

南京大学数学系试卷

共5页 第1页

2005 / 2006 学年第 二 学期 课 程 名 称 高等代数
试卷类型 A 卷 考试形式 闭卷 使 用 班 级 2005 级
命 题 人 郭学军 考 试 时 间 2006 年 6 月 6 日

题号	一	二	三	总分	阅卷人
得分					

说明：

1. 请将班级、学号、姓名写在试卷左侧装订线外。
2. 本试卷满分100分。考试时间120分钟。

一、 如果你认为下面的某个命题正确，请你证明它；如果你认为某个命题错误，请你举出反例。（50分）

1. 假设 A 和 B 都是 n 阶对称方阵，则 AB 也是 n 阶对称方阵。（10分）

2. 假设 A 和 B 都是 n 阶实对称方阵，且 $B = A^3$ ；如果 B 是 n 阶正定方阵，则 A 也是 n 阶正定方阵。（10分）

姓名 _____
学号 _____
班级 _____
装订线

3. 如果复方阵 A 相似于 A^2 ，则 A 相似于 A^3 。（10分）

4. 如果复方阵 A 的秩等于 A^2 的秩，则 A 的秩等于 A^3 的秩。（10分）

5. 设 A 是一个 n 阶复方阵。如果存在 n 阶复方阵 B 使得 A 相似于 B^2 ，则存在 n 阶复方阵 C 使得 A 相似于 C^3 。（10分）

二、 计算题（40分）

1. t 取什么值时，二次型 $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 是正定的？（10分）

2. 求正交矩阵 T 使得 $T'AT$ 成对角形，其中 A 为

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

（10分）

3. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是复线性空间 V 的两组基, 它们的对偶基分别为 $f_1, f_2, \dots, f_n; g_1, g_2, \dots, g_n$ 。如果从 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵是

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

则从 f_1, f_2, \dots, f_n 到 g_1, g_2, \dots, g_n 的过渡矩阵是什么? (10分)

4. 求下面这个复方阵的若尔当标准形

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}。 \quad (10分)$$

三、证明题（10分）

1. 设 A, B 是两个 $n \times n$ 的正定方阵，且 $B - A$ 半正定。则 $A^{-1} - B^{-1}$ 也是半正定方阵。（5分）

2. 设有 A, B, C 是3个 n 阶复方阵， B 和 C 没有公共的特征值，而且 $AB = CA$ 。求证 $A = 0$ 。（5分）