

商务新知译丛

# 一个数学家的辩白

〔英〕G.H.哈代 著



商务印书馆

商务新知译丛



# 一个数学家的辩白

〔英〕G·H·哈代 著  
王希勇 译

商务印书馆

2007年·北京

# 目 录

前言 C. P. 斯诺.....	1
序言 .....	45
正文 .....	46
注解.....	106

那天晚上，在基督学院的高级餐桌上，除了哈代做客吃饭之外，一切都与往常没有什么不同。哈代刚刚以萨德雷里安 (Sadleirian) 讲座教授的身份回到剑桥。我从剑桥的年轻数学家那里听到一些有关他的事情，他们说，他们都为哈代回来而感到欢欣鼓舞，哈代是个真正的数学家，不像物理学家经常说起的狄拉克和玻尔那种意义上的数学家：哈代是纯而又纯的数学家。同时，哈代从不因循守旧，他古怪、激进，愿意与人谈论任何事情。在1931年，“明星相”这个词还没有在英语中使用开来，但在后来的时代，他们一定会说，哈代以某种不可名状的方式具有“明星相”。

因此，我从高级餐桌的较低处一直打量着他。他那时刚刚步入五十岁，皮肤被阳光晒得好像有了北美印第安人的那种铜色，他的头发已经灰白。他的脸很漂亮——高高的颧

骨，瘦削的鼻子，超凡脱俗、冷峻，不过在开怀大笑、面部肌肉抽搐时便不复如此。他有一双暗棕色的眼睛，像鸟的眼睛一样明亮——在具有理性思维天才的那些人当中，这样的眼睛倒也没有什么不寻常的。那个时候，剑桥遍地都是与众不同和出名的面孔——然而即使如此，我也认为，哈代在那天晚上是非常突出的。

我不记得他穿了什么。他的长袍里面穿的极有可能是运动衫和灰色法兰绒裤子。像爱因斯坦一样，他的穿着总是随自己的意；但他不像爱因斯坦，他喜欢昂贵的丝织衬衫，所以常常变换自己的日常穿着。

晚餐之后，我们围坐在公共休息室的桌前喝酒，这时有人说，哈代想同我聊聊板球方面的事情。其实，我在一年前才被选入板球队，但由于基督学院当时只是个小学院，所以即使是年轻成员们的娱乐，也会很快变得尽人皆知。我被领过去挨着哈代坐下。我并没有被引荐给他。如同我后来注意到的，哈代在所有正式场合都很害羞、拘谨，害怕引荐之类的事情。他只是微微低头致意，没有任何开场白就径直开始说道：

“听说你对板球挺在行，是吗？”我回答说是的，我懂一些。

他的问话立刻使我像是在参加一场严苛的口试。他问我打板球吗？我是哪类球员？我有一半是猜测到，他很厌烦当时在学术圈子里很常见的那些痴迷地研究板球、但却从不打板球的人。我给他看我的诸如证书之类的东西，他像是发觉我的回答还算得上差强人意，便

继续问我更多战术方面的问题。在一年前(1930年)的国际板球锦标赛决赛<sup>①</sup>中我会选谁当队长?如果队员们认定我是能够挽救英格兰队的人,我的战略和战术会是什么样的?(“如果你足够谦逊,你可以充当不上场比赛的队长”)等等,浑然未觉桌旁还有其他的人。他太投入了。

由于后来我们接触的机会足够地多,我知道了哈代不相信直觉或印象,无论是他自己的还是其他人的直觉都是如此。在哈代看来,评价他人学识的唯一途径,就是查问他。这对数学、文学、哲学、政治以及你乐意的任何事情,都毫无例外地奏效。如果一个人吹了牛,但在受到盘问时畏葸不前,那他就只能怨自己了。在哈代杰出和专注的头脑里面,重要的事情总是要放在优先的位置。

对于哈代来说,在休息室的那个夜晚,非做不可的事情只不过是了解我是否将是个可以接受的板球伙伴,其余的一切皆无关紧要。最终,他带着巨大的魅力和孩子般的坦诚微笑着说,费纳(大学的板球场地)在下个赛季也许变得完全可以接受了,因为可以指望我们在那里进行有意思的谈话了。

因而,正像我把与劳埃德·乔治(Lloyd George)的相识归因于他对颅相学的热衷一样,我认为,自己之所以能同哈代建立友谊,乃是因为我青年时代在板球上

---

<sup>①</sup> 这是起初只由澳大利亚和英国参加的板球比赛,现在参加者则扩大到了英联邦成员,每两年举行一届。——译者

花费了过多的时间。我不知道该怎么评价这件事。不过，我以为这更主要的还是幸运——与哈代的友谊是我一生中可以想象得到的最珍贵的友情。正如我已经提到过的，哈代的心智是杰出的和专心致志的：达到了如此之高的地步，以至于周围任何人的头脑都显得有些糊涂，有点沉闷和混乱。哈代以自己惯有的清晰性说，他不是如同爱因斯坦、卢瑟福那样的大天才；如果“天才”这个词有什么意义的话，他根本就不算什么天才。他说，他至多在一个短时期内是世界上排名第五位的最好的数学家。由于哈代的人格与其心智一样，令人赏心悦目和坦诚，他经常表明下面这个观点：他的朋友和合作伙伴利特伍德（Litterwood），是可以见到的比他更有支配力的数学家；在最伟大的数学家拥有自然天赋这样的意义上，他的门生拉曼努安（Ramanujan）真正拥有一种自然天赋（虽然程度不及那些最伟大的数学家，而且发挥得也不如他们淋漓尽致）。

人们有时认为，在说到他的朋友们的时候，哈代贬低了自己。哈代确实很大度，尽可能地远离嫉妒。不过我认为，如果不接受他的判断，人们就会错认他的品质。我乐于相信他自己在《一个数学家的辩白》中的说法，既自豪又谦虚：“在我感到消沉，以及不得不听夸夸其谈、令人厌烦的人讲话时，我仍然可以对自己说，‘好吧，我做了一件你永远不可能做到的事情，那就是在一些事情上，我与利特伍德和拉曼努安平起平坐地合作过。’”

不管怎么样，他的准确地位必须留给数学史家去评定（虽然这件事是几乎不可能做得很好的，因为他最好的工作中有那么多都是与别人合作完成的）。然而，还有一件事——在这件事上，他更加明显地超过了爱因斯坦或卢瑟福或任何伟大的天才：那就是他把任何一项智力上的成就，大的或小的或仅是修饰性的，都转化成了艺术品。我想，正是这种天赋，使他几乎在不知不觉间传播了智力活动带给人们的愉悦。当《一个数学家的辩白》初版时，格拉汉姆·格林（Graham Greene）在一篇评论中写道，与亨利·詹姆士的笔记一样，这本书再好不过地描写了一个有创造性的艺术家是什么样子的。请想一想哈代对他周围人的影响吧，我相信，这会是一个旁证。

哈代 1877 年出生于一个普通的职员家庭，他的父亲克兰利是当时一所很小的公学（英国的私立学校）的会计和美术教师，他的母亲是林肯教师进修学院的高级教师。二人都很有天赋，且都偏好数学。所以对于哈代，也正如对于大多数数学家那样，数学上的遗传基因是不成问题的。他童年的大部分时间都不像爱因斯坦，属于典型的未来数学家的童年。在他开始学说话或更早一些时候，他即表现出了惊人的高智商。才两岁时他就写出了大至几百万的数字（这是具有数学能力的一个惯常标志）。当他被带到教堂时，他将赞美诗中的数字作因数分解以自娱：从那时起他养成了做数字游戏的习惯，由此导致了拉曼努安病床前感人的一幕：这个



场景非常有名，不过我将在后面无可避免地重复说到它。

那是个开明、优雅、博学的维多利亚式童年。哈代的父母可能有点固执，但也非常和善。在这样一个维多利亚式家庭中度过的童年时代，是我们所能想见的最温暖的时光了，虽然在智力上，对哈代的要求可能多少有些过于严苛了。哈代的童年只在两个方面是不同寻常的。首先，他在非常小的时候，远未到12岁时，就经历了强烈的害羞感。他的父母知道他绝顶聪明，他自己也知道这一点。他的所有功课在班里都是顶尖的。但是，成为班里顶尖学生的后果是，他不得不在全班面前去领奖，这却是他无法忍受的。一天晚上，我们一同吃饭的时候，他说他经常故意答错问题，以避免这个无法忍受的仪式。虽则如此，他做假的能力往往很差：他总能得奖。

他的害羞感后来逐渐打磨掉了许多。他变得有好胜心了。正如他在《一个数学家的辩白》中所说：“我不记得作为一个男孩，自己曾经对数学感到过任何的激情，至于我可能成为数学家这类想法，根本说不上是崇高的。我只是由于考试和奖学金才想到数学：因为我想胜过其他男孩，而成为数学家似乎是我能够最终实现这一目标的方式。”然而，他不得不以过分敏感的性格处世。他好像天生就极为腼腆。他不像爱因斯坦。在达到自己崇高的权威地位之前，爱因斯坦不得不先在对外部世界的研究中，克制自己强有力的自我；而哈代则

不得不增强本身防护力不足的自我，在随后的生活中，这屡屡使他在不得不表明道德立场的时候固执己见（爱因斯坦从不这样）。另一方面，这也赋予了哈代内省的洞察力和悦人的坦诚，使他能绝对简洁地评论自己（爱因斯坦从不能够）。

我相信，他的气质中的这种冲突或紧张状态与他行为中某种奇怪的痉挛有关。他是个标准的反自恋主义者。他忍受不了照相：据我所知，他只有区区五张快照存留于世。他不让屋子里有任何镜子，甚至连刮胡子用的镜子都没有。他住旅馆的时候，第一个举动就是用毛巾捂上房间里所有的镜子。要是他的脸长得像滴水嘴怪兽那个样子，这个举动一定够古怪的。而由于在整个一生中，哈代都比一般人要好看得多，从表面上看，这个举动可能就显得更加怪异了。——不过，当然了，并不像外在的观察者所想象的那样，自恋与反自恋与外貌其实是没有任何关系的。

哈代的这种行为显得很古怪，而实际上也确实如此。哈代与爱因斯坦是不同类型的人。那些长时间与爱因斯坦在一起的人，如英菲尔德，发现认识爱因斯坦的时间越长，他就越发显得陌生，越不像他自己。我肯定自己也会有同感。而对于哈代，事情则恰好相反，他的行为常常与我们的不同，而且是很奇怪地与我们不同：然而，二者之间的天性并没有什么大不了的差别，只不过哈代的天性上面像是放置了一个上层建筑——它更为精致、更少被遮蔽、更强有力。

哈代童年时代的另一个特征更为世俗化一些。然而，那却意味着，在他整个一生中，现实生活方面的阻碍都被扫除得一干二净。哈代坦诚得清澈见底，大概是最不吝惜金钱的人了：他知道特殊待遇意味着什么，他也知道自己拥有特殊待遇。他的家庭没有太多的钱，只有学校教员的收入，但是他们与 19 世纪末英格兰最好的教育有密切的联系。在英国，那种特殊种类的教育体制总是比任何数量的财富都更为重要的。奖学金现成地摆在那儿——如果人们知道怎样获取它的话。年轻的哈代没有失去哪怕是最微小的机会——年轻时的威尔斯和爱因斯坦曾失去过。从 12 岁开始，他就只需要生长下去，他的天赋自会受到眷顾。

事实上，12 岁时哈代在温彻斯特被授予一份奖学金——温彻斯特是当时和其后很长一段时期内英国最好的数学学校，这仅仅是由于他在克兰利做的一些数学工作所致。（顺便提一下，人们想知道，是否今日还有任何伟大的学校会如此灵活呢？）他在那里的一个甲等班学数学：在古典数学方面，他学得和任何其他尖子学生一样好。后来，他承认自己接受了很好的教育，不过是很勉强地承认的。除了学校设置的课程之外，他不喜欢这所学校。像其他维多利亚式私立学校一样，温彻斯特是一个相当艰苦的地方。在一个冬天他几乎死去。他很羡慕利特伍德在圣保罗当日生，住在自己家里，受到无微不至的照顾，也羡慕其他一些在只开设文化课的学校上学而轻松自由的朋友们。离开温彻斯特之后，哈

代再也没有回去过。不过，他是在走上了正轨之后，揣着一笔三一学院的公共奖学金，没法不离开温彻斯特的。

对温彻斯特，哈代怀有一种奇怪的不满。他是个有出众目力的天生的球类运动员。他 50 岁时在室内网球场还能击败校队的二线队员。60 岁时我还见过他练习时往板球网里击出过令人吃惊的好球。可是在温彻斯特，他没有受到过甚至只是一个小时的训练：他的击球方式存在不足之处。如果被训练过，他认为，他就会成为一个真正好的击球手，虽说算不上很一流，但也差不到哪去。我相信，就像他对自己的其他判断通常是正确的一样，这个判断也是非常正确的。让人感到奇怪的是，恰恰是在维多利亚式的竞技狂热达到了顶峰的时期，这样一位天才却竟然完完全全地被遗漏过去了。我想其中的原因是，没有人认为从学校的顶尖学者里寻觅运动员是值得的，他们看起来是那样弱不禁风和憔悴，又是那样充满戒心和腼腆。

对于哈代那个时代的温彻斯特校友会成员来说，进入新学院(New College)是很自然的事。那不会使他的职业生涯有什么不同(然而，由于他喜欢牛津比喜欢剑桥更多一些，他本有可能在那儿待一辈子，果真那样，那我们当中的许多人就会错失与他共事这一乐事了)。他决定转而去剑桥的三一学院，如他在《一个数学家的辩白》中，诙谐然而又带着他惯有的不加掩饰的真实性所描述的，是因为“大约在十五岁的时候，我的抱

负(以一种很偶然的方式)来了个大转弯。有本‘阿兰·圣·奥宾’(实际上是弗朗西斯·马歇尔夫人)写的名为《三一学院的研究员》的书,是一套被认为是描写剑桥学院生活的丛书中的一本……书里面有两位男主角,一号男主角叫弗劳尔斯(Flowers),几乎是个完人;而二号男主角叫布朗(Brown),很有些女性化。两人都发现学院生活中有许多危险……弗劳尔斯度过了所有的麻烦,是数学学位考试的第二名和古典语文优等生,自动转成了研究员(这跟我所想的一样)。而布朗则屈从于诱惑,使父母破产,自己嗜好饮酒,在一次暴风雨中,在牧师的祈祷下被从酒狂中拯救过来,即使连获得一个普通学位都是困难重重,最终成为了一名传教士。他们的友谊并没有因为这些不幸的事件而破裂,当第一次在高级休息室里边啜饮波尔多葡萄酒,边咀嚼核桃仁的时候,带着深切的同情,弗劳尔斯的思绪转到了布朗身上。

“弗劳尔斯现在是一个相当得体的教员(就‘阿兰·圣·奥宾’所能够刻画出来的而言),但就连我这并不精明的头脑都不会承认他有多么聪明。既然他能够做到那些事情,我为什么就不能呢?特别是休息室里的最后一幕,彻底把我迷住了,自从那时起,直到我获得一份,数学对我主要就意味着三一学院的教职。”

在22岁时,在数学荣誉学位考试第二部分得到了最高成绩之后,哈代及时地得到了一份教职。在此过程当中,发生了两个小小的变化。第一个是神学上的,以

高度维多利亚式的方式发生。哈代决定——我想这发生于他离开温彻斯特之前——不信仰上帝。对他来说，这是个说一不二的决定，就像他心中所有的其他概念一样特出和清楚。三一学院的礼拜仪式是强迫性的。哈代——毫无疑问以他自己腴腆的肯定态度，告诉教务长，他不能诚心诚意地参加仪式。这个教务长想来一定是个神气的小头目，坚持哈代应该写信给他的父母，告诉他们这些事情。哈代的父母是正统的宗教信仰者，教务长知道，而哈代更是明白，这个消息会给他们带来痛苦——这种痛苦对于 70 年之后的我们，是不能轻易想象得到的。

哈代与他的良心搏斗。他不够世故以避开这个问题。他不够世故，以接受老于世故的朋友，如乔治·杜维兰和戴斯蒙·麦卡锡的劝告，他们应该知道怎样对付这事儿。这是哈代某天中午在费纳球场告诉我的，因为那件事的伤痛仍然在袭扰着他。最后他还是给父母写了信。后来他对宗教的不信仰态度公开化了，而且非常激烈，部分原因即在于此。他拒绝参加大学里的任何礼拜仪式，甚至是正式的事情如选举校长也不例外。哈代的朋友中包括牧师，但上帝是他个人之敌。所有这些事情都回响着 19 世纪的声音，但是，如果不把哈代的话当真——就像经常发生在哈代身上的事情那样，人们就会弄错。

