第九章　函数项级数

在对函数作 Taylor 展开时, 自然就出现了以函数为一般项的无穷级数. 下面我们就来研究这种级数的敛散性.

§1　一致收敛

设 I 为区间, $\{g_n(x)\}$ 为 I 上一列函数. 如果存在 I 上函数 $g(x)$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x_0) = g(x_0),\ \forall\, x_0 \in I,$$

则称 $\{g_n\}$ 收敛于 g, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$.

例 1　$g_n(x) = x^n$, $x \in (0,1)$. 因为对任意固定的 $x_0 \in (0,1)$, 均有

$$\lim_{n\to\infty} x_0^n = 0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = 0$.

定义 (**一致收敛**)　如果任给 $\varepsilon > 0$, 均存在与 $x \in I$ 无关的正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon,\ \forall\, x \in I, \tag{$*$}$$

则称 $\{g_n\}$ 在 I 上一致收敛于 g, 记为 $g_n \rightrightarrows g$.

显然, 一致收敛 $\Rightarrow$ 收敛. 一致性体现在 (*) 式对于充分大的 n 和任意 x 均成立. 例 1 中 $\{g_n\}$ 不是一致收敛的 (why?).

例 2　设 $g_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1,1]$. 讨论 $\{g_n\}$ 的收敛性.

解　当 $0 < |x| \le 1$ 时

$$|g_n(x) - 0| = \frac{|x|}{|1+n^2x^2|} \le \frac{|x|}{2n|x|} = \frac{1}{2n},$$

上式对 $x = 0$ 也成立. 因此 $\{g_n\}$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 0.

定理 1　设 $\{g_n\}$ 在区间 I 上一致收敛于 g, 如果 g_n 均为连续函数, 则 g 也是连续函数.

证明 任取 $x_0 \in I$, 我们要证明 g 在 x_0 处连续. 任给 $\varepsilon > 0$, 由一致收敛定义, $\exists$ 正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n > N$ 时

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall\, x \in I.$$

取定 $n_0 = N + 1$, 由于 g_{n_0} 在 I 上连续, 故 $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得

$$|g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3},\ \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.$$

因此

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(x_0)| &\le |g(x) - g_{n_0}(x)| + |g_{n_0}(x) - g_{n_0}(x_0)| \\
&\quad + |g_{n_0}(x_0) - g(x_0)| \\
&\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I.
\end{aligned}$$

这说明 g 在 x_0 处是连续的.

由一致收敛定义可得如下判别法, 它不涉及极限 g 的具体形式:

(Cauchy 准则) 定义在 I 上的函数列 $\{g_n\}$ 一致收敛 $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N = N(\varepsilon)$, 使得当 $m, n > N$ 时

$$|g_m(x) - g_n(x)| < \varepsilon,\ \forall\, x \in I.$$

现在, 设 $\{f_n(x)\}$ 为一列函数, 考虑形式和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, 这种形式和称为函数项级数. 如果部分和 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ 收敛, 则称该函数项级数收敛; 如果 $S_n(x)$ 一致收敛, 则称该函数项级数一致收敛. 根据上面的讨论, 我们有:

(1) 如果 f_n 均为连续函数, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 也是连续函数;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛 $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N = N(\varepsilon)$, 使得 $n > N$ 时

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon,\ \forall\, x \in I,\ \forall\, p \ge 1.$$

例 3 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的收敛性质.

解 前一章已说明对 $\forall\, x \in [0, 2\pi]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 均收敛. 下面说明它不是一致收敛的. 事实上, 取 $x_n = \dfrac{\pi}{4n}$, 则

$$\begin{aligned} |S_{2n}(x_n) - S_n(x_n)| &= \left| \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{4n}}{n+1} + \cdots + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2n} \right| \\ &\geq n \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知收敛不是一致的.

有时, 函数项级数的收敛判别法可从数项级数的收敛判别法得到. 例如:

(1) 如果 $|f_n(x)| \leq a_n$, 而正项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛. 这是因为

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq a_{n+1} + \cdots + a_{n+p},$$

利用 Cauchy 准则即可.

