大学数学期中试卷（理一III） 2006.11.18

姓名__________ 年级__________ 学号____________

一. 简答题、计算题（给出主要理由或主要计算过程）(共40分, 每小题5分)

1. 求A^{-1}，其中

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 设A是3阶方阵，$|A|=2$, 求$|(\frac{1}{7}A)^{-1}-A^*|$.

3. 设线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4=1 \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=a_5 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=b_5 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2+x_3-3x_4=1 \\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=a_5 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=b_5 \end{cases} \tag{2}$$

已知方程组(1)有通解$(1,-3,1,1)^T+k(-1,1,1,0)^T$. 求方程组(2)的一个特解。

4. 如果3阶矩阵A有特征值$-1,1,2$, 求$(A+3A^3)^{-1}$的特征值。

5. 若A为n阶实矩阵, X为n阶实的列向量, $A^TAX=0$, 则AX是否为0, 为什么？

6. 如果A是2阶正交矩阵，且$|A|=1$, 问是否存在α使得$A=\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$, 为什么？

7. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 是n维欧氏空间的线性无关向量组，又β_1,β_2均和$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$正交，问$\beta_1,\beta_2$是否线性相关，为什么？

8. 叙述线性空间V 的子空间W_1与W_2的并$W_1\cup W_2$仍然是V 的子空间的充分必要条件。为什么？

二. (20分) 设有三维线性空间R^3上的线性变换σ, 使得对于R^3的一组基$g_1=(0,0,1)^T,g_2=(0,1,1)^T,g_3=(1,1,1)^T$有$\sigma(g_1)=(2,3,5)^T,\sigma(g_2)=(1,0,0)^T,\sigma(g_3)=(0,1,-1)^T$.

1) 求σ在(g_1,g_2,g_3)下的矩阵A;

2) 设$\alpha=(1,2,3)^T$, 求$\sigma(\alpha)$在(g_1,g_2,g_3)下的坐标;

3) 求σ在基$f_1=(2,3,5)^T,f_2=(1,0,0)^T,f_3=(0,1,-1)^T$下的矩阵$B$, 并求$\sigma(\alpha)$在$(f_1,f_2,f_3)$下的坐标.

三. (15分) 在R^3中, 对于任意$X=(x_1,x_2,x_3)^T\in R^3$, 有$\sigma(X)=(2x_1,x_2+x_3,x_2+x_3)^T$. 求$R^3$的一个标准正交基使得线性变换$\sigma$在该基下的矩阵为对角矩阵，并写出此时对应的正交矩阵。

四. (10分) 求下面非齐次线性方程组的特解，导出组的基础解系，及非齐次线性方程组的通解。

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3-2x_4+x_5=3 \\ 2x_1+6x_2+x_3-3x_4=2 \\ x_1+3x_2-2x_3-x_4-x_5=-1 \\ 3x_1+9x_2+4x_3-5x_4+x_5=5 \end{cases} \tag{3}$$

五. (7分) 设A为$m\times n$矩阵，b是m维列向量。试证明

1) $r(A^TA)=r(A)$;

2) 线性方程组$(A^TA)X=A^Tb$一定有解。

六. (8分) 若$A^2=A$, 且$r(A)=r(0<r<n)$,

1) 求证A的特征值是0和1;

2) 求这两个特征值对应的特征子空间的维数;

3) 求证A可对角化。