哈代同样将此类事情变成了玩闹。我记得 30 年代的某一天看见过他享受了一次小小的胜利。事情发生

在一场板球比赛里。运动员们在洛德体育场比赛，那是一大早举行的一场比赛，阳光穿过看台照过来。一位对着球场视线不好那一端的投手抱怨说，他的眼睛被不知从什么地方来的反光晃得看不见，裁判感到大惑不解，于是在运动员的助视屏旁翻来覆去寻找原因。是汽车吗？不是。是窗户吗？不是。球场那边没有窗户。最后，带着合情合理的喜悦，一位裁判确定了反光来自于何处——它来自于位高大牧师硕大的胸佩十字架。裁判彬彬有礼地要求牧师将这个十字架摘下来。一旁观看的哈代在摩菲斯特式的亢奋中笑得直不起腰来。那天午饭时间，他没有空暇吃饭：他在给每一位神职朋友写明信片（明信片和电报是他最喜欢的联络方法），宣扬这件事。

→ 12

不过，在哈代同上帝及其代理人的斗争中，胜利者并不总是固定的一方。大约是同一时期，在费纳的一个宁静和可爱的五月的晚上，六点的钟鸣声弥漫了球场。“这很不幸”，哈代说道，“我不得不在罗马天主教堂的钟声中度过生命中最快乐的一些时光。”

哈代大学生涯中第二个小小的不快，是职业上的。几乎从牛顿那个时代开始，并且在整个 19 世纪，剑桥都被老式的数学荣誉学位考试主宰着。英国人比其他人（或许除了皇朝中国）总是更加相信竞赛：他们以传统的公平性操作这些考试；但是在决定考试内容的时候，常常表现得相当死板。——顺便说一句，这在今天也没有什么不同。处于全盛时期的这种数学荣誉学

位考试，当然也是如此。一般而言，这种考试中提出的问题都具有某种程度的机械性的难度——但非常遗憾的是，它们却没有给候选者表现其数学想象力和洞察力，或者任何一位有创造力的数学家所需素质的机会。尖子候选者(数学荣誉学位考试优胜者——这个词至今还在用着，表示一流学生)按照成绩严格排序。当某个学生成为第一名时，他的学院就举行庆祝仪式：前二名或前三名优胜者立即被选拔为研究员。

这一切都很具有英国特色。正如哈代成为一名出色的数学家、并且与他不屈不挠的同盟利特伍德一道致力于废除这一体系时，以他雄辩的清晰性所指出的：它只有一个不利之处：100年来卓有成效地毁掉了英格兰的严肃数学。

在三一学院的第一学期，哈代发现自己被这个体系攥得紧紧的，通过数学练习课，他就像被当做赛马一样地训练着，他知道这些课程在19世纪是毫无意义的。他被送到一个著名的导师那里，大多数潜在的第一名优胜者都送到他这里来。这位导师知道应试时所有的障碍，应试者所需要的所有技巧，同时却对课程本身极端地缺乏兴趣。在这一点上，年轻的爱因斯坦是一定会反抗的：他会要么离开剑桥，要么在后面的三年里不做任何走过场的工作。不过，哈代生于一个具有更浓烈职业味道的英国氛围中(有好处也有坏处)。在考虑转而学习历史之后，他感到自己发现了一位真正的数学家在教自己数学。在《一个数学家的辩白》中，哈代对他



表达了敬意：我的眼界首次被拉乌 (Love) 教授打开了，他教了我几个学期，并且给予我关于分析的第一个严格概念。但我最要感激他的是——他终究主要是一位应用数学家——劝我读约当著名的《分析教程》：我永远也忘不了读这本了不起的著作时受到的震撼，它对我这个时代的许多数学家都是第一个激励，并且，在读它的时候，我第一次知道了数学的真谛。从那时起我就开始成为一名真正的数学家，对数学有了死心塌地的抱负，对数学生出真正的热情了。

哈代在 1898 年是数学荣誉学位考试的第四名。这稍稍地刺激了他——他惯于袒露自己的思想。他足以称得上是个天生的竞争者，觉得虽然竞赛是可笑的，但仍应赢得它。1900 年他参加了荣誉考试的第二部分，这是一个更值得尊重的考试，获得了应有的位置，也获得了他的研究员职位。

打那以后，哈代的生活实质上就定型了。他知道自己的目的是给英国的数学分析注入严格性。他没有偏离过他称之为“我生活中这一伟大的、永恒的快乐”的研究工作。对于他应当做什么事情，他没有任何担心。他以及别人都没有怀疑过他的巨大天才。33 岁时他被选入皇家学会。

在许多意义上，哈代都远比别人幸运。他不用为生计操心，从 23 岁起，他就拥有一个人想要拥有的全部闲暇，拥有他所需要的金钱。在 1900 年代，三一学院的单身教师是衣食无忧的。哈代对钱很敏感，只有在觉得

万不得已时才花钱（有时为了单一的用途，如 15 英里的出租车费），然而却根本不会作投资。他玩自己的游戏，沉迷于自己的古怪事情当中。他生活在世界上最好的智力伙伴群中——G. E. 摩尔 (G. E. Moore)，怀特海 (Whitehead)，伯特兰·罗素 (Bertrand Russell)，特里夫里安 (Trevelyan)，这些三一学院里的高等社群，很快在布鲁姆斯伯里艺术圈中获得了艺术方面的充实（哈代与布鲁姆斯伯里艺术圈的联系，既有私人友谊这一方面的因素，也有兴趣相投这一方面的因素）。在一个精英圈子里，他是最杰出的年轻人之一——而且，虽不惹眼，他却是最不受压抑的人之一。

现在我要预告后面将要说些什么了。哈代直至终老，一直保持着只有出色的年轻人才具有的生活方式。他的精神亦是如此：他的游戏，他的兴趣，都是年轻教师所特有的那种轻松式的。像很多直到 60 岁还保持着年轻人兴趣的人一样，他最后的岁月是他一生中比较暗淡的部分。

他一生的大部分时间过得都比我以及大多数人快乐。他有很多朋友，朋友的类型之多令人惊奇。这些朋友必须通过他的某些私人性的考验：他们需要具备一种他称之为“spin”<sup>①</sup>的特质（这是个板球术语，无法解释：它暗含着会以某种拐弯抹角或反诘的方式说话。对

---

<sup>①</sup> 板球中指球“旋转”。用于政治等领域中时，大致是指通过玩弄话语，把人们诱导到有利于自己的结论上去，这里勉为其难地把它译为“绕弯子”。——译者

于现世的公众人物来说，马克米兰和肯尼迪将会在这一项上得高分，而邱吉尔和艾森豪威尔则不会)。但是他宽容、忠诚、极为活跃，以一种我无法展示的方式喜爱自己的朋友。我有一次不得不在一大早去看他，早晨往往是他制订的研究数学的时间。他坐在桌前，以漂亮的字体书写着什么。我叨咕了一些希望我没有打扰他之类的俗套的客气话，他突然情不自禁地恶作剧般地微笑起来：“正像你应该注意到的那样，答案是：你打扰了我。不过我总是高兴见到你的。”在16年中，我们相互了解，他从不说不任何比这更感情外露的话：除了临终时在病床上告诉我，他期待我的造访。

我认为大多数他的亲密朋友都会有我这样的感受。不过，在他的一生当中，他散散落落地有过两三次其他不同种类的关系。这些都是强烈的感情，很打动人，不是肉体的而是高尚的。我所知道的一次就是对一个小伙子，他的性情像哈代一样，非常敏感。虽然我只是道听途说，但我相信其他人也会和我一样这么看的。对于我这一代人的大多数人来说，这种感情关系似乎要么是令人不满，要么是不可能的。哈代的感情关系则既不属前者，也不属后者。并且，除非人们视之为当然，否则就无法去理解像哈代那样的人——他们很少见，但还不至于像白犀牛一样少见——的脾性，也不理解他那个时代牛津的名人圈子。哈代没有得到我们大多数人都会禁不住去寻求的满足，但是他知道自己非同寻常地出类拔萃，且他并未对这一点感到不快。他的

内心生活属于他自己，也是非常丰富的。悲哀在他生命的最后时刻出现了，除了他亲爱的姐姐，他再也没有任何亲近的人。

哈代在《一个数学家的辩白》——这本书虽然有高昂的精神，却是一本绝望的悲伤之作——中以反讽式的斯多葛主义腔调说道，当一个有创造力的人失去了去创造的能力和愿望之时，“这是个遗憾，不过在那种情况下，他总归不再有多重要了，为他而烦恼将是愚蠢的。”这就是他如何对待数学之外的个人生活的。数学是他的价值的证明。沉浸在有他相伴的欢快当中时，人们很容易忽视这一点，正像在爱因斯坦的道德激情之中，人们很容易忘掉，对于爱因斯坦来说，他的价值在于对物理规律的探索上。他们两人都没有忘记过这一点。这是从年轻时代一起到终老之时他们生活的核心。

哈代不像爱因斯坦那样很快地就获得成功。他早期的论文，在 1900 年至 1911 年间，已经好得足以使他进入皇家学会，并且为他赢得世界性的声誉：可是他并不把它们看得很重。这仍然不是错误的自谦：那是个知道自己工作的哪一处有价值、哪一处无价值的大师的判断。

在 1911 年，哈代开始了与利特伍德持续 35 年之久的合作。在 1911 年他发现了拉曼努安，开始了另一个合作。他所有的主要工作都是与这两个合作者完成的，大多数是和利特伍德。这是数学史上最著名的合

作。在其他科学领域里,或者,据我所知,在任何其他的创造性活动的领域中,都没有过这样的合作。他们共同撰写了几乎 100 篇论文,相当多的部分写得都“处于布拉德曼级别”。在哈代晚年,与哈代关系不密切(也不熟悉板球)的数学家们总是重复说,哈代最高的赞语就是“处于霍布士级别”。事实上并非如此,那样讲是很牵强的,因为霍布士是他的爱犬中的一只,他只好改变赞语的排序。我曾有一次收到他的一张明信片,可能是在 1938 年吧,上面说“布拉德雷是整个一个等级,高于任何曾经出现过的球手。如果阿基米德、牛顿和高斯是处在霍布士级别的话,那我就不得不设想一个高于他们的级别,我发现,这是非常难以想象的——他们最好是从现在起就被转到布拉德曼级别。”

— 18

哈代—利特伍德的研究主导英国纯粹数学,甚至全球纯粹数学研究的很多部分,有整整一代人之久。数学家们告诉我,现在就说他们在什么程度上改变了数学分析的进程,尚属过早,也无法估计一百年之后他们的工作会有多大影响。但对于这些工作的持久价值,则不存在任何疑问。

我已经说过,哈代他们的合作,是最伟大的了。可是没有人知道他们是怎么合作的,如果不是利特伍德告诉我们的话,那么谁也不会知晓。我已经讲过哈代的判断:利特伍德是他们二人中更有支配力的数学家。哈代有一次写道,他知道“没人能够像利特伍德那样,同时集洞察力、技巧和支配力于一身”。利特伍德过去是、

现在也是比哈代更接近于普通人的人，他同样有趣，但可能更为复杂些。他从没有像哈代那样，对于精炼已有的智力成果有胃口，所以较少出现于学术场合的中心。这招致了从欧洲数学家那里传来的笑话，诸如哈代捏造了利特伍德，以便在他对某个定理的证明错了时，让利特伍德来承受人们的批评。事实上，利特伍德是一个至少与哈代本人同样固执的人。

乍看起来，他们两人中谁都不像是最容易结交的人。很难想象他们中哪一个会首先提议进行合作，可是他们中必定有一位先这样提出来了。没有人能够提交任何证据，以表明他们是怎么开始合作的，在他们最有创造力的岁月中，他们不在同一所大学。据说哈拉德·玻尔（尼尔斯·玻尔的兄弟，他自己也是个优秀的数学家）曾说过，他们的原则之一就是：如果一个人给另一个人写了封信，收信者没有义务回复，甚至没有义务阅读来信。

对此我也没什么可补充的。在许多年的时间里，哈代对我谈论过几乎是任何可以想象得到的话题，只是从未提到过与利特伍德的合作。当然了，他说过，那是他的创造生涯中重要的幸事，他用我已经说到过的那些词语讲起利特伍德，但是对于他们的合作程序是怎样的，他从未透露出一丝一毫。我所懂得的数学不多，不理解他们的论文，但是我从中挑出了他们的一些用语。如果哈代确曾在无意中透露出任何有关他们合作方式的东·西的话，我想我是不会漏掉它们的。我相当肯

定，上面的这个秘密是他们故意造成的——这不符合哈代在大多数人看来都更属于私人事务上的惯常做法。

对于如何发现拉曼努安，哈代一点都没有保密。他写道，那是他一生中最为罗曼蒂克的事情。不管怎么说，那都是个令人击节赞叹的故事，而且它为故事中的每个人（有两个人例外）都增添了光彩。在1913年初的一个早晨，哈代在餐桌上的信件当中，发现了一个贴着印度邮票的信封，既大又不干净。打开之后，他发现了几页无论如何也算不上新的稿纸，上面是一行行的不像是英国人手写的符号。哈代毫无兴致地扫了一眼。他当时是36岁，已经是世界著名数学家了。他早已发现，世界著名的数学家们遇到怪人的机会多得不得了。哈代习惯于收到陌生人的手稿——诸如证明埃及大金字塔先知的智慧，犹太教长老的启示，或者培根穿插在所谓莎士比亚戏剧中的密码等等的手稿。

所以，对于眼前这封信，哈代首先感到的是厌烦。他瞥了一眼这封用磕磕巴巴的英文写的、由一个不认识的印度人署名、请求他对这些数学发现发表看法的信：这些稿件好像都是数学定理，大多数看上去又乱又怪，其中两个定理还是已知的，但却像是原创的那样被安插在里面，而且没有提供任何种类的证明。哈代这时不仅仅是厌烦，而且被激怒了。这看起来像是某种诡异的骗局，他把这些手稿放到一边，继续他的日常工作。他的日常工作程序在一生中都没有改变过，所以我们

能够将这一场景重构出来：首先是在吃早餐的时候阅读泰晤士报。这封信件的事情发生在一月份，如果那时有什么澳大利亚板球赛的赛况，他就会在一开始先阅读它们，以清晰的头脑和强烈的专注研究它们。

梅纳德·凯恩斯开始其学术生涯时是数学家，他是哈代的朋友，有一次曾调侃哈代：如果哈代用与读板球比赛的赛况报道同样的专心，每天花半小时读股票交易指数，他就不可能不是富翁了。

从上午9点到中午1点，除非发表讲演，哈代都是在做自己的数学研究。对于数学家来说，一天4小时的创造性工作，几乎是人的智力的极限——哈代总是这么说。他午饭吃得很少，是在餐厅吃的。午饭之后，他在学院的场地打一场室内网球（如果是夏天，他会去费纳看板球赛）。到了下午，他就溜溜达达地回到自己的房间。然而，在那个特殊的一天，虽然他的日程表没有改变，他内心里的事情却不是按照计划进行的。那封印度手稿一直在他内心里面翻腾，影响了他完整地享有运动带给自己的乐趣。那些乱七八糟的定理都是他以前从未见过且想象不出来的。那是一个天才的骗局吗？他的心中浮现出一个问题。——这是哈代的心灵，这个问题于是以警句般清晰的思考形成了：一个天才的骗局比一个不知名的天才数学家更有可能？很明显，答案是否定的。回到三一学院他的房间之后，他再一次审阅起那份手稿来了。他给利特伍德通了消息（可能是用口信，肯定不是通过电话，因为电话也像一切机械设计，



包括自来水笔，他都很不信任)，他们一定在饭后就这份手稿交换了看法。

吃完饭的时间可能已比平常迟了一些。哈代喜欢喝点儿酒，可是，尽管“阿兰·圣·奥宾”的美景燃起了他年轻时的想象，他却意识到，自己在休息室里并不能真正地享受啜饮波尔多葡萄酒和咀嚼核桃仁的乐趣。利特伍德远比哈代更懂感官享受，他能享受此一乐趣。不管怎么样，在9点钟或9点半的光景，他们待在哈代的某间屋子里，那份手稿则摊在他们眼前。

这是每一个人都恨不得自己也置身其中的场景。哈代兼具冷峻的清晰思维与智力挥洒（他非常英国化，可是在论证时，他表现出拉丁思维经常假设的只有拉丁思维才具有的特性）于一身，利特伍德富有想象力，有支配力，有幽默感。很明显，这件事没费他们多长时间就被搞清楚了，在午夜之前他们就已知道、而且知道得很确定：手稿的作者是天才，这就是那个晚上他们所能作出的判断。只是到了后来，哈代才认定，从天生的数学天才这一点来看，拉曼努安处在高斯和欧拉的级别上。不过他不敢期待这是真的，——由于拉曼努安在接受教育方面的缺陷，而且，由于在数学史的谱系中登上舞台的时间太迟，拉曼努安是很难做出与他们同样程度的贡献的。