(2) (Dirichlet) 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和 $B_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k(x)$ 一致有界, 即 $\exists\, M > 0$, 使得

$$|B_n(x)| \leq M,\ \forall\, x \in I,\ \forall n.$$

并且对每个 $x \in I$, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调, $a_n(x) \rightrightarrows 0$, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

(2) 的证明只要照搬数项级数中的相应证明即可.

(3) (Abel) 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 且对每个 $x \in I$, $\{a_n(x)\}$ 关于 n 单调, 且在 I 上一致有界, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

(3) 的证明仍然是 Abel 变换的运用 (注意和数项级数的不同之处):

$$|a_{n+1}(x)b_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+p}(x)b_{n+p}(x)| \leq 3 \sup |a_n| \cdot \sup_{1 \leq k \leq p} |b_{n+1}(x) + \cdots + b_{n+k}(x)|.$$

例 4 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 在 $x \in [0, 1]$ 上一致收敛.

证明 $a_n(x) = x^n$, $b_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ 关于 x 一致收敛. 而 $|a_n(x)| \le 1, \forall\, x$. 对固定的 x, $a_n(x) = x^n$ 关于 n 单调. 故由 Abel 判别法知原级数一致收敛.

命题 2 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ 一致收敛, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda f_n(x) + \mu \cdot g_n(x))$ 也一致收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda f_n(x) + \mu \cdot g_n(x)) = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) + \mu \cdot \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

证明 用一致收敛的定义即可.

定理 3 (Dini) 设 $g_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上非负连续函数, 且对每个 $x \in [a,b], b_n(x)$ 关于 n 单调趋于 0, 则 $g_n \rightrightarrows 0$.

证明 (反证法) 如果 g_n 不一致收敛于 0, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 以及

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

使得

$$g_{n_k}(x_{n_k}) \ge \varepsilon_0, \ k = 1, 2, \cdots.$$

其中 $x_{n_k} \in [a,b]$. 因为 $[a,b]$ 是闭区间, 故通过进一步取子列, 我们可以假设 $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$.

任给 m, 当 k 充分大时,

$$g_m(x_{n_k}) \ge g_{n_k}(x_{n_k}) \ge \varepsilon_0,$$

在上式中令 $k \to \infty$, 则由 g_m 的连续性, 有

$$g_m(x_0) \ge \varepsilon_0.$$

因为 m 是任取的, 令 $m \to \infty$, 则得到

$$\lim_{m\to\infty} g_m(x_0) \ge \varepsilon_0,$$

这和我们的假设相矛盾.

推论 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 为非负函数项级数, 如果此级数收敛于连续函数 f, 则必一致收敛于 f.

证明 考虑部分和 $S_n(x)$ 及连续函数列 $f(x) - S_n(x)$, 应用 Dini 定理即可.

§2　求和与求导、积分的可交换性

给定收敛的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, 我们下面关心的问题是能否逐项求积分以及逐项求导.

定理 1　(1) 设 $\{g_n\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 g. 如果 g_n 均为 Riemann 可积函数, 则 g 也是 Riemann 可积函数, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. 如果 f_n 均为 Riemann 可积函数, 则 f 也是 Riemanm 可积函数, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明　只要证明 (1) 即可. 我们仅就 g_n 均为连续函数这一简单情形加以证明. 此时 $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ 也是连续函数. 由一致收敛的条件知, $\forall\ \varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n > N$ 时

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in [a,b].$$

从而

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b (g_n(x) - g(x))\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_a^b (g_n(x) - g(x))\mathrm{d}x \\ &\leq (b-a)\varepsilon\end{aligned}$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

对于一般可积函数的情形的证明也是类似的.

