习题 2.3 34

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶的连续导数, 并且 $f(0)=f(1)=0$. 当 $x\in[0,1]$ 时, $|f''(x)|\le M$. 证明: 当 $x\in[0,1]$ 时, 有 $|f'(x)|\le \frac{M}{2}$.

Proof.

由题意 $f'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 则 $|f'(x)|$ 在区间 $[0,1]$ 上也连续.

$|f'(x)|$ 在区间 $[0,1]$ 上取到最大值, 不妨设最大值点为 ξ.

$$
\begin{aligned}
f(0) &= f(\xi)+f'(\xi)(0-\xi)+\frac{1}{2}f''(\alpha)(0-\xi)^2,\\
f(1) &= f(\xi)+f'(\xi)(1-\xi)+\frac{1}{2}f''(\beta)(1-\xi)^2,
\end{aligned}
$$

上述两式相减得:

$$
0=f'(\xi)+\frac{1}{2}f''(\beta)(1-\xi)^2-\frac{1}{2}f''(\alpha)(0-\xi)^2
$$

从而

$$
\begin{aligned}
|f'(\xi)| &= \left|-\frac{1}{2}f''(\beta)(1-\xi)^2+\frac{1}{2}f''(\alpha)(0-\xi)^2\right|\\
&\le \left|-\frac{1}{2}f''(\beta)(1-\xi)^2\right|+\left|\frac{1}{2}f''(\alpha)(0-\xi)^2\right|\\
&\le \frac{M}{2}\big((1-\xi)^2+\xi^2\big)\le\frac{M}{2}.
\end{aligned}
$$

□