上面所发生的这一切，让人感觉很容易实现：伟大的数学家本来就应该能够做出那样的判断。不过，我提到过，有两个人并没有体面地出现在这个故事里面。在

关于拉曼努安的事情上，出于义气，哈代在所说和所写的东西中，都隐去了这件事。所提到的这两个人目前都已去世多年，是到了说出真相的时候了。事情很简单，哈代不是第一个收到拉曼努安寄来的手稿的杰出数学家。在他之前，还有两位数学家也都收到过拉曼努安的手稿，他们都是英国人，都具有最高级别的专业水准。他们每个人都退回了这些手稿，而未加以任何评论。我不认为在拉曼努安成名后，历史会在意这两个人说过什么——如果在这件事上他们曾说过什么的话。任何曾被送来过自己并未索要的东西的人，都会在暗地里同情他们的。

不管怎么样，哈代在次日就付诸行动了。他下定决心：必须把拉曼努安接到英格兰。钱不是主要问题。三一学院一般习惯于支持非传统出身的天才（学院前几年对卡皮萨做了同样的事）。一旦哈代有决心，那就没有任何人类的力量能够阻挡拉曼努安来到英格兰，但是他们需要得到某种程度的超人类的力量的帮助。

拉曼努安是马德拉斯（Madras）一个贫困的牧师，他同妻子一年总共只有 20 英镑的收入。但是他也是婆罗门，严苛地遵守宗教习俗，他母亲甚至更为严格。他似乎不大可能冲破这些禁区，跨越大洋来到英格兰。幸运的是，他母亲对纳马卡（Namakkal）的女神怀着最高的敬意。一天早晨，拉曼努安的母亲做出了一个令人震惊的宣告：她前一天夜里做了一个梦，梦见她看到儿子与一群欧洲人同坐在一个大厅里，纳马卡的女神已经

命令她不要阻挡儿子实现一生的目标了！这件事，据拉曼努安的印度传记作者所言，对于所有相关的人都是个令人振奋的惊喜。

1914年，拉曼努安抵达英格兰。根据哈代的探察（虽然在这个方面我不是很相信他的洞察力），虽然在打破宗教禁令上经历了重重困难，但实际上拉曼努安并不怎么相信神的教义——除了模糊的泛神论意义上的善心之外，他并不比哈代本人更相信神。但是拉曼努安确实虔信宗教礼仪。当三一学院把他选进学院后——在四年之内他成了研究员——他根本没有什么“阿兰·圣·奥宾”式的纵情。哈代经常发现他像举行仪式似地换穿宽松的裤子，用一个煎锅在他的房间里惨兮兮地烹制蔬菜。

— 24

很奇怪，他们联手工作是很动人的。哈代没有忘记拉曼努安是个天才，但却是个即使在数学上也没怎么接受过训练的天才。拉曼努安未能进入马德拉斯大学，因为他英文不佳，无法被录取。据哈代的说法，拉曼努安总是和蔼可亲，有一副好脾气。但是无疑，他往往发现，拉曼努安在数学以外的事情上所说的话难以理解——还不仅仅只是稍有一点儿那么难以理解。拉曼努安善良、友好、朴实的脸庞上，总是挂着耐心的微笑，倾听着。即使在数学中，他们两人也无法避免由于所受教育不同而来的词汇不同的困扰。拉曼努安是自学成才的，如果现代数学上的严格性指的是数学证明的话，那么可以说他根本就不知道什么是现代严格性。在某

个不经意的时刻——这并不表明哈代的性格，哈代写道，如果拉曼努安曾受到过更好的教育，他就不会那么“拉曼努安”了。回复到他擅长的反讽的风格之后，哈代又对此作了更正，说那句话没有什么意思。他说，如果拉曼努安受到了更好的教育，那就会比他现在还要美妙。实际上，哈代被迫教他一些形式数学，就好像拉曼努安是温切斯特的奖学金候选人。哈代说，这是他一生中仅有的经验：对于一个具有最深刻洞察力、但是却完全没有听说过大多数现代数学的人来说，现代数学看起来是什么样的？

不管怎么样，他们合作搞出了五篇最高级别的东西，在里面，哈代显示了他自己卓越的原创性（相对于哈代—利特伍德的合作，这个合作的细节更为人所知晓）。慷慨大方和创造力第一次得到了完整的回报。

这是一个关于人类美德的故事。一旦人们开始表现良好，他们就会表现得越来越好。记住英格兰给予了拉曼努安所有可能的荣誉，乃是非常有教益的。皇家学会在他 30 岁（这即便是对于数学家来说，也是非常年轻的）的时候选举他为研究员。三一学院也在同一年推选他为研究员。他是第一位被给予上面任何一种殊荣的印度人。拉曼努安友善地表示谢意。不过他很快就生病了。在战争期间，让他迁移到气候更温和的地方，是很难做到的。

当拉曼努安躺在普特内（Putney）的医院里面时，哈代常去看望他。正是在其中的一次探望中，诞生了出租

车车号的佳话。哈代坐出租车去普特内，这是他所选择的方便的出行方式。他进入拉曼努安躺着的房间。哈代不合时宜地挑起了谈话，可能是在尚未问候拉曼努安时，哈代就说——而且肯定是他的第一句话：“我想我坐的出租车车号是 1729。对我来说它是个乏味的数字。”拉曼努安回答道：“不，哈代！不，哈代！它是个很有趣的数字，它是可以用两种不同方式，表示为两个数的立方之和的最小数字。”

据哈代记录，这就是他们的交流。这肯定基本上是准确的。哈代是最为诚实的人，而且，像这种事也没有人能编造得出。

在第一次世界大战结束两年后，拉曼努安回到马德拉斯，后死于肺结核。正如哈代在《一个数学家的辩白》中列数数学家时所写：“伽罗华 21 岁去世，阿贝尔 27 岁，拉曼努安 33 岁，黎曼 40 岁……我还没有见过，某个主要的数学贡献是被年过 50 的人所创始的。”

对于哈代来说，如果没有与拉曼努安的合作，1914—1918 年的战争期间就会更为黑暗。——但它也足够黑暗了。它留下了一个伤疤，这个伤疤在第二次世界大战中又被重新揭破。哈代终其一生都抱有激进观点。当然，他的激进与世纪之交的开明是缠绕在一起的。对我这一辈的人来说，似乎时常呼吸着前所未有的轻松无害的气息。

像许多爱德华时代的知识分子朋友一样，哈代对德国怀有强烈的感情。毕竟，19 世纪的德国在教育上拥

有最伟大的影响力。对于东欧,对于俄罗斯,对于美国,正是德国的大学教它们懂得作研究的意义。德国哲学和文学对哈代倒没有什么影响:哈代的趣味太过古典了。但是在大多数方面,德国文化,包括它的社会福利,显得都比哈代自己所处的文化更优越。

哈代不像爱因斯坦,爱因斯坦具有一个政治存在物的远为灵敏的嗅觉,哈代起初对威廉时期的德国没有什么直接了解。虽然他是最少有虚荣心的人,但如果并不喜欢自己在德国比在本国更受赏识的话,他一定是不通情理的。在这个时期有一则很怡人的逸事。希尔伯特,德国最伟大的数学家之一,听说哈代住着三一学院一套不是特别可心的房子(实际上是在惠威尔大院),便迅即字斟句酌地写信给院长,指出哈代是最好的数学家,不但在三一学院,而且在全英格兰都是如此,所以应该住上最好的房子。

正是因为如此,哈代像罗素和许多剑桥的高级知识分子一样,不相信战争会打起来。再则,由于他对英国政客的不信任感根深蒂固,他认为过错多的一方在于英国。他不能为良心上的反叛找到一个令人满意的基础,在理智上哈代的要求过于严格,以致无法寻找到这样一个基础。实际上,他自愿为德比计划服务,但由于医学上的原因被谢绝了。在三一学院他越来越感到孤立,学院里多是甚嚣其上的好战言论。

在过于狂热的复杂环境中,罗素从讲座教授职位上被解聘了(哈代在25年之后对此事写了唯一详细的

记录，以在另一场战争中安慰自己)。哈代的密友在战争中都从他身边离开了。利特伍德在皇家炮兵部队里当一个少尉，作弹道学研究。由于他甘愿漠然处世，他拥有这样的殊荣：在四年战争期间一直都只是个少尉。他们二人的合作受到了妨害，虽然没有完全中断。在难受的学院争吵声中，拉曼努安的工作给哈代带来了慰藉。

我有时想，哈代有一次对同事是有欠公正的。许多同事确是相当狂热，战争期间的人总是如此。但有些人长期忍受着战争，却想保持社会规则继续运行下去。在哈代与某些选举者仅有泛泛之交，而与另一些选举者则连泛泛之交都根本没有的时候，他们却会选举他扶持的拉曼努安，这无论如何都是学院里正直心的胜利。

哈代仍然是极不快乐的。一俟可能他便离开了剑桥。1919年牛津为他提供了一份教职，他立即开始了他一生中最快乐的日子。他与拉曼努安和利特伍德一起，已经做出了很伟大的工作，而现在与利特伍德的合作达到了顶峰。用牛顿的话说，哈代处于“他从事创造的年代的黄金时期”，这个时期在他四十岁出头时出现，对数学家来说已是迟得不同寻常了。

虽然来得如此之晚，这个创造的高峰给予他一种感觉，那就是永恒的年轻。这个感觉对于他而言，比对于大多数人更为重要。他过着年轻人的生活，这是他的第一天性。他打室内网球比以前更多，稳步地提升水平

(室内网球是昂贵的运动，从职业收入中要占去一大块)。他多次访问过美国的大学，很喜欢美国。他是他那个时代少数几位差不多在同等程度上既喜欢美国又喜欢苏联的人士之一。他肯定是他那个时代，或者任何别的时代中，唯一给棒球队管理者们认真地写信，建议对某条规则进行技术性修改的英国人。对于他以及大多数他那个时代的自由主义者，二十世纪是虚幻的曙光。他认为战争的悲惨已经被扫除干净了。

他在新学院自自在在，在剑桥则从来不是如此。牛津温暖的家庭式的交流气氛，对于他非常有益。在一个那时很小、很舒适的学院里，他改进了自己谈话的风格。有一群人都急切地想在饭后听他讲演。他们能够接受他的古怪行为。他们认识到，他不仅是一个了不起的好人，而且也很有趣。如果哈代想玩对话游戏，或者在板球场上玩真正（虽然奇怪）的游戏，他们都准备好了要当陪衬。他们以不经意和富有人情味的方式，对他照顾得过于无微不至。哈代在过去被人称赞，受人尊敬，但是还没有被人们以那种方式过于无微不至地照顾过呢。

似乎没有人会在意——这是爱传播闲话的学院笑话——哈代在他的房间里有一张列宁的大幅照片。哈代的激进主义有点缺少条理，但他却是真心的。如我所解释过的，他生于一个职业家庭，他的一生几乎都是在中产阶级堆里度过的：但他实际上表现得像是个贵族，或者更准确地说，他是贵族浪漫生活的一种形象的表



达。他这种生活态度或许有不少是从他的朋友罗素那里效法过来的,但大多数都是天生的。他的害羞实际上只是表面上的,在内心深处,他其实是无所畏惧的。

他与穷人、与不幸和缺乏自信的人——他们由于种族原因而处于不利境地——相处很好(他发现拉曼努安,是命运的一次典型的安排),丝毫不沾带施人恩惠的态度。他喜欢这些人要甚于那些被他称为“大髋部的人”(large bottomed)<sup>①</sup>:这种描述的心理学意义比解剖学意义更大,虽然十九世纪有一个著名的、由亚当·塞德维克(Adam Sedgwick)创造的三一学院格言:“这个世界上如果没有‘大髋部的人’(large bottom)便没有人会取得成功。”对于哈代来说,这些“大髋部的人”就是自信的、急速膨胀起来的、帝国主义者的英国中产阶级。这个认定包括了大多数牧师、校长、法官以及所有的政治家——只有劳埃德·乔治除外。

仅仅出于对社会表示忠诚,哈代接受了一个公职。在两年时间里(1924—1926年)他是科学工作者协会的主席。他自嘲说,他是个奇怪的被选者,是一个“在世界上最不实用的职业中的最不实用的成员”。但在重要的事情上,他并非像他说的那样不起作用。他有意挺身而出,发挥自己的影响。在很靠后的时期,我开始与弗兰克·库金斯一起工作时,每当回想到我曾恰好有两位朋友,即他与哈代,在工会运动中任职,都会带给

---

<sup>①</sup> 意指总是伏案工作,因而久之髋部比较宽大的脑力工作者。  
——译者

我一种怡然的快乐。

二十年代牛津那个迟来的夏天，不是特别像秋老虎天气，它是如此令人愉快，人们纳闷哈代竟会回到剑桥。但他确实在1931年回到了剑桥。我想这有两个原因。第一个也是最有决定性的原因是，他是个大专家。剑桥仍然是英国数学的中心，高级数学教授职位对于专家来说是正合适的位置。第二，也相当奇怪，他想他毕竟已年届高龄了。牛津的学院在许多方面都富有人情味和温馨，但对年老者却很无情：如果他留在新学院，一旦到了年龄而从教授职位上退休，他就不得不搬出办公室。而如果回到三一学院，他便能住在这儿直到去世。实际上，这正是他想要得到的。

当哈代回到剑桥时——就在这时候我开始知道他——他已经处在他伟大一生的晚霞阶段了。他仍然快乐，仍然有创造力，只是不如二十年代了，但还是足以使他觉得他是有力量的。他像在新学院一样精神焕发。正是因此，我们有幸看到了几乎是最棒的哈代。

在冬天，他成为我的朋友之后，我们每两周就邀请对方在我们各自的学院吃一次晚餐。夏天到来时，我们在板球场上碰面就是自然而然的了。除了特殊情况，他仍然在早晨研究数学，不到午饭之后他是不会到费纳球场来的。他习惯于绕着灰渣路散步，拖着长长的、懒洋洋的、沉重的脚步（他是个纤弱瘦削的人，即使在五十大几岁的时候也爱活动身体，仍然打室内网球），低着头，头发、领带、毛衣、纸张都飞舞着，这个形象会

吸引所有人的目光。“来了一个希腊诗人，我敢肯定”，有一次，一个兴高采烈的农夫在哈代经过计分牌的时候这样说。哈代喜欢朝向与板球队员更衣室相对的位置，他在那儿可以沐浴每一缕阳光——他念念不忘面朝阳光。为了诱惑阳光照射，即使在一个晴朗的五月的中午，哈代也带着他所谓的“对抗上帝套件”。它由三四件毛衣、一把他姐姐的雨伞和一个里面装着数学手稿——比如他帮皇家协会作指导的博士论文，或者数学荣誉学位考试答案——的大大的信封组成。哈代会向熟人解释说，上帝相信哈代期待天气改变，给他一个工作机会，便反其道而行之，安排天空要保持万里无云。

哈代坐在那儿，在漫长的中午观看板球赛以继续享受他的快乐，他喜欢太阳照耀，并且有一个同伴一起加入这种欢愉。对于他来说，技术、战术、形式上的美，这些是板球运动最深层的吸引力所在。我不想去解释这些用语，它们不可传达，除非人们懂得板球的语言：正像哈代的一些经典的比喻是不可解释的，除非人们或者懂得板球的语言，或者懂得数论的语言——最好是二者都懂一样。对我们的许多朋友来说，非常幸运的是，哈代也爱看有人情味的喜剧。

他一定是第一个否认自己有任何特殊的心理觉察力的人。但他是最有才智的人，他了解自己做的事情，阅读广泛，拥有广泛的人类特性——健康，宽容，擅长揶揄的说话方式，以及丝毫不慕虚荣。他的精神是坦

诚的，只有很少的人能够如此（我怀疑是否有人会比哈代更坦诚），他对自我标榜，对自以为是式的愤愤不平，以及一整套堂而皇之的伪善德行，深恶痛绝。板球，这种最为优美的游戏，也是最伪善的。板球被设想成是团队精神的最彻底的体现，人们应该更愿意让自己的球队赢，哪怕自己得了零分，而不是自己得了100分但自己的球队输了（一位很棒的球员，像哈代一样不谙世情地直率，有一次温和地说道，他从来没有试图去那样想）。这种特殊的风气激发了哈代反讽的智慧。作为反诘，他总是阐发一系列与它相抗衡的格言，例如：

“板球是你在场上以十一名对方队员和十名己方队员为对手的唯一游戏。”

“如果你上场击球时感到紧张，没有任何事情比看到其他人被杀出局更能保住你的信心。”

如果他的听众有运气，他们会在这些谈话中听到与板球无关，与在他的写作中一样尖锐的其他评论。在《一个数学家的辩白》中有一些典型的样板，这里就有几例：

“一流的人才是不值得花费时间表述大众看法的。顾名思义，这事有很多其他人都可以做。”

