

大学数学理一III2007.11.17期中考试

一、（36分）

1. 求

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

（6分）

2. 假设 $A$ 是4阶方阵，它的特征值是 $-1, 1, 2, -2$ ；求 $|A^*|$ 和 $|2A|$ 。（6分）

3. 设4阶方阵 $A$ 与 $B$ 相似，且 $A$ 的特征值是 $2, 3, 4, 5$ ，求 $(B - I)^{-1}$ 的全部特征值。（6分）

4.  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系，如果 $\beta_1 = \alpha_1 + \lambda\alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \lambda\alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \lambda\alpha_1$ ，讨论实数 $\lambda$ 满足什么条件时， $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 也是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系。（6分）

5. 设 $A$ 是一个3阶实对称方阵， $r(A) = 2, \alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \alpha_2 = (2, 1, 1)^T$ 是 $A$ 对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 的特征向量，求 $A$ 的另一特征值及特征向量。（6分）

6. 设 $A$ 是一个 $n$ 阶实方阵， $A^T = A^{-1}$ ，且 $|A| < 0$ ，求 $|A + I|$ 。（6分）

二、（15分）讨论 $\lambda$ 取何值时，下面的方程组无解，有解，在有解的情况下求其通解。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = \lambda \end{cases}$$

三、（15分）用正交矩阵把下面的实对称矩阵对角化。

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

四、（15分）设有3维线性空间 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换 $\sigma$ ，它把 $\alpha = (1, 0, 1)^T, \beta = (0, 1, 0)^T, \gamma = (0, 0, 1)^T$ 变为基 $(1, 0, 2)^T, (-1, 2, -1)^T, (1, 0, 0)^T$ ，试求 $\sigma$ 在基 $\alpha, \beta, \gamma$ 及基 $\epsilon_1 = (1, 0, 0)^T, \epsilon_2 = (0, 1, 0)^T, \epsilon_3 = (0, 0, 1)^T$ 下的矩阵。

五、（9分）设 $A \neq 0$ 是3阶实方阵， $A^2 = 0$ ，求 $r(A)$ 。

六、（10分）设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的一个基础解系，如果向量 $\beta$ 满足 $A\beta \neq 0$ ，求证 $\alpha_1 + \beta, \alpha_2 + \beta, \dots, \alpha_k + \beta, \beta$ 线性无关。