9.3 关于“积不出”问题

定理 5(刘维尔第三定理) 设 $f(x)$与 $g(x)$为 x 的代数函数，且 $g(x)$不为常数，若$\int f(x)e^{g(x)}dx$ 为初等函数，则

$$\int f(x)e^{g(x)}dx=R(x)e^{g(x)}+C.$$

其中 C 为常数，$R(x)$为 $x, f(x), g(x)$的有理函数.

注 2：如果函数 $y=f(x)$满足关系

$$P_0(x)y^n+P_1(x)y^{n-1}+\cdots+P_n(x)=0,$$

其中 n 为正整数，$P_i(x)\ (i=1,2,\cdots)$都是 x 的多项式，$P_0(x)\not\equiv0$，则称 $y=f(x)$为 x 的代数函数. 不是代数函数的解析函数称为超越函数.

例 1 证明$\int e^{-x^2}dx$ 不能表为初等函数.

证明 反证法：设 $u(x)=\int e^{-x^2}dx$ 为初等函数，则由刘维尔第三定理知：

$$u(x)=R(x)e^{g(x)}+C,$$

(其中 $R(x)$为 x 的有理函数，C 为常数，$f(x)\equiv1, g(r)=-x^2$)上

式两边求导得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=R'(x)\mathrm{e}^{-x^2}-2x\mathrm{e}^{-x^2}R(x)$$
$$=\mathrm{e}^{-x^2}[R'(x)-2xR(x)]=\mathrm{e}^{-x^2},$$

所以

$$R'(x)-2xR(x)=1.$$

上式右端的 1 在有限平面上无极点，所以 $R(x)$在有限平面上无极点，故 $R(x)$不是有理分式函数. 另一方面，$R(x)$也不是多项
此处极点可以简单理解为复数域上使得分母为0的点
式. 否则，若 $R(x)$是 x 的 n 次多项式，则上式左端也是 $n+1$ 次多项式，矛盾. 故$\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 不是初等函数.