$\mathbb{R}^2$ 上的奇性特征线

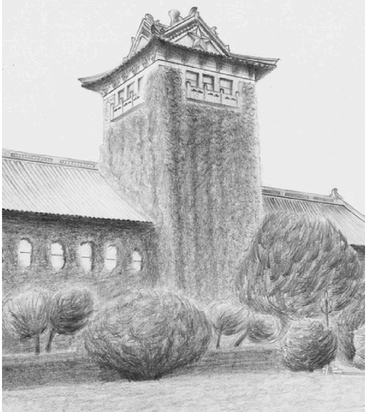
Joint work with Piermarco Cannarsa

程伟

南京大学

上海交通大学　上海

May 28, 2020



Hamilton-Jacobi 方程的奇性

粘性解的奇性问题

- 我们感兴趣的是下面的 Hamilton-Jacobi 方程

$$H(x,Du(x))=0,\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{HJ_s}$$

$$H(x,Du(x))=0,\quad x\in\Omega. \tag{$\mathrm{HJ}_{\mathrm{loc}}$}$$

  这里 $H(x,p)$ 为 C^1，且关于 p 严格凸。如果考虑如(HJ_s)的全局解，我们需要 H 为 Tonelli 型的，且(HJ_s)的右端为 Mañé 临界值。($\mathrm{HJ}_{\mathrm{loc}}$)中的 Ω 一般为有界连通开集。

- 若 u 是($\mathrm{HJ}_{\mathrm{loc}}$)的粘性解或($\mathrm{HJ}_s$)的弱 KAM 解，我们关心的问题是
  - u 的奇点集（或者更一般的 u 的割迹）上奇性局部和全局演化的规律是什么？
  - u 的奇点集和 u 的割迹结构如何？
  - 奇性以及它的演化对于 regular 的动力学有什么意义？

Hamilton-Jacobi 与 Hamilton

- 我们知道，Hamilton 动力系统来源于经典力学、天体力学、几何光学（包括量子力学）等诸多物理学科。Hamilton 系统具有辛结构的几何结构与 Lagrange-Hamilton 变分原理的变分结构。
- 所谓 Hamilton 系统是指这样的 $2n$ 维的常微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = H_p(x(s), p(s)), \\ \dot{p}(s) = -H_x(x(s), p(s)), \end{cases} \qquad s \in [0, t].$$

这个方程的物理意义是十分明确的：H 为系统的能量，x 为系统的质点的位置，p 为质点的动量，这是一组共轭变量。

- 从偏微分方程的特征理论来看，上面的 Hamilton-Jacobi 方程(HJ_s)的特征系统，即为上述 Hamilton 方程。

Lagrange 框架

- Hamilton 函数 H 的对偶为 Lagrange 函数 L，

$$L(t,x,v) = \sup_{p\in\mathbb{R}^n}\{\langle p,v\rangle - H(t,x,p)\}.$$

这是凸分析意义下的 Fenchel-Legendre 对偶。

- 根据解析力学或经典力学，我们知道：质点在力学系统中的动力学轨道 γ，恰为 $\int L(s,\gamma(s),\dot\gamma(s))ds$ 关于 γ 的所谓临界道路决定。这个也称作 Fermat 原理或 Lagrange 变分原理。这些临界道路满足所谓 Euler-Lagrange 方程，通过典则变换，就可以得到 Hamilton 方程。
- 具体的，假设 ϕ 为一初值函数，$x\in\mathbb{R}^n$，$t>0$，我们考虑如下变分问题：

$$u(t,x) := \inf_{\xi}\{\phi(\xi(0)) + \int_0^t L(s,\xi(s),\dot\xi(s))\,ds\}. \qquad (\mathrm{CV}_{t,x})$$

其中 $\xi(t)=x$，ξ 为绝对连续曲线。在经济学中我们常称 ϕ 为 initial cost，积分部分为 running cost。

value function 与粘性解

- 上面的函数 u 称作变分问题($\mathrm{CV}_{t,x}$)的value function。
- 我们有如下的动态规划原理：若 $t' < t$，则

$$u(t,x) \leqslant u(t',\xi(t')) + \int_{t'}^{t} L(s,\xi(s),\dot{\xi}(s))\,ds,$$

  并且上式等号成立当且仅当存在这样的极小曲线 ξ。
- 同时 u 满足所谓 Hamilton-Jacobi-Bellman-Issacs 方程

$$\begin{cases} D_t u(t,x) + H(t,x,D_x u(t,x)) = 0, \\ u(0,x) = \phi(x), \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0. \qquad \text{(HJB)}$$

- u 是上述方程的一种弱解，有别于通常分布意义下的弱解，我们称之为粘性解。

Lax-Oleinik 半群与弱 KAM 解

Lax-Oleinik 半群

任给 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 定义 $T_t\phi$ 与 $\breve{T}_t\phi$ 分别为负（正）型的 Lax-Oleinik 演化

$$\begin{aligned} T_t\phi(x) &= \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\{\phi(y)+A_t(y,x)\}, \\ \breve{T}_t\phi(x) &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\phi(y)-A_t(x,y)\}, \end{aligned} \qquad (x\in\mathbb{R}^n, t>0).$$