“当我是个研究生时，有人——如果他不是太正统——可能提出，托尔斯泰与作为小说家的乔治·梅瑞迪斯(George Meredith)差不多；但是，当然，可能没有别的人能这么做。”（这些话是在谈到对时尚的迷醉时说的：值得记住的是，他生活的时代是剑桥所有最为辉

煌的时代之一。)

“对于任何严肃的目的来说，智力都只是个微小的礼物。”

“年轻人应该自视很高，但不应该愚蠢。”(这是有人试图说服他 *Finnegans Wake* 是最后一部文学杰作时说的。)

“人们常常不得不表述困难的事情，但他们应该尽量简单地就其所知去说。”

在观看板球比赛的时候，哈代的兴趣偶尔会暗淡下来，不再每球必看。这时他要求我们编选队伍：骗子队，最佳击球手队，伪劣诗人队，令人讨厌的队，那些名字以 HA 打头者<sup>①</sup>的队 [头两位分别是 Hadrian(哈德里安)和 Hannibal(汉尼拔)]，以 SN 打头的队，三一学院最佳队、基督学院最佳队等等。在这些练习中，我<sup>②</sup>处于不利的位置：让随便一个人从名字由 SN 开头的世界性的人物中选出一个队，肯定都是不容易的。以这种规则组成的三一学院队，强大得令人吃惊，就连 Clerk Maxwell(克拉克·麦克斯韦)，Byron(拜伦)，Thackeray(撒克雷)，Tennyson(坦尼森)都不能保证有其位置；而基督学院队虽强劲地以 Melton 和 Darwin(梅尔顿，达尔文)打头阵，但从第三位开始，就没有什么好炫耀的了。

---

① 哈代名字为 Hardy，以 HA 打头。从哈代能选择的名人比序作者 Snow 更多。——译者

② 本序作者名字为 Snow，以 SN 打头。——译者

间或，哈代有另外一个喜好的娱乐。“把我们昨天晚上遇到的人分类标出来”，他说道，某个人必须被从100个人中，用每一个哈代长久以来所创造和定义的范畴标志出来。刻板的(STARK)，忧郁的(BLEAK)(一个刻板的人不必是忧郁的人，但所有忧郁的人都毫无例外地被认为是刻板的)，迟钝的(DIM)，陈年白兰地(OLD BRANDY)，绕弯子(SPIN)，以及一些其他的范畴。刻板、忧郁和迟钝都是不言自明的(威灵顿公爵在忧郁性和刻板性上将会得到足足的100分，但在迟钝性上会得零分)。“陈年白兰地”，是从一个神话人物那里引出来的：这个人说，“除了陈年白兰地”，他什么酒都不喝。所以根据推断，陈年白兰地意指一种品味，古怪而且神秘，但恰好还处落在合理的限度之内。作为一个与众不同的人(根据哈代的观点，虽然这并不是我的观点，作为一个小说家也是如此)，普鲁斯特在“陈年白兰地”这一项上会得到高分，林德曼(后来的彻韦尔勋爵(Lord Cherwell))也是如此。

夏日过去了。在度过了剑桥那些短短的季节中的一个之后，学院的板球比赛开始了。安排与哈代在伦敦见面，也不是那么容易了，因为正如我已经提到过的，哈代对机械的玩意儿，特别是对电话，抱有病态的不信任(他从来不使用钟表)。在三一学院他的房间以及圣乔治广场他的公寓里，他惯于带着不以为然和稍微有点儿气急败坏的语气说道：“如果你喜欢待在电话的旁边，隔壁就有一部。”有一次因为紧急情况他不得

不给我打电话，他气急败坏的声音从话筒中传了过来：“我不听你讲的任何一句话，所以我一说完立刻就把电话挂掉。重要的是你应该在九至十点之间过来。”之后就是“咔嗒”一声。

他总是准时地出现在学院的板球比赛看台上。年复一年，他在那里都是最欢快的。被男男女女的朋友们环绕着，他不再有害羞的感觉。他是我们所有人关注的中心，对此他并非不喜欢。人们经常能从体育场周围老远的地方，听到这个团体爽朗的笑声。

在他最后的那些快乐的岁月里，他做的每一件事都伴随着优雅、秩序、时尚感。板球是优雅和有秩序的游戏，这就是为什么哈代在其中发现了形式美的缘故。他的数学工作，我被这样告知，直至他最后有创造性的工作为止，也都具有同样的美感。我有这样一个印象，我以为，在私下场合里，他是一个喜欢高谈阔论的人。在某种程度上确实如此，但是在他称之为“不普通”的场合（意指对参与谈话的双方都很重要），他也是个严肃和专心的听众。在我同一时期通过各种偶然机会认识的其他杰出人物当中，威尔斯（Wells）在总体上是比人们所期望得表现要差的听众，卢瑟福明显要好，而劳埃德·乔治则在任何时候都是最好的听众。哈代不从其他人的话语中获取感想和见闻，像劳埃德·乔治所做的那样，但他的心扉是向他人敞开着。当数年前我写《大师》（*The Masters*）的时候，他听到了我的这一想法，向我询问了一些问题，所以那次主要是我在说

话。他生出许多好的主意。我希望他能够读一读这本书，我认为他一定会喜欢。——不管怎么样，在那种期望的支配之下，我把这本书题献给他以作纪念。

在《一个数学家的辩白》末尾的注中，哈代提到了我们之间的其他一些争论。其中有一个争论拖得时间很长，而且，有的时候我们双方还都有些动真格的。在第二次世界大战中，我们俩每一个人都有感情化的，但彼此不同的看法，这我在稍后将会说到。我一丁点也没有改变他的看法。然而，虽然我们被感性的峡谷隔开，哈代在理性的层面上却理解我所说的看法。这在我与他的任何争论中都是如此。

在整个三十年代哈代都过着自己特有的年轻人的生活。然后，就在突然之间，这种生活被打断了。1939年，哈代患了冠状动脉血栓形成的疾病。虽然最后恢复了健康，但室内网球、壁球，他喜爱的体育活动，他再也不能参加了。二战更使他变得愁闷，如同一战一样。对于他来说，这两次战争整个就是由一件件疯狂的事件串出来的，我们全都有错，他不能融入二战——当国家将继续存活下去这一点变得明显的时候——比1914年不能融入一战的程度更甚。他最亲密的一个朋友悲剧性地死去了。而且——我相信这些悲伤无疑地是内在相连的——他作为一个数学家的创造力终于在他六十岁之后一去而不复返。

这就是为什么《一个数学家的辩白》——如果在阅读时充分地留意其话语，是一本记述不断涌现的悲伤



的书的缘故。是的，它是机智的、敏锐的，散发着智力上的高昂精神；是的，它水晶般的清澈和坦诚仍然随处可见；是的，它是具有创造力的艺术家的试金石。但是，它以一种低沉的斯多葛主义的方式，也是对曾经一直拥有、但将永远不再的创造力充满感伤的痛惜。在我们的文字作品中，我不知道有任何东西与它相若——大多数有文学天才去表达这种痛惜的人，都没有去感受它，一个作家很少能够在终极真理这种意义上认识到，他是绝对地不可挽回的。

看着那些岁月里的哈代，我不禁想到他为自己年轻人的生活方式所付的代价。这就像是看到一个伟大的运动员，很多年来都一直为他的年轻和技巧而自豪，比我们其余的人都大大地年轻和欢乐，突然之间不得不接受他已江郎才尽的现实。遇到那些，用他们的话说，巅峰已过的伟大运动员，是很常见的事：很快，他的脚步变得沉重起来（目光时常一动不动），一连串的动作不再成功，温布尔登成了让人畏惧的地方，观众都去观看其他运动员了。这是许多运动员酗酒的主要原因。哈代没有酒瘾，但是他浸没在某种类似绝望的东西里面。他的身体康复到足可以向板球网里击球十分钟，或者玩他所喜爱的三一学院的地滚球戏里的精巧的把戏（有一套复杂的让分规则）。但这常常很难激起他的兴趣——三四年前，他在每件事情上的兴趣都是如此高昂，往往把我们拖得疲倦不堪。“人不应该感到厌烦”曾经是他的一句格言。“一个人能觉得反感，或觉得憎

恶,但他不能感到厌烦。”但他现在恰恰就是那样,就是觉得厌烦。

因为这个原因,他的许多朋友,包括我,鼓励他写罗素和三一学院在1914—1918年战争时期的故事。不知道哈代有多么消沉的人们认为,这些事件现在早已过去许久了,不应该再被提起。但事实却是:这激发他锁定了某种目标。哈代的这本书私下里流传开来,不过公众从来没有读到过它。这很遗憾,因为它是学院历史的一个小小的补充。

当我想促使他写另外一本书——他在那些快乐的日子,曾经答应过我要写这么一本书——的时候,我用到了这些话劝说他。这本书将被命名为《椭圆球场的一天》,由他一整天观看板球赛的活动组成,记录他对板球运动、人性、他的回忆和一般生活的专题讨论。它将会是一个奇异的小小的经典作品,但它并未实现。

在哈代最后的岁月里,我对他没有太大的帮助。我陷入二战时期白金汉宫里的事情里面而不能自拔,我一心一意去做事情,经常感到非常疲劳,要去一趟剑桥是需要费很大劲的。但我应该努力比当时更经常地去看望他。我不得不懊悔地承认,在我们之间存在着某些隔阂,精确地说不是情感冷淡,而是见解不一致方面的隔阂。哈代把他在皮利可(Pimlico)的公寓——黑暗、脏乱的公寓,圣乔治广场花园在其外面,有一种他称之为“陈年白兰地”的魅力——在整个战争期间借给我用。但他不喜欢我全身心地投入那时的工作,他所称许的

人不应该全身心地投入到军事方面的职责当中。他从来没有打问过我的工作。而从我自己这方面来讲,我不够耐心,没有做到诸如充分地理解别人。不管怎么样,我认为,我不是为了快乐才做这项工作的,因为我不得不做它,也许我也调动了自己最大的兴趣去做。但我确实不是为自己找借口。

在战争临近结束时,我没有回到剑桥。我在1946年造访过哈代几次。他还没有从消沉中解脱出来,他的身体不行了,没走上几步路就觉得喘不上气。比赛结束之后,快乐地环绕帕克匹斯(Parker's Piece)长时间地溜达,再也没有可能了。我不得不叫出租车把他带回三一学院他的家中。他很高兴我回复到写作上面:对于一个严肃的人来说,创造性的生活是唯一值当去过的生活。对于他来说,他希望能够再次过上创造性的生活,并不要求比过去更好:他自己的生活会结束了。

我在这里不是准确地引述哈代的话。这一切多么不像哈代啊,我想要忘记那些话,我也尝试着——这有一种讽刺意味——抹掉我刚才说过的那些话。正是因此我才从没有精确地记忆哈代的话。我试图将其当做一种修辞性的虚夸而踢开。

1947年的初夏,我坐着吃早餐的时候,电话铃响了。是哈代的姐姐打来的:他病得非常厉害,我立即去剑桥吗?我先在三一学院打个电话吗?当时我没有听懂她第二个请求的意思。不过我还是遵从了,在三一学院的传达室发现了她留给我的一个条子:我要去唐纳

德·罗伯森的家里，他将会在那儿等着我。

唐纳德·罗伯森是希腊文教授，是哈代的一个密友：他是那个高贵、悠闲、优雅的爱德华时代的剑桥的另外一名成员。他很偶然地成为能对哈代直呼其名的少数人之一。他静静地问候了我。在他屋子的窗边，是静谧的、阳光灿烂的早晨。他说：

“你一定知道了哈代想要自杀。”

哈代已经脱离危险了，他在那个时刻已经没有问题了——如果这是需要使用的词汇的话。唐纳德像哈代本人一样直率，只是说话微微不如哈代直截了当。哈代自杀的企图失败了，他的自杀是件不幸的事，他的健康恶化了：他无论如何不可能活得更为长久了，即使是从他的房间走到餐厅，也都成了一件费力的事。他做出了一个完全是刻意的选择。他不愿意再忍受那段时间的生活了：生活毫无内容。他收集了足够剂量的巴比妥：他试图彻底解脱，服用了过多的剂量。

我很喜欢唐纳德·罗伯森，不过我只是在舞会和三一学院的高级餐桌上见到过他。在这个场合我们第一次进行了私人谈话。他带着和缓的坚定语气说，我应该尽可能多去看望哈代。这很难接受，但它是一个义务：这很可能不会持续多久。我们都很难受。我说了再见，以后再没有见过他。

在伊弗林(Evelyn)私人疗养院，哈代躺在床上。有点闹剧味道的是，他的眼圈发乌。由于服药而呕吐，他的头撞上了卫生间的洗漱盆。他自嘲搞了个一团乱，还

有人能弄得比这更乱吗？我不得不加入这场滑稽游戏当中。我觉得这只有滑稽意味，但我不得不演下去。我谈到了其他一些显然失败了自杀者。德国将军们在一战时怎么样？贝克（Beck），施图勒纳格尔（Stulpnagel），他们都在自杀时明显地力不胜任。听到我自己说这些话，真觉得怪里怪气的，但这似乎使哈代高兴起来，也真是够怪的。

42 在此之后，我至少每周去一次剑桥。每一次访问我都害怕，但他早些时候说过，他盼望看到我。他很少谈及死亡——几乎每次我看他的时候都是如此。他想死亡：他不怕死，一无所有还有什么可怕的？他坚强的斯多葛主义又回来了。他将不再试图自杀。他不擅长做这件事。他准备好了耗下去。他以一种可能会刺伤他自尊的前后不一贯——因为他，就像他的圈子里的大多数人，相信理性到了一个在我看来非理性的程度——对自己的症状的担心表现得过于强烈。他不停地研究脚踝上的水肿：今天它是大了还是小了？

然而，大多数时候，与他在一起的一小时中有五十五分钟，都是我不得不谈论板球。这是他唯一的安慰。我不得不装出对板球很专注的样子来，而其实我早就没有这种热情了，实际上在三十年代，除了陪伴他所带来的快乐，板球对我已是无所谓的事了。现在我不得不投入地研究板球赛的赛况，就像我还是个学校里的小伙子那个时候一样。哈代自己已无法阅读，但我如果胡编乱造，他也会知道。有时，有几分钟，他过去的活力会

迸发出来。但是如果我不能想到其他问题或者另外的新闻，他会躺在那儿，陷入某种阴郁的孤独之中——那经常发生于濒死者的身上。

有一次或两次，我试图唤起他的精神。即使有危险，难道就不值得一起出去再看一场板球赛吗？我说，我现在的的生活过得比以前富裕，我准备负担他坐出租车——他最熟悉的交通方式，去任何一个他愿点出其名的板球比赛场。听到这些，他的双眼亮了。他说，我也许会在自己的怀中抱着一个死去的人。我回答说准备应付一切事情。我认为他可能会去——他知道，我知道，他去世只是几个月之内的事情：我想看到他度过一个总算有点欢娱的中午。下一次我看望他的时候，他悲哀而生气地摇着头。不，他甚至连试一试都不行：没有任何目的值得去试了。

对我来说，不得不谈论板球真是够难的。对于他的姐姐，一位很有魅力的知识女性，那就更难了。她没有结婚，把自己一生的大多数时间都用于照料哈代了。她用一种可笑的技能——与哈代自己的老旧形式其实相差无几，收集了她所能发现每一条有关于板球的消息，虽然她并没有学过任何关于板球的东西。

有一次或两次，哈代调笑人情喜剧的嗜好突然爆发了。在去世前的二到三个星期，他从皇家学会听到自己将被授予他们的最高荣誉，考普莱勋章。他露出了魔菲斯特式的微笑，这是几个月来我第一次看到他最为灿烂的笑容，“现在我知道，我一定接近生命的最后时

刻了：当人们忙着授给你荣誉的时候，你就只能得出一个结论。”

在听到他的这句话之后，我想我还看望过他两次。最后一次是他去世的四五天之前，在澳大利亚有场板球决赛，我们谈到了这场比赛。

在同一周，哈代告诉他的姐姐：“我知道我会在今天死去，我觉得我还想听听板球赛的赛况。”

他勉力做到了与听板球赛况相近似的事情。那个星期的每一个晚上，她离开哈代之前，都要读一段描写剑桥大学板球历史的书。这本书的某一章里包含着哈代最后一次听到的话语，因为就在这周的某一个清晨，哈代突然辞世了。

我感谢 C. D. 布罗德教授和 C. P. 斯诺博士许多有价值的批评，他们每一个人都阅读了我最初的手稿。我在书中吸收了几乎所有他们建议的内容，并因此而消除了很多粗糙和模糊之处。

