

# 南京大学数学系试卷

共5页 第1页

2005 / 2006 学年第 二 学期 课程名称 高等代数  
试卷类型 A 卷 考试形式 闭卷 使用班级 2005 级  
命题人 郭学军 考试时间 2006 年 4 月 18 日

题号	一	二	三	总分	阅卷人
得分					

说明：

1. 请将班级、学号、姓名写在试卷左侧装订线外。
2. 本试卷共有计算题六题，证明题三题，附加题一题，满分120分。考试时间120分钟。

一、 计算题（60分）

1. 求整数  $x, y$  使得  $73x + 23y = 1$ 。（10分）

2. 是否存在两个多项式  $f(x), g(x)$  使得  $f(x)(x^2 - x + 1) + g(x)(x^3) = 1$ ? 如果是，请求出这两个多项式  $f(x), g(x)$ ；如果不是，请说明原因。（10分）

姓名 \_\_\_\_\_  
学号 \_\_\_\_\_  
班级 \_\_\_\_\_  
装订线

3. 把实二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$  化为规范型。(10分)

4. 六个函数

$$\varepsilon_1 = e^{ax} \cos bx, \quad \varepsilon_2 = e^{ax} \sin bx,$$

$$\varepsilon_3 = xe^{ax} \cos bx, \quad \varepsilon_4 = xe^{ax} \sin bx,$$

$$\varepsilon_5 = \frac{1}{2}x^2 e^{ax} \cos bx, \quad \varepsilon_6 = \frac{1}{2}x^2 e^{ax} \sin bx$$

的所有实系数线性组合构成实数域上一个6维线性空间。求微分变换  $\mathcal{D}$  在基  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) 下的矩阵。(10分)

5. 求 $A$ 的特征值与特征向量,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10\text{分})$$

6. 求下面这个矩阵的最小多项式

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10\text{分})$$

二、证明题（40分）

1. 设 $A$ 为一个 $n \times n$ 的方阵，且 $A^2 = A$ 。证明 $A$ 相似于

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $r$ 是 $A$ 的秩， $I_r$ 是 $r \times r$ 的单位矩阵。（10分）

2. 设 $A$ 是一个 $n$ 阶幂零复方阵，且 $A^{n-1} \neq 0$ 。证明 $A$ 相似于下面的 $n$ 阶方阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}。 \quad (10分)$$

3. 设 $a, b, c, d$ 是4个复数, 而且满足 $ad \neq bc$ . 求证存在2阶复方阵 $A$ , 使得

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (20\text{分})$$

三、附加题 (20分) 证明3阶复方阵 $A$ 与 $B$ 相似的充分并且必要条件是方阵 $A$ 与 $B$ 具有相同的特征多项式与最小多项式。