- 若 0 为 Mañé 临界值，我们称 u 为方程(HJ$_s$)的（负型）弱 KAM 解若 $T_tu=u$， $t\geqslant 0$。弱 KAM 解为粘性解。
- $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ 与 $\{\breve{T}_t\}_{t\geqslant 0}$ 在特定函数空间上为一非线性连续半群。
- $u(t,x)=T_t\phi(x)$ 为(HJB)的粘性解！相应的 $\breve{u}(t,x)=\breve{T}_t\phi(x)$ 为下面方程的粘性解

$$\begin{cases} D_tu(t,x)-H(t,x,D_xu(t,x))=0, \\ u(0,x)=\phi(x), \end{cases} \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0.$$

共轭点、正则点和奇点

- 下面我们假设 ϕ 为 C^2 光滑的。如果 ξ 为问题$(\mathrm{CV}_{t,x})$的的极小元，并且定义 $p(s) = L_v(s, \xi(s), \dot{\xi}(s))$，则 (ξ, p) 满足 Hamilton 方程，并且 $p(0) = D\phi(\xi(0))$。
- 考虑满足初值条件 $\xi_z(0) = \mathrm{id}$，$p_z(0) = D^2\phi(z)$ 的变分方程

$$\begin{cases} \dot{\xi}_z(s) = H_{px}\xi_z + H_{pp}p_z, \\ \dot{p}_z(s) = -H_{xx}\xi_z + H_{x,p}p_z. \end{cases}$$

- 上述变分方程为 Hamilton 方程的线性化，(可以与 Riemann 几何中的 Jacobi 方程比较)，如果 $\det \xi_z(t; z) = 0$，我们则称 (t, x) 为共轭点。这意味着不存在一个从 z 的邻域到 x 的某个邻域的一个 flow box 或 tabular neighborhood，隐函数定理失效。
- 如果问题$(\mathrm{CV}_{t,x})$的的极小元为一，此时 $u(t, \cdot)$ 在 x 处可微，我们称 (t, x) 为正则的。如果$(\mathrm{CV}_{t,x})$的的极小元不唯一，则称 (t, x) 为 u 的奇点。如果 ϕ 为 C^2 的，可以证明 $\overline{\mathrm{Sing}\,(u)} = \mathrm{Sing}\,(u) \cup \mathrm{Conj}\,(u)$。
- 后面我们将介绍更一般意义下的割点。

为什么研究奇性？

这是一个很难回答的问题。

- 奇性是普遍存在的。无论从 Hamilton 动力系统、变分法最优控制还是几何，这都是极其基本的问题。同时也有很多未知问题。
- 已经知道，regular 动力学的极小不变集补集与 singular 部分同伦等价。“确定性”哲学下的牛顿力学蕴含了不可逆部分——奇性部分。
- 从变分角度看，稳定流形一般不能永远保持水平，从而产生共轭点，继而奇性传播。奇性隐藏在稳定不稳定流形折叠相交的过程中。

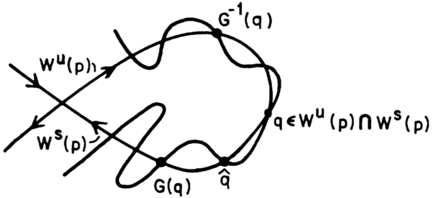


Figure: 同宿相交

光滑函数的奇点理论

- Malgrange, Mather 等理论工作开始于 1950 年代。后来 Arnold 的俄国 (苏联) 学派展开了对该领域的长期系统研究。法国在 Thom 之后也有自己的学派。与 Hamilton 系统，接触系统相关联，这里面的实质是所谓关于 wave front 与 caustic 的奇性理论[1]。这是理解上述问题的另一种思想。
- 但是已有的方法大多情形下仅局限于所谓“通有情形”的奇点的分类。比如

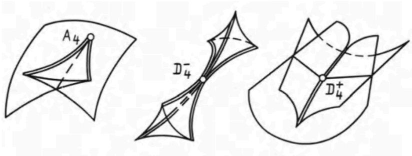


Figure: $\mathbb{R}^3$ 上的通有 Lagrange 奇性

[1] Arnold, V. I. *Singularities of caustics and wave fronts*. Mathematics and its Applications, 62. Kluwer, 1990.

