普适的判别法, 但有时可以转化为正项级数予以处理.

定义 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛. (此时, 由于

$$|a_{n+1}+\cdot+a_{n+p}|\le|a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}|\to 0,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的确为收敛级数).

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛.

例 4 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}$ $(x\in\mathbb{R})$ 的敛散性.

解 令 $a_n=\frac{|x|^n}{n}$, 则 $\sqrt[n]{a_n}\to|x|$. 故 $|x|<1$ 时原级数绝对收敛; 而 $|x|>1$ 时显然发散. $x=1$ 时级数条件收敛; $x=-1$ 时级数发散.