在一种情况下，我对他们建议的处理是不同的。§28 以我今年早些时候为 *Eureka* (剑桥阿基米德学会的杂志) 而作的一篇短文为基础，我发现，修改我这么近期以及这么细心所写的东西是不可能的。再者，如果我试图严肃地处理这些重要的批评，我将不得不把这一节作如此之多的扩充，以至于破坏我的短论的整体协调性。所以我原封不动地保留了它，只是在书的末尾的注释中，增加了我对批评者主要观点的一个短短的陈述。

G. H. 哈代于 1940 年 7 月 18 日



对于一个职业数学家来说，发现自己写作关于数学的东西，乃是一种令人泄气的体验。数学家的作用在于做数学上的事情，证明新的定理，把它们添加到数学当中，而不是谈论他自己或者其他数学家做了些什么。政治家轻视政论家，画家瞧不起艺术评论家，生理学家、物理学家或者数学家常常具有同感；再没有比对解释者所怀有的藐视更深刻，或者从总体上看更合理的了。解释、评判、欣赏都是二流头脑干的事情。

我记得，在我与豪斯曼(Housman)少数几次的严肃谈话之一当中，我们对此有过一次争论。豪斯曼在他的莱斯利·斯蒂芬(Stephen)讲演《诗的名称与本性》(*Name and Nature of Poetry*)中，非常激烈地否认他是个“批评家”；不过是以一种在我看来特别不合常理的方式否认的，他还表示出了对文学批判的赞赏之意，这使我感到吃惊和反感。

豪斯曼引用他22年前发表的就职演讲作为开场白——

是否文学批判的才能是上帝的宝库中最好的礼物呢？我说不准。但是上帝似乎是这样想的，因为那肯定是最为小心翼翼地赠予的礼物。演说家和诗人……，如果说与草莓比起来是稀少的，那么比起哈雷彗星的回归来总要常见一些；文学批判家则比哈雷彗星的回

归还更少见。

他接着说——

在这 22 年间，我在某些方面进步了，在其他一些方面则退步了，但是我还没有进步到变成文学批评家，也没有退步到居然幻想自己已经变成了文学批评家。

一个大学者和优秀诗人居然这样写东西，对我来说，这似乎是可悲的，并且，几个星期之后，我有次在饭厅中与他挨着坐时，我唐突地向他表明了自己的看法。他真的认为他的那些话应被认真对待吗？在他看来，最好的批评家的生涯真的能与学者和诗人的生涯相比吗？在整个晚餐中，我们都在进行讨论，而且，我想他最终同意了我的看法。我必须避免这种情况：好像只是对一个不可能再回应批评的人，自己才取得了辩论的胜利，——不过毕竟，在最后，豪斯曼对第一个问题的回答是“或许不是全部”，对第二个问题的回答是“或许不能”。

对于豪斯曼的感受究竟是什么样的，或许存在些疑问，我并不想妄断他接受了我的观点。但是，对于科学家们的感受，则根本不存在任何疑问，而我完完全全地与他们共享这些感受。如果此后我发现自己在写作本身不是数学，而只是关于数学的东西，那是我对自己弱点的坦白，我因此也可以被年轻人和更严格的数学家们理所当然地轻视或怜悯。我写作关于数学的东西，是因为像其他已超过 60 岁的数学家们一样，我不再具有能够有效地做自己本分工作的智力上的新鲜劲儿、

精力或者耐心了。

## 2

我打算为数学提出一个辩白，而我也许会被告知，数学根本不需要有这么个辩白，因为与数学比起来，目前还很少有什么学科，——由于好的或坏的原因，被更加普遍地认为是有益的和值得赞许的。或许真是如此，自从爱因斯坦的轰动性的胜利以来，在普通人的看法里，星体天文学和原子物理学确实可能是仅有的、比数学地位更加显赫的学科。数学家不需要在目前就考虑为数学作辩护。他不是非得面对布拉德雷在其可敬的对形而上学的捍卫——这构成了《现象和实在》的导言——中所描述过的反对意见。

— 48

布拉德雷说，一位形而上学家会听到别人说“形而上学知识是完全不重要的”，或者“即使形而上学知识在一定程度上是可能的，它实际上也是配不上那个名称的知识”。他将听到，“同样的问题”，“同样的争论，同样清一色的失败。为什么不放弃它而解放自己呢？就没有别的东西更值得你去费力吗？”没有人会愚蠢到用这样的话来说数学。数学真理的数量之庞大，乃是显然的、令人难忘的；它在实践中的应用，桥梁、蒸汽机和发电机，打动着最愚钝的人的想象力。公众不需要被说服才去相信，数学确实还是有两下子的。

从某种恰当的立场来看，所有这些都是令数学家

感到非常欣慰的，但对于一个名副其实的数学家来说，他是决不会满足于此的。任何名副其实的数学家都必定感觉得到，数学真正的地位并不是基于这些粗糙的数学成就，通常对数学的敬意大都建立在无知和混乱的基础上，作一个更合理的辩护是大有可为的。不管怎么样，我要试着做出这样一个辩护。比起布拉德雷的困难的辩护，这应该是一项简单些的任务。

因此，我将会问，为什么对数学进行严肃的研究确实是值得的？什么能合理地证明数学家生涯的价值？从大体上来看，我的答案类似于数学家常被期待做出的那种：我认为它是值得做的，这可以有大量证明。不过，我将立即接着说，我对数学的辩护将是对我自己的辩护，因此我的辩白注定将在某种程度上是自负的。如果我视自己为这一学科的失败者，我将不会认为自己值得为它辩白了。

某些此类的自负是无法避免的，我不觉得真的需要为之辩解。好的工作都不是被“谦逊的”人所做出的。例如，在任何学科里面，对于一个教授来说，首要的义务之一就是稍稍夸大他的学科以及他自己在这个学科上的重要性。一个总在问“我做的事情值得吗？”或者“我是适合做它的人吗？”的人，将永远是不中用的，也会让其他人感到气馁。他必须睁一只眼闭一只眼，把他的学科和他自己想得超其所值。这不是太难做到，不因盲目地吹嘘他的学科和他自己，使之显得可笑，才是更难做到的。

一个人为了证明自己的存在和自己的活动有价值，不得不分清两个不同的问题。第一个问题是，他所做的工作是否值得去做；第二个问题是，不管其价值是什么，他为什么去做这个工作。回答第一个问题常常很困难，答案也非常令人泄气。不过虽则如此，大多数人都会发现，回答第二个问题挺容易。如果他们诚实的话，他们的答案一般不外采取两种形式，且第二种形式只是第一种形式的谦逊一些的变种，第一种形式才是我们需要严肃考虑的唯一答案。

50 (1) “我做我所做的事乃是因为，它是我唯一完全能够做好的事情。我是一位律师，或股票经纪人，或职业板球选手，因为我对这种特殊的行当具有真正的才能。我是律师，因为我口齿伶俐，且对于法律条文的微妙之处很有兴趣；我是股票经纪人，因为我对市场行情的判断又快又准；我是职业板球选手，因为我击球是出类拔萃的。我同意，做一个诗人或数学家也许更好，但不巧的是，我对那些行当没有任何才能。”

我不是想要表明，这是个大多数人都有资格作出的辩护，因为大多数人根本做不好任何事情。但是，当如此作辩护并不可笑之时——实际上，只有极少数人才能够这样作辩护：或许百分之五，或许甚至百分之十的人能够把某些事情做得相当好——，它就是无法驳

倒的。能够把任何事情都做得真正很好的人是极少数，能够做好两种事情的人少得微不足道。如果一个人具有任何才能，那么，为了把这种才能发挥到极致，他应该乐意牺牲任何其他东西。

这种观点得到了约翰森博士的支持——

当我告诉他，我曾看到约翰森（与他同名的一个人）骑在三匹马上时，他说“这样一个人，先生，应该被鼓励，因为他的表现展示了人类能力的限度……”——

与此类似，他会为登山者、横渡海峡游泳者以及盲棋选手赞叹有加。就我而言，我完全赞同所有这类旨在获得杰出成就的努力。我甚至有些赞同变戏法的人和口技艺人，当阿列克因（Alekhine）和布拉德曼（Bradman）开始要打破纪录时，如果他们失败了，我会痛感失望。在这里，约翰森和我两人都发现，我们与大众是一致的。正如 W. J. 特纳（W. J. Turner）如此真确地说过的，只有“趣味高雅的人”（high brows）（在其令人不快那种意义上）才不赞叹“真正了不起的人”（real swells）。

当然，我们必须考虑到，不同的作为是存在价值上的差异的。我更愿意是个小说家或画家，而不是同等级别的政治家。还有很多获得名声的途径，我们多数人会因其极其恶劣而予以拒绝。然而，这些价值上的差别很少改变一个人对职业的选择范围，择业几乎总是被他自然能力的局限性所支使。诗歌比板球更有价值，但布拉德曼如果为了写二流诗作（我推想他不大可能干得

更好)而舍弃板球,他将是个傻瓜。要是板球的地位不像现在那么高,而诗歌的地位则比现在还要高一些,那么作上面的选择可能会更难一些:我不知道自己是愿意成为维克多·特鲁波尔(Victor Trumper)还是鲁伯特·布鲁克(Rupert Brooke)。幸运的是,这种进退维谷的困境总是很少出现。

我可以补充说,他们特别不大像是会投身于数学。把数学家智力活动的方式与其他人智力活动的方式的差别加以严重夸大,是很常见的事,但不可否认的是,数学才能是最专门化的才能之一,数学家作为一类人,并非在一般能力或全能性上特别出色。如果一个人在任何意义上都是真正的数学家,那么百分之百,他做的数学工作要远远好于他所能够做的任何其他事情,要是他为了在其他领域做并不出色的工作,而放弃了施展其才能的任何相当好的机会,他的所作所为将是愚蠢的。这样的牺牲只有从经济上的需要或年龄来看才有其合理性。

#### 4

我最好在这里谈谈年龄问题,因为它对于数学家格外重要。没有数学家会允许自己忘记这一点:数学比任何其他的艺术或科学都更加是年轻人的游戏。可以在相对比较低一些的水平上举一个简单例证:选入皇家学会的人的年龄在数学领域中是最低的。

我们自然可以找到更有吸引力的例证来。我们可以考虑，比如说，当然是世界上三位最伟大数学家之一的人，牛顿的生活历程。他五十岁的时候放弃研究数学，而其兴趣则早就消失了；他当时无疑已认识到了，已经四十岁的他，最伟大的创造岁月已经过去。他的思想中的最伟大的思想，流数术和引力定律，大约在1666年产生，他时年二十四岁——“在那些岁月里我处在创造生涯的顶峰，在这一时期，我对数学和哲学比在此后的任何时期都更为用心。”他直到近四十岁才做出他最伟大的发现（“椭圆轨道”是在三十七岁），但此后他的发现很少，不过是修补和完善早先的发现而已。

伽罗华在二十一岁时去世，阿贝尔二十七岁，拉曼努安三十三岁，黎曼四十岁。曾经有一些人在相当晚的时候才做出伟大的工作，高斯关于微分几何的论文集在他五十岁的时候才发表（虽然他在十年前就有了基本想法）。我不知道一个主要的数学进步是由年过五十的数学家所开创的实例。如果一个处于成熟年龄的人对数学失去了兴趣，放弃了数学，这无论对于数学还是对于他，损失都不像是有多么严重。

从另一方面看，这样做的收获也不像是有多么重要。最近的数学家告别数学的记载都不是特别令人鼓舞。……牛顿成了一个相当称职的造币大师（他那时不与任何人争论）。潘勒维（Painlevé）不是个很成功的法国总理。拉普拉斯的政治生涯是极其不名誉的，但这不



是个十分公平的例子，因为他属于不诚实而并非不称职，而且，他从来没有真正“放弃”数学。发现一个一流的数学家放弃数学，且在任何其他领域里取得一流优异成就的例子，是非常困难的。也许有一些年轻人，如果他们坚持从事数学的话，后来会成为一流数学家，但是我从来没有听到过一个真正差不多算是那么回事的例子。而且，所有这一切还都囿于我本已十分有限的经验。我所知道的每个真正有天分的年轻数学家都对数学忠心不二，而且原因不是由于他们缺少抱负，相反倒是由于他们充满抱负。他们都认识到，如果有成名成家的道路的话，它就着落在数学上面。

## 5

也有我称之为比标准辩白“谦虚些的辩白”，但我将用三言两语就把它打发掉。

(2)“没有任何事我能做得特别好。我干我所干的事业，是因为它与我不期而遇。我真的没有机会去做任何别的事。”我也同样接受这种辩白为终极性的。大多数人不能做好任何事情，这是相当确实的。如果是这样，那么他们选择什么职业都是无所谓的，对此确实也没有更多的话可说。它是个终极性的回答，但似乎鲜能成为有任何自豪感的人会选择的答案。也许我可以假设，我们中没有任何人会满足于这样一个辩白。

现在是开始思考我在§3所提出的第一个问题的时候了，它比第二个问题要困难得多。数学，也就是我和其他数学家用“数学”所指的东西，是值得做的吗？如果值得，为什么？

我再次审视我1920年在牛津所做的就职演说的头几页，在那里有为数学辩白的一个纲要。它是非常不充分的（不多几页），而且，它是用一种我现在不是特别感到自豪的风格（一篇最初的短文，我以为，是我那时所想象的“剑桥方式”）写就的。但我仍然觉得，不管它多么需要做进一步提高，它还是包含了这个问题的实质性的东西。我将重复在那里所说的话，作为一个更充分讨论的前言。

(1) 我从强调数学的无害性开始讨论——“数学研究，纵算是个无益的职业，也总是个无害的和清白的职业。”我将坚持这一点，但显然这需要大量的展开与解释。

数学是“无益的”吗？以某种方式看，显然不是；它给相当大的一部分人带来了快乐。不过，我是在一种更为狭窄的意义上考虑“益处”这个词的。数学就像化学和生理学等其他学科那样是有用的，直接有用的吗？这不完全是个容易回答和无可争议的问题，而且，尽管一些数学家和大多数门外汉会毫不迟疑地回答“是”，我

最终将以“不”来回答它。数学是“无害的”吗？答案仍不明显，我宁愿从某些方面避开这个问题，因为它引发了科学在战争中的作用这整个问题。在某种意义上，比如化学显然并非无害这样的意义上，数学是无害的吗？在后面，我将不得不回到上述这两个问题上去。

(2) 我继续说“宇宙的范围很大，就算我们浪费自己的时间，浪费少量的学院教师的生命，也算不上什么巨大的灾难。”在这里，我也许像是采取了，或者假装出了夸张的谦逊姿态，而这种姿态是我刚刚拒绝了。我不敢肯定这不是我的真实心理，那是由于我想用一句话表述我用更长的话在§3中已经说过的观点。那是在假设，我们这些大学教师确实有一点儿才能，如果我们尽了最大努力，最大限度地去开发它们，我们的做法几乎不可能是错的。

(3) 最后（运用某些我现在看来修辞上相当麻烦的句子），我强调了数学成就的持久性——

我们做的事可以是微小的，但其特征是，它具有某种持久性。不管是一份诗稿还是几何定理，都产生出了具有哪怕最轻微持久重要性的东西，已经做成了某些彻底超出大多数人能力的事情。

还有——

在古代和现代研究互相冲突的时代里，对于数学这门不是始于毕达哥拉斯，也不是结束于爱因斯坦，而是所有学科中最古老和最年轻的学科来说，必然有些东西值得说道一番。

所有这些都是“修辞性的”，但其趣旨在我看来现在仍然是有效的，我可以立即细细地阐述它，而不用预先对所讨论的其他问题作出判断。

## 7

我将假设我是为这样的读者写作的：他们对抱负投入了，或者在过去曾经投入了全身心的热忱。一个人的首要本分，无论如何作为年轻人的首要本分，是有抱负。抱负是高尚的激情，它可以合理地以许多形式显现出来。在阿提拉或拿破仑的抱负中有一些高尚的东西：但最高尚的志向是在死后留下某些具有永恒价值的东西——

Here, on the level sand, 在这儿,平坦的沙滩上,  
Between the sea and land, 大海和陆地之间,  
What shall I build or write 我将建造或写作什么,  
Against the fall of night? 以抵消黑暗的降临?