距离函数：最“简单”的模型

- 若 $F \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集，定义

$$d_F(x) = \inf\{|x-y| : y \in F\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

- 我们知道函数 d_F 为 1-Lipschitz 函数。但是远非如此。我们知道 $u = d_F$ 满足 Hamilton-Jacobi 方程

$$\begin{cases} |Du(x)| = 1, & x \in \mathbb{R}^n \setminus F, \\ u(x) = 0, & x \in F. \end{cases}$$

- F 边界的形状决定了 d_F 的性质。事实上，d_F 在 $\mathbb{R}^n \setminus F$ 上是所谓局部半凹函数。d_F^2 在 $\mathbb{R}^n$ 上是半凹的。

奇性特征线

广义特征线

2002 年，Albano 和 Cannarsa 引入广义特征线的概念。

广义特征线

一条 Lipschitz 曲线 $\mathbf{x} : [0, \tau] \to \mathbb{R}^n$ 称作 Hamilton-Jacobi 方程($\mathrm{HJ}_{\mathrm{loc}}$)的广义特征线若 $\mathbf{x}$ 满足微分包含

$$\dot{\mathbf{x}}(s) \in \operatorname{co} H_p\big(\mathbf{x}(s), D^+u(\mathbf{x}(s))\big), \quad \text{a.e. } s \in [0, \tau].$$

他们证明[2]：如果 $x \in \operatorname{Sing}(u)$ 且

$$0 \notin \operatorname{co} H_p(x, D^+u(x)),$$

则奇性可沿广义特征线局部传播，即 $\mathbf{x}(s) \in \operatorname{Sing}(u)$，$\forall s \in [0, \tau]$。

[2] Albano, P.; Cannarsa, P. *Propagation of singularities for solutions of nonlinear first order partial differential equations*. Arch. Ration. Mech. Anal. **162** (2002), no. 1, 1–23.

奇性特征线

广义特征线接下来重要进展是 2009 年 Cannarsa 与虞一峰的工作[3]。

奇性特征线

设 u 为(HJ$_{\text{loc}}$)的 Lipschitz 半凹粘性解，$x \in \operatorname{Sing}(u)$。我们称 Lipschitz 曲线 $\mathbf{x} : [0, \tau] \to \Omega$ 为 x 出发的奇性特征线若

(1) $\mathbf{x}$ 为广义特征线，$\mathbf{x}(0) = x$。

(2) $\mathbf{x}(t) \in \operatorname{Sing}(u)$，$\forall t \in [0, \tau]$。

(3) $\dot{\mathbf{x}}^+(0) = H_p(x, p_0)$，其中 $p_0 = \arg\min\{H(x, p) : p \in D^+u(x)\}$。

(4) $\lim_{t\to 0+} \operatorname{ess\,sup}_{s\in[0,t]} |\dot{\mathbf{x}}(s) - \dot{\mathbf{x}}^+(0)| = 0$。

Cannarsa 与虞一峰证明了奇性特征线的存在性。这里关键的一条是 (4)。

[3]Cannarsa, P.; Yu, Y., *Singular dynamics for semiconcave functions*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **11** (2009), no. 5, 999–1024.

内蕴处理

下一个重要进展是 Cannarsa 与 C 的关于广义特征线的内蕴处理与全局广义特征线[4]。

可以证明存在 $t_\lambda > 0$ 使得，若 $t \in (0, t_\lambda]$ 则存在唯一 $y_{t,x}$ 使得

$$\breve{T}_t u(x) = u(y_{t,x}) - A_t(x, y_{t,x}). \tag{2.1}$$

其中 $\breve{T}_t$ 为正向 Lax-Oleinik 算子。定义曲线

$$\mathbf{z}(t) = \begin{cases} x, & t = 0; \\ y_{t,x}, & t \in (0, t_\lambda]. \end{cases} \tag{2.2}$$

注意到，t_λ 是一致的。

[4]Cannarsa, P.; Cheng, W. *Generalized characteristics and Lax-Oleinik operators: global theory*. Calc. Var. Partial Differential Equations **56** (2017), no. 5, Paper No. 125, 31 pp.

内蕴奇性特征线

内蕴奇性特征线

曲线 $\mathbf{z}$ 满足

(1) $\mathbf{z}$ 为 Lipschitz 广义特征线。

(2) 若 $x \in \mathrm{Cut}\,(u)$，则 $\mathbf{z}(t) \in \mathrm{Sing}\,(u)$，$\forall t \in (0, t_\lambda]$.

(3) $\dot{\mathbf{z}}^+(0)$ 存在且

$$\dot{\mathbf{z}}^+(0) = H_p(x, p_0)$$

其中 $p_0 = \arg\min\{H(x,p) : p \in D^+u(x)\}$.