注　由证明可以看出, (2) 中函数项级数还满足下面的一致收敛性

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

定理 2 设 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 且

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ 收敛;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ 一致收敛于 $g(x)$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x).$$

证明 由微积分基本公式,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t.$$

由条件 (2) 和上面的注记,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows \int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

再由条件 (1) 即知

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \rightrightarrows\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t.$$

从而

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) + \int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right)' \\ &= g(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).\end{aligned}$$

注 (1) 中点 a 可换成区间中其它任何一点.

§3 幂级数

形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ $(a_n \in \mathbb{R})$ 的函数项级数称为幂级数, 在 Taylor 展开那一章中我们已遇到过这样的级数. 为简单起见, 一般讨论 $x_0 = 0$ 的情形, 一般情形作变量代换 $t = x - x_0$ 即可.

引理 1 (Abel) 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1 (x_1 \neq 0)$ 处收敛, 则它在区间 $|x| < |x_1|$ 中绝对收敛; 如果在 $x = x_2$ 处发散, 则它在 $|x| > |x_2|$ 上发散.

证明 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x_1^n$ 收敛, 则存在 $M > 0$ 使得

$$|a_n \cdot x_1^n| \le M, \ \forall n \ge 1,$$

这说明

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot x_1^n| \cdot |\frac{x}{x_1}|^n \le M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |\frac{x}{x_1}|^n,$$

即当 $|x| < |x_1|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

注 从证明可以看出, 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1$ $(x_1 \neq 0)$ 处收敛, 则对任何闭区间 $I \subset (-|x_1|, |x_1|)$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 I 上都是一致收敛的.

定理 2 (Cauchy-Hadamard) 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 记

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

则

(1) $\rho = 0$ 时, 级数在 $(-\infty, \infty)$ 处绝对收敛;

(2) $\rho = +\infty$ 时, 级数仅在 $x = 0$ 处收敛;

(3) $0 < \rho < +\infty$ 时, 级数在 $(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho})$ 中绝对收敛, 在 $[-\frac{1}{p}, \frac{1}{\rho}]$ 之外发散. 此时, 称 $\frac{1}{\rho}$ 为收敛半径.

证明 因为

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|} = \rho \cdot |x|,$$

由数项级数的 Cauchy 判别法即得欲证结论证. 以 (3) 的后半部分为例 (反证法): 设 $x_1 \notin [-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}]$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛, 则存在 $M > 0$ 使得

$$\begin{aligned} & |a_n x_1^n| \leq M \\ \Rightarrow \quad & |a_n| \leq M \cdot |x_1|^{-n} \\ \Rightarrow \quad & \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq |x_1|^{-1} < \rho. \end{aligned}$$

这是矛盾!

注 (1) 在 $x = \pm\rho^{-1}$ 处级数的收敛性必须视情况具体讨论.

(2) $0 < \rho < +\infty$ 时, 对任意闭区间 $I \subset (-\rho^{-1}, \rho^{-1})$, 幂级数均在 I 上一致收敛.

例 1 几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. 其系数 $a_n = 1$, 故 $\rho = 1$. 在 $x = \pm 1$ 处显然发散.

例 2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$. 因此在 $x = 1$ 处发散; 在 $x = -1$ 处收敛 (交错级数).

例 3 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 收敛半径相同. 事实上, 如果

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

则

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \rho,$$

因此收敛半径相同.

定理 3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 收敛半径为 R, 则 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 在 $(-R, R)$ 内任意次可微, 且

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot (n-k+1) \cdot a_n \cdot x^{n-k}.$$

证明 以 $k=1$ 为例. 首先, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\cdot x^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot a_n\cdot x^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R, 故它在闭区间 $I\subset(-R,R)$ 内一致收敛. 由前节定理 2, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 I 内可微, 且

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot a_n\cdot x^{n-1}.$$

对于 $S(x)$ 的高阶可微性其证明和上面完全类似.

特别地, $S^{(n)}(0)=n!\cdot a_n$, 这说明 $S(x)$ 的 Taylor 展开就是该幂级数数本身.

例 4 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 之和.

