

我们证明下面结果。

命题0.1. 设 n 为正整数, 对任意 $1 \leq i, j \leq n$, 我们有函数 $a_{ij}(x)$ 。定义

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

则有

$$D'(x) = D_1(x) + D_2(x) + \cdots + D_n(x)$$

这里 $D_i(x)$ 是用 $(a'_{i1}(x), \cdots, a'_{in}(x))$ 替换掉 $D(x)$ 的第 i 行所得的新的行列式。

Proof. 我们对 n 进行归纳。奠基步骤显然, 我们假设 $n-1$ 时结论成立, 下面考察 n 的情况。将 $D(x)$ 按第一行展开, 得到

$$D(x) = a_{11}(x)A_{11}(x) + \cdots + a_{1n}(x)A_{1n}(x)$$

从而

$$\begin{aligned} (1) \quad D'(x) &= a'_{11}(x)A_{11}(x) + \cdots + a'_{1n}(x)A_{1n}(x) + a_{11}(x)A'_{11}(x) + \cdots + a_{1n}(x)A'_{1n}(x) \\ &= D_1(x) + a_{11}(x)A'_{11}(x) + \cdots + a_{1n}(x)A'_{1n}(x) \end{aligned}$$

另一方面, 将 $D_2(x), \cdots, D_n(x)$ 都按第一行展开, 比较 $a_{11}(x), \cdots, a_{1n}(x)$ 的系数即得我们的等式。□

类似的, 我们有下面的结果。

命题0.2. 设 n 为正整数, 对任意 $1 \leq i, j \leq n$, 我们有函数 $a_{ij}(x)$ 。定义

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

则有

$$D'(x) = C_1(x) + C_2(x) + \cdots + C_n(x)$$

这里 $C_i(x)$ 是用 $(a'_{1i}(x), \cdots, a'_{ni}(x))^t$ 替换掉 $D(x)$ 的第 i 列所得的新的行列式。