Tell me of runes to grave 告诉我刻出神秘的符咒,

That hold the bursting wave, 阻挡那激荡而至的波浪,

Or bastions to design 或者,告诉我建筑堡垒,  
For longer date than mine 为了比我生命更长久的岁月。

几乎世界上所有最好的工作，其背后的驱动力量都始终是抱负。特别是，所有对人类幸福有实质意义的贡献，实际上都是由有志向的人做出的。举两个著名的例子，李斯特和巴斯德难道没有抱负吗？对了，在低一点的层面上，还有金·吉列和威廉·威勒特，在最近的年代中，可曾有谁比他们做出了更大的贡献，以使人类生活得更加舒适一些？

在这方面，生理学之所以成为了特别好的例子，无非就是因为它极为明显的是“有益”的学科。我们必须警惕一种为科学作辩护时普遍存在的错误，这种错误假设，其工作有益于人类的人们在做这些工作的时候，也总在想着这一点。如果照此来看，那么诸如生理学家，就具有特别高尚的灵魂了。生理学家也许会在想到他的工作将造福于人类的时候，确确实实地感到高兴，但为他的工作提供力量和激励的动机，却与一位古典文学家或数学家的动机没什么两样。

可能会有很多值得高度尊敬的动机促使人们开展研究工作，但其中有三个比其他的更为重要。第一个（没有它则其他的都谈不上）是智力上的好奇心，知道真理的欲望。然后是对职业的自豪感，要求对自己的表现感到满意的焦虑，在他的工作配不上其才能时，任何有自尊心的工匠所感受到的羞耻感。最后是抱负，获得名誉、地位，甚至是它所带来的对权力或金钱的欲望。当做完了你的工作，感觉到你为他人增加了快乐，或者减轻了其他人的痛苦时，那可以是很令人欣慰的，但它

却不是你做这工作的原因。所以，如果一位数学家，或者一位化学家，或者甚至是一位生理学家，告诉我说他的工作的驱动力乃是造福于人类的愿望，我将不会相信他（即使我相信他，我也不认为他比没有这样的愿望好到哪里去）。他的主导动机就是如我已经陈述的那样。当然了，这里没有任何东西会让正派的人为如此想而感到羞耻。

## 8

如果智力上的好奇心、对职业自豪感和抱负，是做研究工作的主要动因，那肯定没有人比数学家拥有更为公平的机会去实现它们。数学家们的学科是所有学科中最奇怪的——没有任何一个学科中的真理，有数学真理那么精灵古怪。数学中有着最精致和最迷人的技术，对于展现单纯的职业技巧来说，它为人们提供了无可匹敌的机会。最后，正像历史大量地证明了的，不管其内在价值如何，在所有的成就中，数学成就的生命力乃是最持久的。

59

我们甚至可以在半古 (semi-historic) 文明中看到这一点。巴比伦和亚述文明曾经兴盛一时，哈姆拉比 (Hammurabi)，萨尔贡 (Sargon)，内布查内扎尔 (Nebuchadnezzar) 都是空洞的名字，然而巴比伦的数学时至今日仍很重要，天文学中仍在使用着巴比伦的60度进制。不过，当然了，最有决定性说服力的事例当

数希腊人。

希腊人是迄今对我们来说仍称得上是“真正的”数学家的最早的数学家。东方的数学或许只是有趣的新奇玩意儿,但希腊数学是真正的数学。希腊人首先使用了现代数学都能理解的语言,如同利特伍德有一次对我说过的,他们不是聪明的学童或“奖学金申请者”,而是“另一所学院的研究员”。所以希腊数学是“持久的”,甚至比希腊文学更为持久。阿基米德(Archimedes)在埃斯库卢斯(Aeschylus)被忘却后,仍将长留在人们的记忆里,因为语言会灭亡,而数学思想则不会。“不朽”或许是个愚蠢的字眼,但不管它意味着什么,很可能一个数学家拥有最好的机会去配得上它。

数学家也不需要太过严肃地担心,未来人们也许会对他不公正。不朽性经常是可笑的或残酷的:在我们当中,很少有人会选择成为奥格(Og)或阿纳尼亚斯(Ananias)或加里奥(Gallio)那样的人。即使在数学中,历史也经常对人们开奇怪的玩笑:罗尔(Rolle)出现在初等微积分中,好像他曾经是一位像牛顿那样的数学家;法雷(Farey)是个不朽的人物,因为他未能理解哈罗斯(Haros)在十四年前就完美地证明了的一个定理;五位可敬的挪威人的名字仍然在阿贝尔的《生活》中赫然入目,仅仅因为他们忠实地施行了一次属于例行公事,但却是针对他们国家最伟大人物的愚蠢行为。但是,在总体上,科学的历史还是公平的,数学史尤其如此。除了数学,没有任何学科拥有这么清晰和公认的评判标

准,被数学史记录下来的人几乎总是名副其实的。数学声望,如果你有现金支付它的话,是最可靠和稳定的投资之一。

## 9

对于大学教师,特别是对于数学教授,所有这些都是非常令人欣慰的。有的时候,律师或政客或商人提出,追求学院生涯的主要是谨小慎微和缺乏雄心的人,他们最关心生活得舒适和安稳。这种责难应该说是用错了地方。一个教师放弃某种东西,特别是赚大钱的机会——一位教授每年挣 2000 英镑是很难的,而得到长期聘用的安定性,自然是他轻易地做出那种放弃的一个因素。但这不是豪斯曼(Housman)一定会拒绝成为西蒙勋爵或比弗布鲁克勋爵的原因。他会因为自己的抱负而拒绝去过他们那样的生活,因为,他会嘲笑一个在二十年内就被人们忘得干干净净的人。

然而,尽管有这么多的好处,想到自己也许会失败,又是一件多么痛苦的事啊!我记得罗素告诉我的一个可怕的梦:大约在 2100 年,他钻进大学图书馆的最高一层。一位图书馆助理员拎着一个大桶,在书架旁边来回走着,取下一本又一本的书,翻翻它们,把它们重新放回书架或者扔到桶里。最后,他走到了三大卷书前面,罗素认出它们是世上仅存的一套《数学原理》。他取下一册,翻阅了几页,有那么一会儿,他似乎被里面奇



怪的符号给弄迷糊了，合上书，在手里掂量着，犹豫不决。

## 10

一位数学家就像一位画家或诗人，是模式(pattern)的创造者。如果他的模式比画家或诗人的模式的生命更加长久的话，那是因为他的模式是用思想(idea)所造就的。画家用形状和色彩创作模式，诗人则用语词。一幅画可以包含一个“思想”，不过它常常是普普通通的，并不重要。在诗歌中，思想的作用要大得多，不过如豪斯曼所坚持的，诗歌中的这些思想的重要性常常被夸大了：“我不能以这里有诗歌的思想之类的东西为满足……诗歌不是被说的事情而是表达事情的方式。”

62 Not all the water in the rough rude sea 用罄深海大洋的水

Can wash the balm from balm from an anointed King. 也洗不去神圣君王身上的香膏

这诗还能更好，同时其思想还能够更陈腐、更空洞吗？思想的贫乏似乎影响不了文字模式的优美。另一方面，数学家工作的对象则除了思想之外更无其他之物，所以他的模式更可能持久，因为思想随时间受到的磨损比字词要轻。

数学家的模式，就像画家和诗人的模式一样，必须是优美的；这些思想，就像色彩或者字词一样，必须以

和谐的方式统一起来。优美性是第一道检验标准：这个世界没有为丑陋数学准备长久的地盘。而且，在这里，我必须驳斥一个仍然广泛传播的错误想法（尽管可能已经远远不如二十年前广泛了），即怀特海所称的“文人迷信”：对数学的热爱及美学欣赏，“只限于每个时代少数怪杰身上的偏执性”。

要找到一位受过教育，但对数学之美的魅力感觉相当迟钝的人，是非常困难的。定义数学的美也许非常困难，但这对于任何种类的美都是一样的——也许，我们并不是特别知道我们所说的优美的诗意味着什么，但这并不妨碍我们在读诗的时候认出它来。即便是不惜代价，力求减低数学审美因素重要性的霍本（Hogben）教授，也没有冒险地否认这种美本身的存在。“必须明确，确有一些个人，数学对于他们来说散发着冷冰冰没有人情味的吸引力……数学在审美上的吸引力对于特定的少数人来说，的确是真实存在着的。”但他们是“少数人”，他提醒道，而且他们是“冷冰冰地”感觉到数学之美的（实际上是相当可笑的人，他们生活在愚蠢的学院的小象牙塔里，外面开放世界中的新鲜气息被隔绝开了）。在这一点上，他只不过是重复了怀特海的“文人迷信”。

事实是，很少还有比数学更为“大众化的”学科。大多数人能鉴赏一点数学，正像大多数人能欣赏一首欢快的乐曲一样；也可能有更多的人对数学的兴趣超过了对音乐的兴趣。从表面上看，事实可能正好是相

反的，不过，这很容易解释。音乐可以用来激发群众的情绪，而数学不能；不通晓音乐被（无疑是正确地）认为稍稍有些丢脸，然而，大多数人对数学的名声感到畏惧，他们总是非常真挚地夸大他们缺少数学才能。

作一点点回顾就足以揭露“文人迷信”的荒唐了。在每个文明国家都有大量的象棋<sup>①</sup>选手——在俄罗斯，几乎是整个受教育的人口；每个象棋选手都能理解一个象棋问题和欣赏一局“优美”的象棋比赛。然而，一个象棋问题只不过是纯粹数学（不是全部如此，因为心理学也起作用）的一个练习而已，而且，每一位声称一个象棋问题“优美”的人，都是在为数学的优美而喝彩，即使这种优美只是相对较低层次的。象棋问题是数学的赞美诗乐曲。

我们可以在一个较低、但是更贴近大众化的水平上，从桥牌，或者降得再低一些，从通俗报纸的猜谜栏中得到同样的认识。它们所具有的巨大的普及性，几乎都是推广初等数学的吸引力。更好一些的谜题创制者，如杜登尼（Dudeney）或卡利班（Caliban），几乎从不运用初等数学之外的东西。他们理解自己做的事情，大众想要的是一个智力上的小“刺激”，在这一点上，没有其他东西能够完完全全地与数学比肩。

我可以补充说，世界上没有任何事情比发现，或者重新发现一个真正的数学定理，使得即便是著名人物（而且是对数学使用了轻蔑用语的人）更能感到愉悦。

① 指国际象棋。——译者

赫伯特·斯宾塞(Herbert Spencer)在其自传中,发表了一个关于圆的定理,那是他在二十岁的时候证明的(他不知道这个定理早在二千年前已由柏拉图证明)。索蒂(Soddy)教授是一个更新、也更有力的例子(他的定理倒确实只是他自己搞出来的)。

## 11

象棋问题是名副其实的数学,但它只是以某种“无关紧要”的方式是数学。不管一步棋是多么的别出心裁和错综复杂,多么有原创性和令人惊奇,它总缺少点本质性的东西。象棋问题是不重要的。最好的数学既是严肃的,又是优美的——如果愿意的话,也可以说是“重要的”,不过“重要的”这个词很模糊,“严肃的”才更好地表达了我的意思。

在此,我脑子里想到的不是数学在“实践上的”效果。我将不得不在稍后一些的时候再返回到这个问题,目前我只是说,在一种粗略的意义上,如果说一个象棋问题是“没有用处的”,那么,对于大多数最好的数学来说,它们同样也可以说是没有用处的。只有非常少的一部分数学在实践中才是有用处的,而那部分数学相对而言又是乏味的。一个数学定理的“严肃性”,不在于它在实践上的效果——那往往是可以忽略不计的,而在于它所关联着的数学思想是“重要的”。我们可以粗略地说,如果一个数学思想能以一种自然和富有启发性

的方式，与大量的其他数学思想联系起来的话，那么它就是“重要的”。因而，一个严肃的数学定理，联系着重要的数学思想，很可能导致数学，乃至其他科学的重要进展。还没有象棋问题曾经影响了科学思想在总体上的发展，毕达哥拉斯、牛顿、爱因斯坦在他们的时代，都改变了科学思想的整个方向。

当然，一个定理的严肃性不在于它导致的后果，那只是它的严肃性的证据。莎士比亚曾经对英国语言的发展产生了巨大的影响，奥特维则几乎没有任何影响，但这不是莎士比亚是更好的诗人的原因。莎士比亚是更好的诗人，乃是因为他写出了更好的诗。象棋问题比数学之低级一些，就如同奥特维的诗比莎士比亚的诗之低级一些，不在于它导致的后果，而在于其内容。

还有一点我要简要地讨论一下，这不是因为它没什么意思，而是因为它很困难，还是因为我没有资格对美学作任何严肃的讨论。数学定理的美极大地依赖于它的严肃性，就像在诗歌中，一行诗句的优美可能在某种程度上依赖于它所包含的思想的重要程度一样。我引过莎士比亚的两行诗作为语词模式的纯粹之美的例证，不过下面这行诗似乎更加优美：

After life's fitful fever he sleeps well

经历了生活忽断忽续的狂热，他沉沉睡入梦乡。  
这行诗的模式同样很好，但诗中的思想有重要意义，其主题更加深刻，因而我们的感情被深深打动了。思想确实对模式有影响——即使是在诗歌中；而在数学中，自

然了，这种影响更大。但我不想严肃地去论证这个问题。

## 12

现在，下面这一点会更加清楚：如果我们想再取得任何进展，我就必须举出“真正的”数学定理的例子——每位数学家都会承认它们是第一流的。在这里，我被我写作时的限制严重地妨碍住了。一方面，我的例子必须非常简单，没有专业数学知识的读者也能理解；没有任何复杂的预备性解释是必要的，读者必须能够像跟上我的阐述一样，跟上我对这些定理的证明。这些条件把数学中许多最为优美的定理，如费尔马的“二平方”(two square)定理或二次互反律，给排除在外了。另一方面，我的例子应该是从“一流的”(pukka)数学中取得的，这是在职的专业学家的数学。这个条件排除了许许多多的数学定理，它们应该是相对容易被理解的，但它们侵占了逻辑和数学哲学的地盘。

在我看来，回到希腊数学家那儿去寻找例子，几乎是最好的做法了。我将陈述并证明希腊数学中两个著名的定理。它们是“简单的”定理，里面的思想及对它们的演示均是如此，但它们乃是最高级别的定理，这也是毫无疑问的。每一个定理都像它在初被发现之时那样的新颖和重要——两千年的时间都没有使其中任何一个有所减损。最后一点是，任何有些智力的读者——不

管他的数学底子是多么薄弱，都可以在一个小时之内掌握对它们的陈述和证明。

1. 第一个是欧几里得对于存在无限多素数的证明。

素数是这样的数

(A) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ……

它们不能被分解为更小的因子之乘积。这样, 37 和 317 便是素数。素数是我们用乘法来构造所有数的原材料: 比如  $666 = 2 \times 3 \times 3 \times 37$ 。每个不是素数的数都被至少一个素数所整除 (当然, 一般来说, 是被几个素数整除), 我们不得不证明存在着无限多的素数, 就是说, 序列(A)是没有尽头的。

让我们假设该序列是有尽头的, 而

2, 3, 5, …… , P

就是完整的素数序列 (因而 P 是最大的素数)。在这个假设的基础上, 让我们考虑靠下面的公式定义出的数 Q:

$$Q = (2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times P) + 1。$$

很明显 Q 是不能被 2, 3, 5, …… P 当中的任何一个素数所整除, 因为被任何一个数去除, 所得到的余数都是 1。然而, 如果 Q 自身不是素数, 它就可以被某些素数整除, 所以会有一个素数 (也许就是 Q) 比这些素数中的任何一个都要大。这与我们的假设, 没有素数比 P 大, 是矛盾的, 所以这个假设为错。

这个证明用的是归谬法, 被亚里士多德厚爱有加

的归谬法,是数学家最称手的工具之一。这一招法远远优于象棋中的任何一个招数:一位象棋选手也许会走出弃卒甚至弃子的招法,但数学家则提出了完整的这种游戏。

## 13

2. 我的第二个例子是毕达哥拉斯对  $\sqrt{2}$  是无理数的证明。

一个有理数是这样的分数  $a/b$ , 其中  $a$  和  $b$  都是整数。我们也许要假设  $a$  和  $b$  没有公因子, 因为如果它们有一个公因子的话, 我们可以把它约去。说“ $\sqrt{2}$  是无理数”, 只是用另外一种方式断言,  $2$  不可能被表达成  $(a/b)^2$  这种形式, 这又等于是说, 下面的方程

$$(B) \quad a^2 = 2b^2$$

在  $a$  和  $b$  为没有公因子的整数值时不可能有解。这是一个纯粹算术的定理, 它不需要任何关于“无理数”的知识, 或者说, 它不依赖于任何有关无理数性质的理论。