解 在 $(-1,1)$ 内, 有

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}\\ \Rightarrow\quad&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=0+\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x),\ x\in(-1,1).\end{aligned}$$

注意到上式在 $x=-1$ 处也成立, 这不是偶然的现象.

定理 4 (Abel 连续性定理) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$ 的收敛半径为 $R\ (0<R<+\infty)$. 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 收敛, 则

$$\lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot R^n;$$

如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n$ 收敛, 则

$$\lim_{x\to R^+}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n.$$

证明 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cdot R^n$ 收敛, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot R^n(\frac{x}{R})^n$$

在 $[0,R]$ 上, $|(\frac{x}{R})^n|\le 1$, 且 $(\frac{x}{R})^n$ 关于 n 单调. 由 Abel 判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,R]$ 上一致收敛, 其和函数 $S(x)$ 在 $[0,R]$ 上连续, 因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S(R)=\lim_{x\to R^-}S(x)=\lim_{x\to R^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

关于 $-R$ 的证明完全类似 (或考虑 $\tilde{a}_n=(-1)^n\cdot a_n$).

例 5 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 之和.

解 考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$, 其收敛半径为 $(-1,1)$, 且在 $(-1,1)$ 内

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x(\frac{1}{1-x})'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\left.\frac{x}{(1-x)^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}=2.$$

例 6 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$ 之和.

解 考虑幂级数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$, 其收敛半径为 1, 且 $x=1$ 时级数收敛, 故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\lim_{x\to1^-}S(x),$$

在 $(-1,1)$ 内, 由于 $S(0)=0$,

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(\frac{x^{3n+1}}{3n+1})'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{3n}\frac{1}{1+x^3}$$

故由微积分基本公式,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\lim_{x\to1^-}S(x)=\lim_{x\to1^-}\int_0^x\frac{dt}{1+t^3}=\int_0^1\frac{dt}{1+t^3}=\frac{1}{3}(\log 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}).$$

定理 5 (逐项积分) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径 $R \neq 0$, 则 $\forall\, x \in (-R, R)$,

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

证 不妨设 $x > 0$, 则根据前面的讨论, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ 在 $t \in [0, x]$ 上一致收敛, 因此可以逐项积分.

注 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 则上面的等式对 $x = R$ 也成立. 对 $-R$ 有类似结果.

下面我们回顾一下 Taylor 展开. 如果 f 在 x_0 处任意次可导, 则 f 有 Taylor 展开

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

然而, 这个幂级数除 x_0 以外的点上很可能不收敛, 即使收敛, 其极限也未必就是 $f(x)$.

定理 6 设 $R > 0$, f 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上无限次可微. 如果存在 $M > 0$ 使得

$$|f^{(n)}(x)| \leq M^n, \quad \forall\, x \in (x_0 - R, x_0 + R), \quad \forall\, n \geq 1.$$

则

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,\ \forall\, x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

证明 由 Taylor 公式, $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ 时

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right| &= |R_n(x)| \\
&= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M^{n+1} \cdot R^{n+1}}{n+1)!} \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

因此

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{n!}(x - x_0).$$

这说明 f 的 Taylor 展开的确收敛到 f 自身.

例 7 考虑幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$, 其系数

$$a_n=\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$

由于 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|\to 1,\ \sqrt[n]{|a_n|}\to 1$, 故其收敛半径为 1.

记 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$, $x\in(-1,1)$. 在 $(-1,1)$ 上可以逐项求导, 故有

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= (1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\cdot n\cdot x^{n-1}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}n\binom{\alpha}{n}\cdot x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\binom{\alpha}{n}\cdot x^n\\ &= \binom{\alpha}{1}+\sum_{n=1}^{\infty}[n\cdot\binom{\alpha}{n}+(n+1)\cdot\binom{\alpha}{n+1}]x^n\\ &= \alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{n}x^n=\alpha\cdot f(x),\end{aligned}$$

