大学数学理一III2005.11.12期中考试

一、（30分）

1. 假设A^*, B^*分别是n阶方阵A, B的伴随矩阵，$|AB| \neq 0$，求分块矩阵C的伴随矩阵

$$C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

（5分）

2. 假设三元非齐次线性方程组$AX = b$的系数矩阵A的秩是1。已知$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$为$AX = b$的三个解向量而且$\alpha_1 + \alpha_2 = (1, 2, 3)^T, \alpha_2 + \alpha_3 = (0, -1, 1)^T, \alpha_1 + \alpha_3 = (1, 0, -1)^T$. 求该方程组的通解。（5分）

3. 如果$bc > 0$，求证下面的实方阵A可以对角化。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

（5分）

4. 求极限

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

（5分）

5. 求

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}^{-1}$$

6. 已知6，3，3是3阶矩阵A的3个特征值，向量$(1, 1, 1)^T$是A的属于特征值6的特征向量。问能否由此求出属于特征值3的两个线性无关的特征向量？若能，请求出来。若不能, 说明理由。（5分）

二、（15分）设$(1, 1, 1)^T$是矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}$$

的一个特征向量，试确定参数a, b,并求正交矩阵P, 使得$P^{-1}AP$为对角阵。

三、（15分）有一个非齐次现象方程组

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3-2x_4+x_5=3, \\ 2x_1+6x_2+x_3-3x_4=2, \\ x_1+3x_2-2x_3-x_4-x_5=b, \\ 3x_1+9x_2+4x_3-5x_4+x_5=a \end{cases}$$

问：(1) 该方程组何时无解？何时有解？有解时，写出通解。

(2) 设其系数矩阵为A, 令$\sigma(\alpha)=A\alpha(\forall\alpha\in\mathbb{R}^5)$,可得到一个线性变换，求该线性变换的核与像的基。

四、（15分）在3维向量空间F^3中，线性变换σ定义为

$$\sigma\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y \\ x-y+z \\ 2z \end{pmatrix}$$

(1) 求在基$e_1=(1,0,0)^T$, $e_2=(0,1,0)^T$, $e_3=(0,0,1)^T$下的矩阵。

(2) $g_1=(1,0,0)^T$, $g_2=(1,1,0)^T$, $e_3=(1,1,1)^T$是F^3的另一个基，求基e_1, e_2, e_3到基g_1, g_2, g_3的过渡矩阵C及C^{-1};

(3)求σ在基g_1, g_2, g_3下的矩阵。

五、（10分）设$A=ee^T$，其中e是每个元素均为1的n维列向量。试求出A的全部特征值及他们对应的特征向量.

六、（15分）设有四维线性空间的两个子空间: $L_1=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)^T\in\mathbb{R}^4|x_1+2x_2-x_4=0\}$, $L_2=L(\{\beta_1,\beta_2\})$, 其中$\beta_1=(1,-1,0,1)^T$，$\beta_2=(1,0,2,3)^T$，求$L_1+L_2$与$L_1\cap L_2$的基与维数。