我们称 $\mathbf{z}$ 为内蕴奇性特征线。需要指出，我们还不能证明奇性特征线性质中的 (4)，即

$$\lim_{t\to 0+} \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,t]} |\dot{\mathbf{z}}(s) - \dot{\mathbf{z}}^+(0)| = 0?$$

严格奇性特征线

差不多同时，基于 Bogaevsky 的思想，Khanin 与 Sobolevski 得到了以下重要结论[5]：特定条件下（shock 由若干光滑函数决定），他们证明方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^+(t) = H_p(\mathbf{x}(t), p(t)), & t \in [0, T], \\ \mathbf{x}(0) = x, \end{cases} \tag{2.3}$$

存在 Lipschitz 解 $\mathbf{x} : [0, T] \to \mathbb{R}^n$，其中 $p(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ 满足

$$H(\mathbf{x}(t), p(t)) = \min_{p \in D^+ u(\mathbf{x}(t))} H(\mathbf{x}(t), p). \tag{2.4}$$

并且，若 $x \in \operatorname{Sing}(u)$ 则 $\mathbf{x}(t) \in \operatorname{Sing}(u)$，$\forall t \in [0, T]$。

我们称(2.3)的解为严格奇性特征线。

[5] Khanin, K.; Sobolevski, A., *On dynamics of Lagrangian trajectories for Hamilton-Jacobi equations*. Arch. Ration. Mech. Anal. **219** (2016), no. 2, 861–885.

各类奇性特征线

- Khanin-Sobolevski 的严格奇性特征线显然是奇性特征线，满足所有条件 (1)-(4)。内蕴奇性特征线不满足 (4)?
- Khanin-Sobolevski 的严格奇性特征线去掉了广义特征线定义中让人费解的凸包。但是存在性只对某些 shock 情形成立，而 preshock 情形是未知的。

我们很自然有下面的问题

(Q1) 严格奇性特征线与一般的奇性特征线有什么关系?

(Q2) 奇性特征线有唯一性吗?

(Q3) 严格奇性特征线的内蕴解释是什么?

我们将在 $\mathbb{R}^2$ 上回答这个问题!

广义梯度流

- 如果 Hamilton 函数

$$H = \frac{1}{2}\langle A(x)p, p\rangle + V(x),$$

其中 $A(x)$ 为对称正定矩阵光滑依赖于 x（Riemann 度量），V 为光滑函数。此时广义特征线系统变成广义梯度系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in A(\mathbf{x}(t))D^+u(\mathbf{x}(t)), \quad t > 0, \quad \text{and} \quad \mathbf{x}(0) = x.$$

- 利用 u 的半凹性与 Gronwall 不等式，很容易证明解的唯一性。这是一个很广泛意义下的梯度系统（单边动力系统)。这个梯度系统在很多深刻的数学问题中扮演着重要角色。
- 从 Riemann 几何的角度，这一系统是运行在割迹（cut locus）上的。

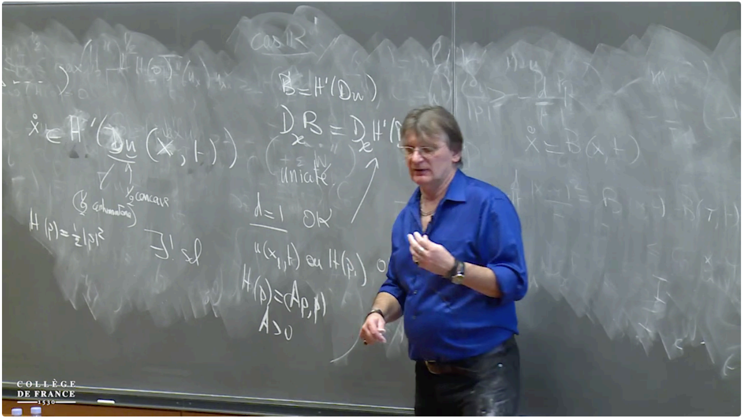


Figure: P. L. Lions 于 2018 年 12 月 7 日在 Collège de France 的讲演《HJB, MFG et les autres》截图

半凹函数与奇性

半凹函数的次导数

- 为了解粘性解的奇性，我们首先必须理解半凹函数的奇性。

半凹函数的次导数

- 为了解粘性解的奇性，我们首先必须理解半凹函数的奇性。
- 半凹函数的很多性质可以类比凸函数。下面是最简洁的描述一个半凹函数 u 的次导数的说法。

半凹函数的次导数

- 为了解粘性解的奇性，我们首先必须理解半凹函数的奇性。
- 半凹函数的很多性质可以类比凸函数。下面是最简洁的描述一个半凹函数 u 的次导数的说法。

命题

设 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 为连续函数。若存在常数 $C>0$ 使得对任意 $x\in\Omega$，存在 $p\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$u(y)\leqslant u(x)+\langle p,y-x\rangle+\frac{C}{2}|y-x|^2,\quad \forall y\in\Omega, \tag{3.1}$$

则 u 为以 C 半凹常数的半凹函数且 $p\in D^+u(x)$。反之，若 u 为 Ω 上常数为 C 的半凹函数，则(3.1)对任意 $x\in\Omega$，$p\in D^+u(x)$ 成立.