我们再次用归谬法进行论证。我们假设 (B) 是对的,  $a$  和  $b$  是没有任何公因子的整数。由此可从 (B) 得出  $a^2$  是偶数 (因为  $2b^2$  可以被  $2$  整除), 因此  $a$  是偶数 (因为一个奇数的平方仍是奇数)。如果  $a$  是偶数, 那么

$$(C) \quad a = 2c$$

其中  $c$  是整数; 因而



$$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$$

或者

$$(D) \quad b^2 = 2c^2$$

因此  $b^2$  就是偶数,因而(理由如前) $b$  便是偶数。这就是说, $a$  和  $b$  均为偶数,所以它们有公因子 2。这与我们的假设矛盾,这假设因而是错的。从毕达哥拉斯定理可知,正方形的对角线与它的边不成正比(其比率不是有理数,没有任何长度单位使二者均为此长度单位的整数倍)。因为如果把边算作我们的长度单位,那么,从一个也是由毕达哥拉斯提出来的熟悉的定理可知,

$$d^2 = 1^2 + 1^2,$$

因而  $d$  不可能是个有理数。

我可以从数论中引用随便多少个精美的定理,它们的意思谁都明白。举例来说,有一个定理被称为“算术基本定理”:任何一个数都只能以一种方式被分解为素数之积。据此, $666 = 2 \times 3 \times 3 \times 37$ ,且没有其他分解方式; $666 = 2 \times 11 \times 29$  或者  $13 \times 89 = 17 \times 73$  完全是不可能的(我们不用算出乘积就可以看出来)。这个定理,顾名思义,是更高等的算术的基础;但是对它的证明,虽然并不“困难”,却需要先讲一定的预备知识,非数学专业的读者可能会发现这很烦冗。

另外一个著名和优美的定理,是费尔马的“二平方”定理。素数可以(如果我们忽略特殊的素数 2)被排成两类,这些素数

$$5, 13, 17, 29, 37, 41, \dots$$

在被 4 除的时候余数都是 1, 这些素数

7, 11, 19, 23, 31, ……

在被 4 除的时候余数是 3。所有第一类素数, 而第二类素数中则没有一个, 能够被表示成二个整数的平方之和, 即

$$5 = 1^2 + 2^2, 13 = 2^2 + 3^2,$$

$$17 = 1^2 + 4^2, 29 = 2^2 + 5^2;$$

但 3, 7, 11 及 19 不能用这种方式表示 (读者逐一查验即可知之)。这是费尔马定理, 它很公正地被列为算术中最好的定理之一。不幸的是, 除了几乎是专家的数学家, 它无法在任何人的理解范围之内得到证明。

在“集合论”(Mengenlehre) 里面, 也有优美的定理, 例如康托尔关于连续统“不可数性”的定理。这里所存在的困难却恰好相反。对这个定理的证明足可以说是简单的, 只要其语言已被掌握即可, 但为了弄清楚它的意思, 必须作相当可观的解释才行。所以, 我不再试图给出更多的例子了。我给出的例子是试验品, 欣赏不了它们的读者不大可能会欣赏得了数学中的任何东西。

我说过, 一个数学家是思想的模式的创造者, 且优美性和严肃性是判断这个模式的标准。我几乎无法相信, 任何理解这两个定理的人竟还会怀疑它们通过了这一检验标准。如果我把它与杜德尼最巧妙的猜谜问题, 或者最好的象棋问题——精通这门技艺的大师提出来的问题相比, 它在这两个方面的优越性就非常

突出了：这里存在着一个不可能弄错的等级上的差别。它们更为严肃，远为更加优美。我们能够更切近一点儿地定义，其优越性在于什么吗？

## 14

首先，在严肃性方面，数学定理的优越性是显然的和巨大的。象棋问题都是一些精巧但非常有限的思想叠合的产物，它们彼此之间并没有根本性的差异，且对象棋之外的事情没有任何影响。就算象棋从来没有被发明过，我们也会以同样的方式去思想，然而欧几里得定理和毕达哥拉斯定理却深刻地影响了即使是数学之外的思想。

— 72

因而，欧几里得定理对于算术的整个结构都是关键性的。我们不得不用素数这些原材料来建造算术的大厦，而欧几里得定理向我们保证，我们有充足的材料去做这一工作。不过，毕达哥拉斯 $\sqrt[3]{17}$ 定理具有更广泛的应用，而且提出了一个更好的课题。

我们首先应该注意到，毕达哥拉斯的论证可以作意义深远的推广，只要作小小的原理上的改变，它就可以应用于众多类的无理数。我们可以非常类似地证明（就像西奥德鲁斯(Theodorus)似乎已经做过的）

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{17}$$

是无理数，或者（超出了西奥德鲁斯所做的） $\sqrt[3]{2}$  和  $\sqrt[3]{17}$ ，

是无理数。

欧几里得定理告诉我们，要为整数构造一个一致的算术体系，我们有源源不绝的原材料。毕达哥拉斯定理及其推广告诉我们，当我们建造起了这个算术体系时，我们的需要还没有得到充分的满足，因为有许多量值迫使我们注意它们，而且在算术中它们是不可测的；正方形的对角线只不过是明显的例子而已。这一发现的深刻的重要性立即被希腊数学家们认识到了。他们开始假设（我设想，与“常识”的“自然的”指令一致），所有同一种类的量值都是可测的，例如，任何两个长度，都是某些共同的单位的倍数，他们还在这个假定的基础上构造了比例理论。毕达哥拉斯的发现揭露了这个基础的不可靠性，并导致了深刻得多的奥多克斯（Eudoxus）的理论构造，它在《原本》的第五册中被阐述过，它被许多现代数学家当做希腊数学的最好的成就。这个理论在精神实质上令人吃惊地是现代的，或许可以被当成是无理数的现代理论的开端，它使数学分析发生了革命且对晚近的哲学有很大影响。

这样，两个定理中任何一个的严肃性都是毫无疑问的。更值得作出的论断是，任一定理都没有最轻微的“实际的”重要性。在实际应用中，我们只关心相对较小的数，只有星体天文学和原子物理学与“大”数打交道，然而，与最抽象的纯粹数学相比，它们并没有多少实际的重要性。我不知道什么算是对工程师来说有用的最高精确性——如果我们说出十位有效数字，我们就已

经非常大方了。因而

### 3. 14159265

(圆周率  $\pi$  精确至第八位小数的值) 是两个九位数 314159265/100000000 之比。

比 1, 000, 000, 000 小的素数是 50, 847, 478: 这对一位工程师来说足够用了, 不考虑剩下的数他也感到十分满意。对于欧几里得定理也是一样, 显然, 无理数对于一位工程师来说是没有意义的, 因为他只关心近似值, 而所有的近似值都是有理数。

## 15

74 一个“严肃的”定理是包含“重要”思想的定理, 我认为, 应该试着再稍微切近一点地分析一下, 是什么特性使得一个数学思想成为重要的。这是非常困难的, 而且不大可能我所能够做出的任何分析都很有价值。当我们碰到一个思想的时候, 我们能够认识到它是重要的, 就像我们能够认识到我讲的那两个典型例子中的思想是重要的那样。不过, 这种认识的能力依赖于在数学上有相当高的老练程度, 且对数学思想非常熟悉, 而这种熟悉又只能来自于在它们上面花费了多年的时间。所以, 我必须尝试对数学思想何以重要作某种分析, 而且应该能够做出尽管不充分, 但在目前而言却是可靠的和明智的分析。无论如何, 有两件事似乎是本质性的: 一定的普遍性和一定的深度, 不过, 这两个特性

中的任何一个都根本不容易精确定义。

大致说来, 一个重要的数学思想, 一个严肃的数学定理, 应该在下述这种意义上是“普遍的”: 在许多数学构造中, 它都是其中的一个构成成分, 在许多不同种类的定理的证明中, 它都能用得上。这个定理应该是这样的: 即使在一开始它以一种相当特殊的形式被陈述出来 (像毕达哥拉斯定理), 它也可作很大的推广, 而且, 对于它那一类定理来说, 它还是很典型的。对它的证明所提示出来的关系应该是这样的: 它联结起了许多不同的数学思想。所有这些结论都很含糊, 且其正确性必须在作许多保留的前提下才能成立。不过, 还是能够很容易地看到, 一个数学定理在明显缺乏这些特性时, 不大可能是严肃的; 我们只需要从算术中大量独立于任何理论而存在的珍品中举几个例子来说明此点。我举两个例子, 几乎是信手从劳斯·保尔 (Rouse Ball) 的《数学娱乐》<sup>①</sup>中拈来的。

75 —

(a) 四位数中仅有 8712 和 9801 是其“反序数”的整数倍:

$$8712 = 4 \times 2178, \quad 9801 = 9 \times 1089,$$

没有比 10000 更小的数具有这种性质。

(b) 只有四个 (比 1 大的) 数是它们各位数字的立方之和, 即

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3, \quad 370 = 3^3 + 7^3 + 0^3,$$

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3, \quad 407 = 4^3 + 0^3 + 7^3.$$

<sup>①</sup> 1939 年第 11 版, H. S. M. Coxeter 修订。

这些都是奇特的事实，非常适合猜谜问题，大概会使业余爱好者得到娱乐，但它们中没有任何东西很吸引数学家。对它们的证明既不难也了无趣味——只是有点麻烦。这些定理不是严肃的；而且显然，一个原因（虽然可能不是最重要的）就是对其的阐述和证明均是极度特殊的，它们不能被进行任何有意义的普遍化。

## 16

“普遍性”是个模糊和相当危险的字眼，必须小心不要让它过多地主导我们的讨论。在数学和关于数学的作品中，这个词在各种各样的意义上被使用着，而且，特别有一种意义，逻辑学家很恰当地给予了其很高程度的重视，但在这里它又是完全无关的。在这种很容易定义的意义，所有数学定理都同等地和完全是“普遍的”。

“数学的确定性”，怀特海说道，“依赖于它的彻底的抽象的普遍性”。当我们断定  $2 + 3 = 5$  的时候，我们是在断定存在于三组“事物”之间的一个关系，且这些“事物”不是苹果或钱币，或者任何这一类或那一类的事物，而仅仅是事物，“任何持久存在的事物”。这个陈述的意义与事物群组中成员的特殊性完全是无关的。所有数学“对象”或“实体”或“关系”，诸如“2”，“3”，“5”，“+”或“=”，以及所有它们出现于其中的数学命题，在它们是完全抽象的这种意义上，也是完全普遍

的。真正说来，怀特海话中的一个词是多余的，因为在他这种意义上，普遍性就等于抽象性。

这种意义上的普遍性是重要的，逻辑学家强调它也是很正确的，因为它把一个自明之理给展现出来了，而有许多人本应该更好地懂得，但却容易忘掉此自明之理。例如，像天文学家或物理学家声称自己发现了宇宙必以一种特殊方式运行的“数学证明”这类事情，乃是相当常见的。所有诸如此类的声称，如果从字面上解释，确实是毫无意义的。从数学上证明明天会发生日食，应该是不可能的，因为日食和其他物理现象，并不形成数学的抽象世界的一个部分；而且，我设想，所有天文学家都会被说服而承认这一点，不管他们正确地预测了多少日食现象。

显然，我们现在关心的不是这种“普遍性”。我们在一个数学定理与另一个数学定理之间寻找普遍性上的差别，——而在怀特海所说的意义上，它们全都是同等地普遍的。这样，§15中“无关紧要的”定理(a)和(b)，与欧几里得定理和毕达哥拉斯定理就正好是同样“抽象”或“普遍”了，与象棋问题也是一样。象棋棋子是白的还是黑的，或者是红的还是绿的，或者说到底连有没有物质的“棋子”，对于象棋问题都是不相干的；一个象棋问题，无论是象棋专家轻易地在大脑中演示的象棋问题，还是我们不得不借助于棋盘费力地重新摆出的象棋问题，都是同一个问题。棋盘和棋子只不过是刺激我们迟钝的想象力的设施，对于问题本身来说，它们一点也不



比黑板和粉笔对于一个数学讲演中的定理更具有实质意义。

我们现在所寻求的，并不是这种对于所有数学定理都共有的普遍性，而是更微妙、更难以捉摸的那种普遍性，我在§15里用粗略的话语已试着描述过它了。即便是这种普遍性，我们也必须小心而不要过多地强调它（我认为，逻辑学家如怀特海倾向于这样做）。当代数学的突出成就并不只是“普遍性之微妙性（subtlety）的逐层堆砌”。任何一流的数学定理都有某种程度的普遍性，但若普遍性过强，则定理无可避免地趋向于平淡乏味。“每个事物都是其所是而不是其他任何事物”，事物之间的差别也像它们的相似一样，是十分有意思的。我们选择谁做朋友，不是依据他们表现出人类所有的令人愉悦的特性，而是因为他们是他们所是的那种人。在数学中也是这样，一个为过多对象所共同具有的性质鲜能激动人心，除非拥有足够的特殊性，否则数学思想也会变得暗淡无光。在这里，我无论如何可以引用怀特海的话来支持我：“被恰当的特殊性所限制的巨大的普遍性，才是富有成果的概念。”

## 17

对于一个重要思想，我所要求的第二个特性是深度，这更难以定义。它与困难性有某种关系，“更深刻的”思想总是更难被把握住的：但与困难程度根本不是

一回事。作为毕达哥拉斯定理基础的思想及其推广，是相当深刻的，但没有一个数学家现在会发觉它们是困难的。另一方面，一个定理可以在本质上是多余的，但仍相当难于证明（如很多“丢番图”定理，即关于方程的整数解的定理）。

数学思想似乎多少被安排得很有层级，在每一层级上的思想都是它们之间以及与高于它们和低于它们的思想的关系的复合体。层级越靠下，思想就越深刻（一般也更困难）。所以一个关于“无理数”的思想要比一个关于整数的思想更深刻；毕达哥拉斯定理也因此而比欧几里得定理深刻。

让我们把注意力集中在整数中间，或者处于某特殊层级的其他对象群。那么，也许会发生这样的事：这些关系中的一个关系可以被完全地了解，我们可以认识和证明例如整数的某些性质而无需低于整数层级的内容的知识。因而，我们只通过考虑整数的性质而证明了欧几里得定理。但也有许多有关整数的定理，若不挖掘更深层级和考虑发生于更低层级的东西，我们便不能恰当地领会、更不能证明之。

在素数理论中找到例子是容易的。欧几里得定理非常重要，但不是很深刻：我们能不使用任何比“可分性”更深刻的概念而证明存在无限多的素数。但一当我们知道了这个问题的答案，新问题就凸显出来。素数有无限多，但它们的分布如何？给定一个巨大的数  $N$ ，比如  $10^{80}$  或  $10^{10108}$ ，有多少比  $N$  小的素数？一当问这些问

题,我们就会发现自己处在一个非常困难的境地。我们能够以非常令人吃惊的精确性回答这些问题,但只能靠钻得更深而暂时抛开摆在上一层的整数,靠使用现代函数论这最有力的武器。因而,解答我们的问题的定理(所谓“素数定理”)是比欧几里得定理或者甚至毕达哥拉斯定理更深刻的定理。

我能够再增添一些例子,但“深度”这个概念即使对于一个懂得它的数学家来说也是捉摸不定的,我几乎不能设想,自己在这里能够就此说出更多的对其他读者有很大帮助的东西来。

## 18

— 80

在§11那里,我开始比较“真正的”数学和象棋,但还遗留了一些东西。也许,我们现在将真正数学的定理在内容上、严肃性上和重要性上有着巨大的益处,视为理所当然。几乎同样明显的是,对于一个训练有素的知识分子而言,数学在美这一方面也有很大优势,不过这种优势更难以定义或定位,因为象棋问题的主要缺点明显在于它的“无关紧要性”,在这方面所作的对比,与任何更为纯粹的美学判断,都是混杂在一起的,且干扰了后者。我们能在欧几里得定理和毕达哥拉斯定理这样的定理上,区分出什么“纯粹美学”的特性来呢?对此,除了讲一点互不相连的评述,我将不冒更大的风险。

在这两个定理中(当然,我把对它们的证明也包括在内),存在着相当高的不可预测性,与必然性和简练性结合在一起。这些论证采取了如此奇特和令人惊讶的形式,所使用到的工具与其影响深远的结果比较起来,似乎是如此儿戏般地简单;但结论却是必然的。没有任何细节上的复杂性——在每种情况下,只需一两句话就足以打发它们了;这对于许多远为困难的定理的证明也是一样的,完全领会它们需要相当高的技术熟练性。我不想在一个数学定理的证明中要求有诸多“不同情形”:“列举诸多情形”确实是数学论证的较乏味的形式之一。一个数学证明应该像简单、清楚的彼此类似的事物群,而不是像银河系中分散的一连串星星。

象棋问题也具有不可预测性以及某种简练性,具有本质意义的是行棋出人意料且棋盘上的每个棋子都发挥作用。但它在美学上的效果则是累加起来的。另外也具有本质意义的一点是(除非问题过于简单,没有真正的娱乐性),关键性的行棋应该包含许多变招,每一变招都需要独自的答案。如果“P - B5 则 Kt - R6; 如果……则……; 如果……则……”。——如果没有这许许多多的答案,那么其效果就将会大打折扣。所有这些都是真正的数学,并具有其优点;但这正是“通过列举各种情形而证明”的(且是这样的情形,各种情形在根本上本没有深刻分歧),真正的数学家总是瞧不上它的。

