

我们证明教材上定理5.2.2。我们只证明其中最困难的一步，其余部分的证明和教材定理5.2.1的证明类似。首先我们证明一个引理。

引理0.1. 设 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1} \lambda + b_n$$

则 b_k 为 A 的所有 k 阶主子式之和乘以 $(-1)^k$ ，即

$$b_k = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}$$

Proof. 令

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

则有

$$|A - \lambda B| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & \cdots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda b_{nn} \end{vmatrix}$$

将每一列都拆分为 A 的列减去另外一列，此行列式可拆为 2^n 个行列式之和。将拆分后每个行列式中含 $(-\lambda)$ 的列中提出 $(-\lambda)$ ，于是 $(-\lambda)^{n-k}$ 的系数就是将 $|A|$ 中所有可能的 $(n-k)$ 个列换成 B 的相应的 $(n-k)$ 个列所得的行列式相加。令 $B = E$ ， $|A|$ 中的 $(n-k)$ 个列换成 E 的相应的 $(n-k)$ 个列所得的行列式于是 A 的一个 k 阶主子式，所以 $|A - \lambda E|$ 的 $(-\lambda)^{n-k}$ 的系数就是 A 的所有 k 阶主子式之和。利用等式

$$|A - \lambda E| = (-1)^n |\lambda E - A|$$

我们得到引理的证明。 □

命题0.2. 设 A 为实对称矩阵，若 A 的各阶主子式非负，则 A 为半正定矩阵。

Proof. 考察 A 的顺序主子式

$$A_m = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

我们有

$$\begin{aligned}
 (1) \quad |\lambda E_m + A_m| &= \begin{vmatrix} \lambda + a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & \ddots & \\ a_{m1} & \cdots & \lambda + a_{mm} \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^m + b_1 \lambda^{m-1} + \cdots + b_m
 \end{aligned}$$

由引理，这里 b_i 是 A_m 的所有 i 阶主子式之和，从而 $b_i \geq 0$ 。所以对任意 $\lambda > 0$ ，我们都有

$$|\lambda E_m + A_m| \geq \lambda^m > 0$$

由正定矩阵的判别准则， $\lambda E + A$ 正定，利用极限立得 A 半正定。

□