可达梯度

设 $u:\Omega\to\mathbb{R}$ 局部 Lipschitz。我们称向量 $p\in\mathbb{R}^n$ 为 u 在 x 处的可达梯度（reachable gradient）若存在序列 $\{x_n\}\subset\Omega\setminus\{x\}$ 使得 u 在每一 x_k 处均可微且

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x \quad \text{且} \quad \lim_{k\to\infty} Du(x_k) = p.$$

所有 u 在 x 处可达梯度的全体记作 $D^*u(x)$。

Sandpile

Figure: 自然界的半凹性

半凹函数的奇性

- 若 u 为半凹函数，因为 Du 为有界变差函数，所以根据 de Giorgi 理论，可知 Du 的跳跃部分对应 $\mathrm{Sing}\,(u)$。
- 设 $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ 且 $C \subset \mathbb{R}^n$。C 称作k-rectifiable若存在 Lipschitz 函数 $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ 使得 $C \subset f(\mathbb{R}^k)$。$C$ 称作countably k-rectifiable若它为可数个 k-rectifiable 集之并。
- 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为有界连通区域，$u : \Omega \to \mathbb{R}$ 半凹。设

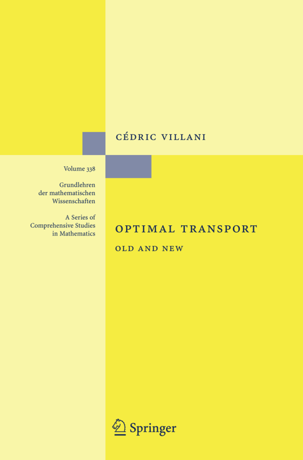
$$\mathrm{Sing}_k(u) = \{x \in \mathrm{Sing}\,(u) : \dim(D^+u(x)) = k\}, \quad k = 0, 1, 2.$$

  则 $\mathrm{Sing}_k(u)$ 为 countably $(2-k)$-rectifiable，$k = 0, 1, 2$。特别，$\mathrm{Sing}_2(u)$ 可数。
- 解析情形，这个问题相对比较清楚[6]。

[6]Tamm, M., *Subanalytic sets in the calculus of variation*. Acta Math. 146 (1981), no. 3-4, 167-199.

半凹函数的参考文献


Progress in Nonlinear Differential Equations
and Their Applications
Piermarco Cannarsa
Carlo Sinestrari
Semiconcave Functions,
Hamilton–Jacobi Equations,
and Optimal Control
Birkhäuser


CÉDRIC VILLANI
Volume 338
Grundlehren
der mathematischen
Wissenschaften
A Series of
Comprehensive Studies
in Mathematics
OPTIMAL TRANSPORT
OLD AND NEW
Springer

粘性解的奇性

奇性与 **regular** 动力学的基本关系

命题

设 $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为(HJ$_s$)的弱 *KAM* 解，$x\in\mathbb{R}^n$。则 $p\in D^*u(x)$ 当且仅当存在唯一 C^2 的负向 *calibrated* 曲线 $\xi:(-\infty,0]\to\mathbb{R}^n$ 满足 $\xi(0)=x$，$p=L_v(x,\dot{\xi}(0))$。

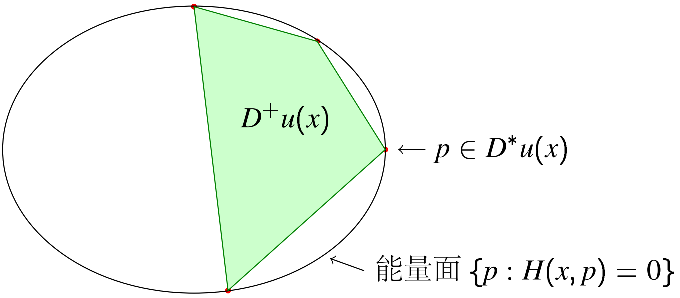


Figure: 可达梯度与负向极小曲线的关系。

Sing (u) 与 Cut (u)

- 若 u 是(HJ_{loc})的粘性解或(HJ_s)的弱 KAM 解，众所周知，u 是 Lipschitz 的，并且是半凹的。
- 半凹函数一般是非光滑的。我们记 Sing (u) 为半凹函数 u 的奇点集，即 u 的不可微点集。这是一类奇性的集合。
- 从变分法角度，考虑终点固定初值自由的经典问题。任给一条特征线（测地线）ξ，因为短的测地线都是变分极小的，此类问题负向永远保持极小，所以我们想要知道是否存在最大的 $\bar{t}$，是当 $s<\bar{t}$ 时 ξ 是极小的。如果这样的 $\bar{t}=+\infty$，我们就称 ξ 为全局极小轨道。但是一般而言，这样的 $\bar{t}$ 是有限的。这样的 $\bar{t}$ 称作 ξ 的 cut time，$\xi(\bar{t})$ 称作 cut point（割点）。所有 cut point 的全体称作 cut locus（割迹）。

