9. 设 f 在 $[a,b]$ 上二次可导. 如果 $f''\geqslant 0$, 且 $c\in(a,b)$ 为 f 的极值点, 则 c 必为 f 在 $[a,b]$ 上的最小值点.

10. 设连续函数 $f(x)$ 在区间 I 中有惟一的极值点, 则该极值点为最值点.

11. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 中二阶可导. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{|x|}=0$, 证明存在 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得 $f''(\xi)=0$.

12. (*) 设 $f(0)=0$, $f'(x)$ 严格单调递增, 则 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 中也严格单调递增.

§5.4 凸函数

根据前一节的讨论, 如果函数 f 二阶可导, 且 $f''>0$, 则 f 在区间的内部取不到极大值. 进一步, 根据第二节 (5.2) 式 $(n=2)$, 如果 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 则

$$f(x)-l(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-a)(x-b),\quad \xi\in(a,b), \tag{5.3}$$

其中 $l(x)$ 是满足条件 $l(a)=f(a)$, $l(b)=f(b)$ 的线性函数, 它可以写成

$$l(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a),\quad 或\quad l(x)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x). \tag{5.4}$$

于是, 当 $f''\geqslant 0$ 时, 有

$$f(x)\leqslant l(x),\quad \forall\ x\in(a,b). \tag{5.5}$$

特别地, 由线性函数的单调性可得

$$f(x)\leqslant l(x)\leqslant \max\{l(a),l(b)\}=\max\{f(a),f(b)\},\quad \forall\ x\in[a,b].$$

定义 5.4.1 (凸函数)**.** *设 f 为区间 I 中定义的函数. 如果对任意 $a<b\in I$, (5.5) 式均成立, 则称 f 为 I 中的***凸函数***.*

当 (5.5) 中不等号反向时, 则称相应的函数为**凹函数**. 有时也将凸函数称为下凸函数, 凹函数称为上凸函数. 如果 (5.5) 中不等号为严格小于号, 则称相应的函数为**严格凸函数**.

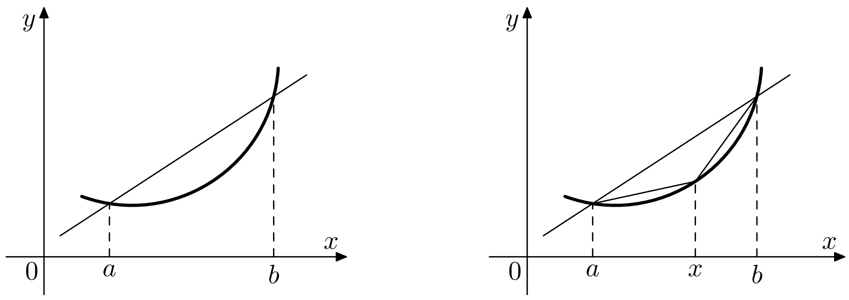

图 5.5 凸函数