



习题 2.3 35

设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有二阶的连续导数, 并且 $f(0) = f(1) = 0$. 当 $x \in [0, 1]$ 时, $|f''(x)| \leq M$. 证明: 当 $x \in [0, 1]$ 时, 有 $|f'(x)| \leq \frac{M}{2}$.

Proof.

由题意 $f'(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 则 $|f'(x)|$ 在区间 $[0, 1]$ 上也连续.

$|f'(x)|$ 在区间 $[0, 1]$ 上取到最大值, 不妨设最大值点为 ξ .

$$\begin{aligned} f(0) &= f(\xi) + f'(\xi)(0 - \xi) + \frac{1}{2}f''(\alpha)(0 - \xi)^2, \\ f(1) &= f(\xi) + f'(\xi)(1 - \xi) + \frac{1}{2}f''(\beta)(1 - \xi)^2, \end{aligned}$$

上述两式相减得:

$$0 = f'(\xi) + \frac{1}{2}f''(\beta)(1 - \xi)^2 - \frac{1}{2}f''(\alpha)(0 - \xi)^2$$

从而

$$\begin{aligned} |f'(\xi)| &= \left| -\frac{1}{2}f''(\beta)(1 - \xi)^2 + \frac{1}{2}f''(\alpha)(0 - \xi)^2 \right| \\ &\leq \left| -\frac{1}{2}f''(\beta)(1 - \xi)^2 \right| + \left| \frac{1}{2}f''(\alpha)(0 - \xi)^2 \right| \\ &\leq \frac{M}{2}((1 - \xi)^2 + \xi^2) \leq \frac{M}{2}. \end{aligned}$$

□