Cut (u) 的结构

- 对于(HJ$_s$)的弱 KAM 解而言，Cut (u) 称作 u 的割迹，它是所有 u 决定的负向 calibrated curve 产生的割点的全体。
- 一般 Sing $(u) \subset$ Cut (u)。特殊情况，$\overline{\mathrm{Sing}\,(u)} = \mathrm{Sing}\,(u) \cup \mathrm{Conj}\,(u)$。
- 对于弱 KAM 解，经典意义上，可见如果 Mather 集是有限个双曲周期轨时，可以方便的定义 Conj (u)。但一般情况下，因为 Mather 集结构可能极为复杂，甚至是不可求长的，因此无法按照经典的办法定义 Conj (u)。这是最近我们关注的问题。
- 比较弱的意义下（如拓扑），我们知道 Cut (u) 和 Sing (u) 同伦等价与 Aubry 集的补集，并且是局部道路连通的[7]。
- 更多的关于几何测度论的刻画可见 Cannarsa-Sinestrari 的专著。

[7] Cannarsa, P.; Cheng, W.; Fathi, A.; *On the topology of the set of singularities of a solution to the Hamilton-Jacobi equation*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **355** (2017), no. 2, 176–180.

二维情形的奇性特征线

奇性曲线

我们专注于 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 的情形。我们试图回答 (Q1) 和 (Q2)。

考虑两条 Lipschitz 曲线 $\mathbf{x}_j : [0, T_i] \to \Omega$，$j = 1, 2$，满足

(i) u 为(HJ$_{\text{loc}}$)的 Lipschitz 半凹粘性解，且 $0 \notin H_p(x, D^+u(x))$。

(ii) $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_2(0) = x$，$\dot{\mathbf{x}}_j^+(0)$ 对 $j = 1, 2$ 均存在且

$$\dot{\mathbf{x}}_1^+(0) = \dot{\mathbf{x}}_2^+(0) = p_0 = \arg\min\{H(x, p) : p \in D^+u(x)\}.$$

(iii) $\mathbf{x}_j(t) \in \operatorname{Sing}(u)$，$\forall t \in [0, T_i], j = 1, 2$。

(iv) $\lim_{t\to 0^+} \operatorname{ess\,sup}_{s\in[0,t]} |\dot{\mathbf{x}}_j(s) - p_0| = 0, j = 1, 2$。

一些关于条件的注记

- 由 Cannarsa-Sinestrari 书中定理 5.4.5，条件 (i)-(iii) 是十分自然的。
- 在条件 (i) 和 (ii) 下，$\dot{\mathbf{x}}_1^+(0)=\dot{\mathbf{x}}_2^+(0)$，$\dot{\mathbf{x}}_j^+(0)\neq 0$，$j=1,2$。
- 我们将证明，在 (i)-(iv) 下，每一 $\mathbf{x}_j$ 均为局部单射。
- 由 (i)-(iv)，D^+u 沿 $\mathbf{x}_j$ 的结构可以作如下假设：
  $D^+u((\mathbf{x}_1(t)))=[p_t^1,p_t^2]$，$p_t^i\in D^*u(\mathbf{x}_1(t))$，且 $\lim_{t\to 0^+}p_t^i=p_0^i$ 对 $\in[0,T_1], i=1,2$。
- $D^*u(x)$ 中元与负向极小轨道的一一对应关系是众所周知的。
- 若 x 不是关于 (u,H) 的临界点，即 $0\in H_p(x,D^+u(x))$，则 $\mathbf{x}_j(t)$ 对 $t\ll 1$ 也非临界点。这是由集值映射 $t\rightrightarrows H_p(\mathbf{x}_j(t),D^+u(\mathbf{x}_j(t)))$ 的上半连续性得到的。

一个引理

引理

设 $\mathbf{x}_j : [0, T_i] \to \Omega$，$j = 1, 2$，为满足 *(i)*-*(iv)* 的奇性曲线，则存在 $\tau \in (0, T_2]$ 使得：$\forall t \in [0, \tau]$，$\exists s_t \in [0, T_1]$，$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}_1(s_t)$。

一张图

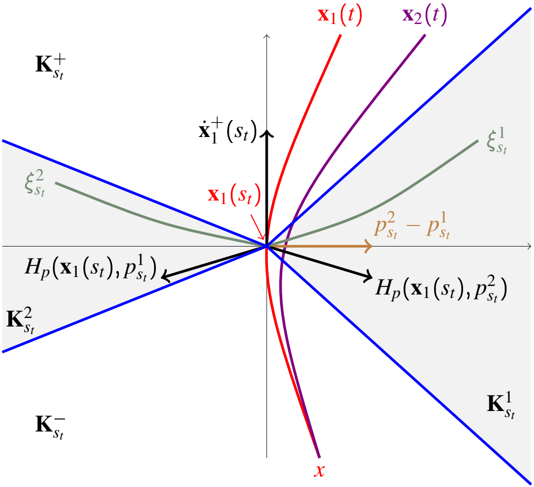


Figure: The illustration of various objects near $\mathbf{x}(s_t)$ for sufficiently small $t > 0$.