这说明

$$[(1+x)^{-\alpha}\cdot f(x)]'=-\alpha\cdot(1+x)^{-\alpha-1}\cdot f(x)+(1+x)^{-\alpha}f'(x)=0,$$

从而

$$(1+x)^{-\alpha}\cdot f(x)\equiv c.$$

由 $f(0)=1$ 知 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $x\in(-1,1)$. 即

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\ x\in(-1,1).$$

特别地, 当 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 时得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot x^n,\ x\in(-1,1).$$

对此幂级数逐项积分, 得

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in(-1,1).$$

由于在式 $x=\pm1$ 右式处收敛 (“数项级数” 那一章 §2 例 7), 故上式在 $[-1,1]$ 上均成立, 并且在 $[-1,1]$ 上一致收敛. 代入 $x=\sin t$, 得

$$t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\sin^{2n+1}t}{2n+1},\ t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],$$

并且是一致收敛的 (Why?). 再次可逐项积分, 得

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{8}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)}!!\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\end{aligned}$$

由此容易得到下面的求和等式

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

例 8 求积分 $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$.

解

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n},\ x\in(-1,1].$$

上式在 $[0,1]$ 上一致收敛, 因此可逐项积分:

$$I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1x^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

§4 函数项级数补充材料

(1) 处处连续但无处可导的函数;

在数学分析微积分发展的早期, 人们猜测: 连续函数的不可导点至多只有可数个. 1872 年, Weierstrass 利用无穷级数的理论给出了一个反例:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cdot\sin(b^n\alpha), \qquad 0<a<1, \quad b>\frac{1}{a}.$$

这个函数处处连续但无处可导! 1930 年, Van Der Waerden 给出了更简单的例子, 下面我们讨论的例子基本上就是他举出来的.

用 $\varphi(x)$ 表示 x 与离它最近的整数之间的距离, 这是一个周期为 1 的连续函数,

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}, \\ 1-x, & \dfrac{1}{2}<x\le 1. \end{cases}$$

令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(4^n x)}{4^n},\ x\in\mathbb{R}.$$

因为 $0\le\varphi\le\dfrac{1}{2}$, 故上面的函数项级数在整个 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛, 从而 f 在 $(-\infty,\infty)$ 上处处连续.

下面我们说明 f 无处可导. 首先注意到 f 也是周期函数, $f(x)=f(x+1)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$. 我们只要说明 f 在 $[0,1)$ 中无处可导即可. 先以 $x_0=0$ 为例看一下. 取 $h_m=4^{-m}$, 则当 $n\le m-1$ 时, $\varphi(4^n h_m)=4^n h_m$; $n\ge m$ 时, $\varphi(4^n h_m)=0$. 因此

$$\frac{f(h_m)-f(0)}{h_m}=\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\varphi(4^n h_m)}{4^n\cdot h_m}=\sum_{n=0}^{m-1}1=m,\ m\ge 1.$$

因为 $h_m\to 0$ $(m\to\infty)$, 故上式表明 f 在 0 处不可导.

对于一般的 $x_0\in(0,1)$, 做法类似. 把 x_0 写成 4 进位无穷小数 (对于有限小数, 可在末尾添无穷个 0).

$$x_0=0\cdot x_1x_2x_3\cdots x_m\cdots$$

其中 x_m 可取 0,1,2,3. 我们这样选取 h_m:

$$h_m=\begin{cases} 4^{-m}, & \text{当 } x_m=0 \text{ 或 } 2; \\ -4^{-m}, & \text{当 } x_m=1 \text{ 或} 3. \end{cases}$$

注意到

$$
\begin{aligned}
4^n x_0 &= x_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1} \cdots x_m \cdots \\
4^n (x_0 + h_m) &= x_1 \cdots x_n \cdot x_{n+1} \cdots (x_m \pm 1) \cdots
\end{aligned}
$$

