

习题 1.2 12(5)

利用极限存在准则, 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 其中 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{2+3x_n}{1+x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$).

证明. $x_{n+1} = \frac{2+3x_n}{1+x_n} = 2 + \frac{x_n}{1+x_n}$, 由数学归纳法易得 $2 < x_n < 3$, $n = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - (1 + \sqrt{3})| &= \left| \frac{2+3x_n}{1+x_n} - (1 + \sqrt{3}) \right| = \left| \frac{x_n - (1 + \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(1 + x_n)} \right| \\ &\leq \frac{1}{3} |x_n - (1 + \sqrt{3})| \leq \frac{1}{3^n} |x_1 - (1 + \sqrt{3})|. \end{aligned}$$

由极限定义可知: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 + \sqrt{3}$. □

假设极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在为 A , 对关系式 $x_{n+1} = \frac{2+3x_n}{1+x_n}$ 两边同时求极限得 $A = \frac{2+3A}{1+A}$, 解得极限为 $A = 1 + \sqrt{3}$.