重新参数化

定理 (Cannarsa-C, 2020)

设 $\mathbf{x}_j : [0, T_j] \to \Omega$，$j = 1, 2$，为任意两条奇性曲线满足条件 *(i)-(iv)*。那么，存在 $\tau \in (0, T_2]$ 以及一个 *bi-Lipschitz* 同胚 $\phi : [0, \tau] \to [0, \phi(\tau)]$ 使得，$\mathbf{x}_1(\phi(t)) = \mathbf{x}_2(t)$，$\forall t \in [0, \tau]$.

换句话说，从给定非临界的奇点出发的奇性特征线在重新参数化下是唯一的。

这里

$$\phi(t) = \min\{s_t \in [0, T_1] : \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}_1(s_t)\}, \quad t \in [0, \tau].$$

内蕴奇性特征线与严格奇性特征线

内蕴奇性特征线与对应的 extremals

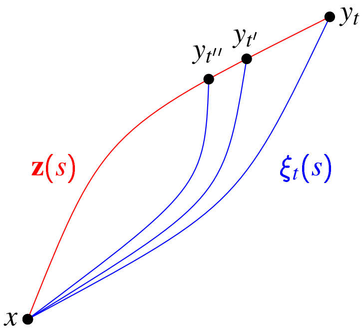


Figure: 图中红色为 $u(\cdot) - A_t(x,\cdot)$ 的唯一最大值决定的内蕴奇性特征线。y_t 为对应 t 时的极大元。蓝色曲线 ξ_t 为连接 x 与 y_t 的极小曲线。

D^+u 沿 $\mathbf{z}$ 的结构，$\mathbb{R}^n$ 情形

引理

设 $x \in \mathrm{Sing}\,(u)$ 且 $\mathbf{z}$ 如前面定义的极大元构造的内蕴奇性特征线。若 $\mathbf{z}$ 在 $t \in (0, t_\lambda)$ 处可微，则

$$\langle p - p_t^*, \dot{\mathbf{z}}(t)\rangle = 0, \quad \forall p \in D^+u(\mathbf{y}(t)) \tag{6.1}$$

其中 $p_t^* = \arg\min\{H(\mathbf{z}(t), p) : p \in D^+u(\mathbf{z}(t))\}$。

为证明引理，我们需要重新证明所谓 Lasry-Lions 正则化的结果：即 $w(t,x) = \breve{T}_t u(x)$ 关于 (t,x) 是局部 $C^{1,1}$，若 $t \ll 1$。

证明梗概

- 假设 $\mathbf{z}$ 在 $t \in (0, t_\lambda)$ 处可微。记 $\dot{\mathbf{z}}^-(t)$ 和 $\dot{\mathbf{z}}^+(t)$ 分别为左右导数。
- 利用 Lasry-Lions 正则化的结果，设 ξ_t 为 $A_t(x, \mathbf{z}(t))$ 的极小曲线，映射 $t \mapsto \dot{\xi}_t(t)$ 在 $(0, t_\lambda]$ 上局部 Lip，且 $\lim_{t\to 0+} \dot{\xi}_t(t) = \dot{\mathbf{z}}^+(0)$。
- 由 u 的半凹性，对任意 $p \in D^+u(\mathbf{z}(t))$，

$$\langle p - L_v(\mathbf{z}(t'), \dot{\xi}_{t'}(t')), \mathbf{z}(t') - \mathbf{z}(t)\rangle + C|\mathbf{z}(t') - \mathbf{z}(t)|^2 \geqslant 0.$$

- 计算可得，$\dot{\mathbf{z}}(t) = v_t + w_t$，其中

$$v_t = \lim_{t'\to t} \dot{\xi}_{t'}(t') = \dot{\xi}_t(t), \quad w_t = \lim_{t'\to t} \frac{1}{t'-t} \int_0^t (\dot{\xi}_{t'}(s) - \dot{\xi}_t(s))\, ds.$$

- 上面不等式两边除以 $t' - t$ 和 $t - t'$，分别求左右导数并记 $p_t = L_v(\mathbf{z}(t), v_t) \in D^+u(\mathbf{z}(t))$，则

$$\langle p - p_t, \dot{\mathbf{z}}(t)\rangle \geqslant 0, \quad \text{and} \quad \langle p - p_t, \dot{\mathbf{z}}(t)\rangle \leqslant 0, \quad \forall p \in D^+u(\mathbf{z}(t)).$$

重新参数化，$n=2$

现在我们试图回答 (Q3)。

上述引理，如果 $\dot{\mathbf{z}}(t)\neq 0$，则 $D^+u(\mathbf{z}(t))$ 为一线段。从而对任意 $t\in(0,T]$ （$T\in(0,t_\lambda)$），存在 $0<\tau(t)<\infty$ 使得

$$\tau(t)\dot{\mathbf{z}}^+(t)=H_p(\mathbf{z}(t),p_t^*).$$

注意到函数 $\tau:[0,t_\lambda)\to(0,+\infty)$ 有界可测，$\tau(0)=1$。若 $T\ll 1$，则我们还可以假设 $1/\tau$ 亦有界可测。