根据 h_m 的选取, $4^n x_0$ 和 $4^n(x_0+h_m)$ 同时属于 $[k, k+\frac{1}{2}]$ 或同时属于 $[h+\frac{1}{2}, h+1]$. 因此

$$
\begin{aligned}
&\varphi(4^n(x_0+h_m)) - \varphi(4^n x_0) = \pm 4^n \cdot h_m \\
&\frac{f(x_0+h_m)-f(x_0)}{h_m} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\varphi(4^n(x_0+h_m)-\varphi(4^n x_0))}{4^n \cdot h_m} + 0 = \sum_{n=0}^{m-1} \pm 1
\end{aligned}
$$

特别地, m 分别取奇数和偶数时, 上式右边也是奇数或偶数, 因此, $h_m \to 0$ $(m \to \infty)$, 但极限 $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{f(x_0+h_m)-f(x_0)}{h_m}$ 不存在. 因此 f 在 x_0 处不可导.

注 $\varepsilon - \delta$ 语言就是 Weierstrass 发明的. 今后在 "实变函数论" 中可学习到这样的事实: "大部分" 连续函数都是处处不可导的!

(2) 填满空间的曲线 (Peano 曲线)

1890 年,Peano 构造了连续曲线 $\sigma: I \to I^2, I = [0,1]$, 使得 $\sigma(I) = I^2$. 这和人们的直观想象大相径庭. 下面我们来给出一个例子, 这个例子 1938 年 Schoenberg 提出的.

考虑连续函数

$$
\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{3}], \\ 3t-1, & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 1, & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}
$$

将 φ 延拓为 $\mathbb{R}$ 上周期为 2 的偶函数:

$$
\varphi(t) = \varphi(t+2), \quad \varphi(t) = \varphi(-t),\ t \in \mathbb{R}.
$$

令

$$
\begin{cases} x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2n} t)}{2^n}, \\ y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(3^{2n+1} t)}{2^{n+1}}, \end{cases} \qquad t \in [0,1]
$$

因为 $0 \le \varphi \le 1$, 故上面的两个级数一致收敛, 从而 $x(t), y(t)$ 连续,

$$\sigma(t) = (x(t), y(t)) : I \to I \times I$$

为连续曲线.

可以证明:

(1) $\sigma(I) = I \times I$;

(2) $x(t), y(t)$ 无处可导.

注 (1) 类似地可构造填满 I^3 的连续曲线.

(2) 这些曲线具有某种自相似性, 即是一种分形.

(3) (思考题), 如果 σ 是 C^1 曲线, 则还能填满 I^2 吗?

(3) 光滑函数的 Taylor 展开的系数可以为任意实数列

设 $a_n \in \mathbb{R}$, $n \ge 0$, 令

$$\xi_n = n + \sum_{i=0}^{n} |a_i|$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \varphi(\xi_n x) \cdot x^n$$

其中 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为光滑函数, 且 $0 \le \varphi \le 1$,

$$\varphi(x) = 1, \quad \forall\, x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]; \quad \varphi(x) = 0, \quad |x| \ge 1.$$

由于当 $|x| \le \dfrac{1}{\xi_n}$ 时,

$$\left| \frac{a_n}{n!} \varphi(\xi_n x) \cdot x^n \right| \le \frac{|a_n|}{n!} |x|^n \le \frac{|a_n|}{n!} \frac{1}{(\xi_n)^n} \le \frac{1}{n!}, \quad n \ge 1$$

而 $|x| > \dfrac{1}{\xi_n}$ 时上式也成立, 故级数一致收敛, f 连续, 且 $f(0) = a_0$.

可以证明, f 是无穷次可导的, 且

$$f^{(n)}(0) = a_n, \qquad n \ge 1.$$

(*) φ 怎样构造: 先取

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

则 $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. 再取

$$h(x) = \frac{g(x)}{g(x) + g(1-x)}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

h 也是光滑函数. 最后, 令

$$\varphi(x) = \begin{cases} h(2x+2), & x \leq 0, \\ h(-2x+2), & x > 0. \end{cases}$$