因此

$$\sigma(t):=\int_0^t\frac{dr}{\tau(r)}\qquad (t\in[0,T]) \tag{6.2}$$

定义了从 $[0,T]$ 到 $[0.\kappa(T)]$ 上的 bi-Lipschitz 同胚。定义 $\kappa=\sigma^{-1}$，$\mathbf{w}(s)=\mathbf{z}(\kappa(s))$，$0\leqslant s\leqslant\kappa(T)$。则

$$\dot{\mathbf{w}}(t)=H_p(\mathbf{w}(t),\bar{p}_t^*),\quad a.e., t\in[0,T], \tag{6.3}$$

其中 $\bar{p}_t^*=\arg\min\{H(\mathbf{z}(t),p):p\in D^+u(\mathbf{z}(t))\}$。

内蕴奇性特征线与严格奇性特征线

定理 (Cannarsa-C, 2020)

假设 $x \in \mathrm{Sing}\,(u)$ 且

$$0 \notin \mathrm{co}\, H_p(x, D^+u(x)).$$

那么，存在 $T > 0$ 以及一个 *bi-Lipschitz* 同胚 $\kappa : [0, T] \to [0, \kappa(T)]$ 曲线 $\mathbf{w}(t) := \mathbf{z}(\kappa(t))$，$t \in [0, T]$，满足

$$\dot{\mathbf{w}}^+(t) = H_p(\mathbf{w}(t), \bar{p}_t^*), \quad a.e., t \in [0, T], \tag{6.4}$$

其中 $\bar{p}_t^* = \arg\min\{H(\mathbf{z}(t), p) : p \in D^+u(\mathbf{z}(t))\}$。

力学系统

- 我们称形如

$$H(x,p) = \frac{1}{2}|p^2| + V(x), \quad (x,p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$$

  的 H 为力学 Hamilton。
- 利用 Gronwall 不等式以及 u 的半凹性，容易证明广义特征线的唯一性。
- 对力学 Hamiltonian，上述重新参数化中的 ϕ 恰为恒等映射！

注记和进一步思考

注记

- 广义特征线的唯一性是一个及其重要的问题，我们现在在非临界点情形在二维时给出了唯一性的一种表述。那么高维的情形是什么呢？
- 上述的重新参数化的内蕴处理，从 Hamilton-Jacobi 角度实际上用到了以下的事实：若 τ 为 $[0,+\infty)$ 上的有界可测正函数，u 为(HJ$_s$)的弱 KAM 解当且仅当 u 为

$$\tau(t)H(x,Du(x))=0.$$

  的粘性解。这样所谓最优的 τ 的动力学实质是什么？
- 在上述结果中，$0\notin \operatorname{co} H_p(x,D^+u(x))$ 这一条件是否可以去掉？有别于从奇点的传播，内蕴机制也适用于初始点为割点，我们认为困难出在类似于 $\operatorname{Conj}(u)$ 的初始点。
- $0\notin \operatorname{co} H_p(x,D^+u(x))$ 或 $0\notin H_p(x,D^+u(x))$ 这一临界点条件的实质是什么？区别是什么？
- 力学系统中，广义特征线是具有唯一性的。那么力学系统究竟是什么条件保证高维时也有唯一性呢？

进一步思考

- 上述重新参数化的思想是否可以推广到全局的内蕴广义特征线?
- 我们已经研究了具有唯一性的广义特征线的动力学性质，刻画了其极限行为[8]。是不是在一般情形下结合这种重新参数化的思想可以完整解决二维问题？Dirichlet 问题[9]?
- 在一阶 Mean Field Games 问题[10]的理解依赖于 Mather 测度这一负向动力学产生的不变测度。那么正向的问题是什么呢？目前我们正在考虑奇性特征线在最优输运理论的解释，无疑这将是崭新的课题。

[8] Cannarsa, P.; Chen, Q.; Cheng, W.; *Dynamic and asymptotic behavior of singularities of certain weak KAM solutions on the torus*. J. Differential Equations **267** (2019), no. 4, 2448–2470.

[9] Cannarsa, P.; Cheng, W.; Mazzola, M.; Wang, K., *Global Generalized Characteristics for the Dirichlet Problem for Hamilton-Jacobi Equations at a Supercritical Energy Level*. SIAM J. Math. Anal. **51** (2019), no. 5, 4213–4244.

[10] Cannarsa, P; Cheng, W.; Mendico, C.; Wang, K., *Long-Time Behavior of First-Order Mean Field Games on Euclidean Space*. Dyn. Games Appl. **10** (2020), no. 2, 361–390.

其他类型的相关问题，可以参考综述

Cannarsa, P.; Cheng, W., On and beyond propagation of singularities of viscosity solutions, arXiv:1805.11583, 2018.

谢谢关注!