我倾向于认为，我能够通过诉诸象棋选手自己的感觉而增强我的论证。一个象棋大师确实在根本上瞧不起一个问题研究家的纯粹数学的技艺。他自己储存了大部分这种技艺，且能够在紧急情况下创造出它们：“如果他这么走，那么我在心里就有这么一个赢棋的组合。”不过象棋中“伟大的比赛”基本上是心理的，是一个训练有素的心智同另一个训练有素的心智之间的斗争，而不是许多微小的数学问题的一个纯粹的汇聚。

## 19

我必须回到我的剑桥的辩护上，而且更为仔细一点地审察我在§6中推延下来的一些观点。我在这里只对作为创造性艺术的数学感兴趣，现在已经很明白了。但还有其他值得考虑的问题，特别是关于数学的“用处”（或有用性），仍存在着大量的思想混乱。我们也得考虑数学是否真的像我在剑桥讲演中视之为当然的那样“无害”。

一门科学或艺术可以被说成是“有用的”，如果它的发展即使是间接地增加了人类物质生活方面的安乐和舒适性，如果它增进了快乐——我以粗俗的和常识的方式使用这个词。因而，医学和生理学是有用的，因为它们减轻了人们的痛苦；工程学是有用的，因为它帮助人们建造房屋和桥梁，因此提高了生活水平（工程学当然也造成害处，但这不是目前的问题）。有一些数学

当然也以这种方式是有用的，在没有相当的能实际运用的数学知识时，工程师无法开展他们的工作，数学甚至开始在生理学中寻找到了用途。所以在这里，我们拥有一个可能的依据为数学辩护，这个辩护或许不是最好的，甚至不是特别强有力，但它是我们必须审察的一个辩护。数学“较高尚”的用处（如果真有这回事的话）若是数学与其他艺术所共享的用途，那它与我们的审察将是无关的。数学可以像诗歌或音乐一样，“增进和保持心灵的高尚的习性”，并因此而增加数学家以及甚至是其他人的快乐；但是在那个基础上为它辩护，只是纯粹把我已经说过的东西精心组织一下而已。我们现在不得不考虑的，是数学的“粗俗的”用处。

## 20

所有这些似乎都非常显而易见，但即使在这里也经常存在大量混乱，因为相当普遍，最“有用的”学科是这样的学科：对于我们大多数学习它的人来说，它们是最无用的。拥有足够数量的生理学家和工程师是有用的，但对于普通人来说，生理学和工程学却是无用的学问（虽则他们的研究工作当然可以在其他的基础上得到辩护）。对我来说，我从来没有发现过，自己所拥有的除纯粹数学以外的这种科学知识曾带给我哪怕是最轻微的好处。

科学知识对于普通人具有如此之少的实践上的价

值，有价值的科学知识又是如此乏味和无足轻重，以及其价值几乎像是与它值得尊敬的用处成反比，这确实是令人吃惊的。对通常意义上的算术（这当然属于纯数学）反应相当敏捷，乃是有用的。懂一点法语和德语，懂一点历史和地理，或者甚至懂一点经济学，都是有用的。但懂得一点点化学、物理学或生理学，在日常生活中根本没用。我们不用知道煤气的构成成分也知道它会燃烧；汽车坏了，我们把它拖到修理厂就行了；胃不舒服，我们就去看医生或去药店买药。我们若不是靠粗略的实用知识，便是靠别人的专业知识生活着。

然而，这是次要问题，一桩教育学上的事情，只对于老师们——他们不得不指导吵嚷着要为其孩子受到“有用”教育的家长们——而言，它才是重要的。当然，在我们说生理学有用时，我们的意思不是说大多数人都应该去学习生理学，而只是说，依靠少数专家发展生理学就可以增加大多数人的安康。对于我们来说，目前重要的问题是，在多大程度上可以断言数学具有这种用处，哪部分数学的有用性是最强的，以及在什么程度上，就像数学家所理解的那样，对数学作专心研究的价值可以单独在这个基础上得到证明。

## 21

现在，我的结论是什么，也许将是明白无疑的了；所以我将立即教条式地陈述它们，并更详细地说明它

们。无可否认,大量的基础数学——我按职业数学家使用“基础”这个词的意义来使用它,在此意义之下它包括,例如,相当的能实际运用的微分和积分运算——具有可观的实践上的用途。这部分数学在整体上相当乏味;它们仅仅是数学中具有最少美学价值的部分。“真正的”数学家,费尔马、欧拉、高斯、阿贝尔和黎曼的“真正的”数学,几乎是完全“无用的”(对于“应用”数学,也正如对于“纯粹”数学一样,这都是成立的)。任何名副其实的的职业数学家生涯的价值,是不可能在其工作的“有用性”的基础上得到证明的。

不过在这里我们必须澄清一种错误想法。人们常常提出,纯粹数学家以他们的工作的无用性而自豪,以其没有实践上的应用为值得夸耀之事。这种非难往往以高斯的一句不够谨慎的说法为基础,其大意为,如果说数学是科学的王后,那么,数论因其具有最高程度的无用性,就是数学中的王后了——我一直没能找到精确的引语。我敢肯定,高斯的说法(如果那真是他的说法)被很粗俗地误解了。如果数论能被用于任何实践上的,或者显然荣耀的用途,如果它能被直接用于增进人类快乐或减轻人类痛苦,如同生理学,甚至化学所能够做到的,那么肯定,无论高斯还是其他别的数学家,都不会愚蠢到竟然贬低这种应用,或者为它有这种运用而感到遗憾。但是科学,正如同它能被用于正义的事情一样,也能被用到邪恶的事情上(当然,特别是在战争时期);高斯和逊于他的数学家们,都能从他们乐于见



到下面的情况而证明数学的价值：总算是有一种科学，也即他们的数学，凭借着与人们生活中的各种活动保持疏远，而保全住自己的高洁。

## 22

还有另外一种错误想法必须警惕。假设“纯粹”数学和“应用”数学在有用性方面存在很大差别，是很自然的事。但这是个错觉：在这两类数学之间存在着鲜明的区别，我马上将要解释这一点，不过这对二者的有用性基本上没有影响。

纯粹数学和应用数学如何彼此分别开来？对这个问题，我们能够确定地回答，且数学家对它的看法普遍一致。我的回答中没有一点东西是非正统的，但需要做一些预先的说明。

下面两节将稍微有一点哲学味儿。哲学的涉入将不会很深，或者对我主要的论题——以不管什么方式——具有关键意义；但我将用到被以确定的哲学含义很频繁地使用的词，如果我不解释自己怎么使用它们的话，读者可能会被弄糊涂。

我曾大量使用“真正的”这个形容词，而且是以我们日常谈话中的意思使用它的。我说过“真正的数学”和“真正的数学家”，如同我可能已经说到过“真正的诗歌”或“真正的诗人”一样，我将继续如此使用。但我也会使用“实在”这个词，并且以两种不同的内涵使

用它。

首先，我将说及“物理实在”，并且在这里，我将再次在日常的意义上使用这个词。我用物理实在意指物质世界，白天和黑夜，地震和日食的世界，物理学力图去描述的世界。

就此点而言，我难以想象，任何一位读者会发现我的用语有麻烦，不过现在，我靠近了更加困难的领域。对我，以及我设想对大多数数学家来说，存在着另外一个实在，我将称之为“数学实在”；对于数学实在的性质，无论是在数学家之间还是在哲学家之间，都不存在任何种类的一致看法。一些人坚持它是“精神的”，且在某种意义上是我们构造了它，其他的人坚持它外在于、独立于我们。只有已经解决了许许多多最为困难的形而上学问题，一个人才能够对数学实在给出可信的描述。如果他能够把物理实在也考虑进去，那他就解决了所有的形而上学问题。

在这里，我不希望论证任何这种问题，即使我能够胜任，但我将教条地陈述我自己的立场，以避免一些次要的误解。我相信数学实在是外在于我们的，我们的作用是发现或观察它，我们证明了的，我们卖弄般地描述为我们的“创造”的定理，只不过是我们的观察笔记。这个观点被许多从柏拉图以来具有很高声望的哲学家以各种各样的方式所持有，我将使用对持有此观点的人来说是很自然的话语。不喜欢这种哲学的读者可以改

变这个话语：这对我的结论将造成一点点的差异。

## 23

纯数学和应用数学的差异最突出的或许是在几何学中。有纯粹几何学这种科学，其中有许多几何学，射影几何，欧氏几何，非欧几何，等等。每一种几何都是思想的一个模型，一种模式，且依其特殊的样式的益处和优美性被加以判断。它是个地图或图像，多种东西联合的产物，是对数学现实的一个片断的部分的和不完全的复制（然而就其所能达到的而言又是精确的）。不过，目前对我们来说的重要之点是，有一个东西，纯粹数学无论如何都不是其图像，那就是物理世界的时间—空间的实在。确实，很明显，数学不可能是其图像，因为地震和日食不是数学概念。

88

这对于门外汉也许有点矛盾，但它对几何学家却是不言自明的；或许我能够用例证把它弄得更清楚一些。让我们假设我作一个关于某几何系统的讲演，诸如通常的欧氏几何，我在黑板上画出图形，直线或圆或椭圆的大致图画，以刺激我的听众的想象力。很清楚，首先，我证明的定理的真理性不以任何方式受我的图形的质量的影响。它们的作用只不过是让听众彻底理解我的意思而已，所以，如果我能够做到这点，那么让一个最有技巧的制图员来重新画出它们，听众也没有任何收获。它们是教学方面的例证，不是讲演的真正主题

的任何部分。

现在让我们更进一步。我正在作讲演的屋子是物理世界的一部分，有其自己确定的模式。研究这种模式以及物理实在的普遍模式，本身是一门科学，我们或可称之为“物理几何”。设想现在一个强劲的发动机或一个巨大的有吸力的物体被放到这屋里来了。这样，物理学家告诉我们，这个屋子的样子被改变了，它的整个物理模式轻微地但确定无疑地扭曲了。我证明的定理会变成错误的吗？假设对于它们我所给出的证明以任何方式受到了影响，都肯定是胡说八道。这就如同设想，当读者用茶水玷污了一页莎士比亚的剧本文本时，剧本被改变了一样。剧本是独立于它被印在上面的书页的，“纯粹几何”独立于作讲演的屋子，或者任何其他物理世界的细枝末节。

这是纯粹数学家所持的观点。应用数学家，数学物理学家，自然持不同的观点，因为他们有从物理世界自身而来的成见，它也有自己的模式的结构。我们不能精确地描述这种模式，如同我们能够精确地描述纯粹几何的模式那样，但我们能对此说出某种重要的事情。我们能够描述，有时相当准确，有时非常粗略，它的某些构成成分之间存在着的关系，并且将它们与纯粹几何的某些系统的构成成分之间所存在的精确关系作对比。我们也许可以描绘出这两个关系的集合的某种相似性，这样，对于物理学家，纯粹几何将会变得有益了；它将在那个程度上，给予我们一幅“切合物理世界的事

实”的映像。几何学家提供给物理学家整个一套映像，供其从中挑选。或许一个映像比其他映像更好地适合这些事实，因而提供了这个特殊映像的几何，对应用数学家而言，将会成为最为重要的几何。我可以加一句，即使一个纯粹数学家也可以发现，他对这种几何的欣赏程度增加了，因为没有数学家会如此之纯粹，以至于对物理世界竟会丝毫不感兴趣；但是，就他屈服于这种诱惑而言，他将失去他纯粹数学的立场。

## 24

90 还有可能出现另外一种议论，物理学家大概会觉得这种议论是矛盾的，虽然，矛盾比十八年前可能已经显得小多了。我将使用与我 1922 年在英国科学促进会对 A 组发表的一篇演讲在很大程度上都相同的言辞来表达它。那时，我的听众几乎全都是物理学家，也许我当时讲得有点煽情，但我至今仍然坚持我所讲的观点的主旨。

我在一开始的时候说，数学家和物理学家在立场上的差别，也许比通常所想得要小。在我看来，其中最重要的差别似乎是：数学家与实在有更直接的接触。这可能显得很荒谬，因为恰恰是物理学家才处理着通常被描述为“实在”的素材。不过，只需要做一个小小的反思就足以表明，物理学家那里的实在，不管其是什么，很少或并不具有我们在常识上本能地归之于实在的那

些属性。一把椅子或许是旋转着的电子的堆积,或者是上帝心中的一个观念:每一种关于椅子的解释可能都会有其优点,但根本没有一种解释与常识所暗含的想法符合得非常贴切。

我继续说,无论物理学家还是哲学家,都没有对“物理实在”,或者说,没有对物理学家如何从他据以为出发点的杂乱的事实或感觉的堆积,而最后达至他呼之为“实在”的物体的构造,做出过任何可信的解释。所以,不能说我们知道物理的素材是什么;但这不是一定会阻碍我们大致地理解物理学家试图做些什么。很清楚,物理学家试图把一大堆没有条理的粗陋的事实,与抽象关系的某种确定的、有秩序模型联系起来,这种模型只能借自于数学。

另一方面,数学家与他自己的数学实体打交道。对于这种实体,如我在§22所解释的,我持“实在论的”而不持“唯心论的”观点。无论如何——这是我的主旨——实在论观点对于数学实在比对于物理实在更有可能是正确的,因为数学对象与它们看上去的样子是那样的一致。一把椅子或一颗星体一点都不像它们看上去的那样,我们越是琢磨它们,其轮廓在环绕它的感觉的迷雾之中就越是模糊。然而“2”或“317”与感觉没有任何关系,我们越是切近地详察它,其性质就越发明白地凸现出来。现代物理学或许最为符合某种唯心论哲学的框架——倒不是我相信这一点,而是一些杰出的物理学家这么说。纯粹数学与之不同,对我来说,

纯粹数学像是岩石，所有的唯心论都在它上面碰得头破血流。317是个素数，不是因为我们认为它是，或者相信我们的心灵被以这种而不是以那种方式塑造，而是因为它就是这样的，因为数学实在就是那样建造的。

## 25

纯数学和应用数学的这些区别就其本身来说固然十分重要，但在我们讨论数学的“用处”时，它们只占到很小的分量。我在§21说及费尔马和其他大数学家的“真正的”数学，这种数学具有永恒的美学价值，正如同，比如最好的希腊数学，具有永恒的美学价值一样。这种数学是永恒的，因为，最好的数学，如同最好的文学作品，在几千年之后，也会持续地在千千万万的人们当中，激发起强烈的情感上的满足。这些人起初全部都是纯粹数学家（虽然在他们的时代，纯数学与应用数学的差别远比今天要突出），但我心里所想着的并不仅仅是纯数学。我把麦克斯韦、爱因斯坦、爱丁顿和狄拉克都算在“真正的”数学家里面。当代应用数学的伟大成就是相对论和量子力学，这些学科，在目前，无论如何都像数学一样，几乎是“毫无用处”的。正是应用数学中枯燥和基本的部分，如同纯数学的枯燥的和基本的部分一样，不管好歹有其用处。时间或许会改变这一点。没有人预见到矩阵和群论，以及其他纯粹数学的理论，会应用于现代物理学中，而且，也许，某些高雅的应用

数学将会以一种未曾想到过的方式变得“有用处”。但是，目前的证据所给出的只是这样一个结论：正是数学中常识和枯燥的东西，对实际生活才具有重要性。

对于“有用的”科学毫无吸引力这一点，我记得爱丁顿举出了得当的例子。英国皇家学会在利兹召开了一个会议，人们原以为，与会者可能喜欢听点儿科学运用于“厚毛纺织”(heavy woolen)工业之类的事情，但是为此而安排的讲演和演示，毋宁说是个大大的败笔。与会者(无论是否利兹本地人)好像只想得到点娱乐，而“厚毛纺织”根本就不是什么有意思的题目。所以，这个演讲的听众非常失望。然而，那些讲诺索斯的坑洞，或者相对论，或者素数理论的演讲者，却为他们吸引来了大批听众而感到兴高采烈。

## 26

数学中的哪些部分是有用的呢？

第一，它包括了中学教的那一大堆数学，算术、初等代数、初等欧氏几何、初等微分和积分运算。我们必须刨去一定量只教给“专家们”的数学，如射影几何。在应用数学当中，有用的则是力学基本原理（电学，如学校里教的，必须被算作物理学）。

再则，有相当一部分大学里的数学——它们中的一部分的确发展了中学数学，有着更为成形的技巧，以及一定量更偏近于物理学的学科如电学和热力学，也



是有用的。我们必须记住，储存知识总是有好处的，如果最看重实践的数学家，只具有仅仅对他而言是必不可少的最少量的知识，那么他将会遇到严重的阻碍。由于这个原因，我们必须在所谈的每一个标题下面，都补充一些说明。但我们的一般结论必定是：这样的知识是有用的，就像一个出众的工程师或一般水平的物理学家需要它们那样子有用；而且，这大致上等于说，这种数学没有任何美学上的价值。例如欧氏几何，就它很乏味而言，它是有用的——我们不想要平行公理，或者比例理论，或者规则多边形的构造。

这就出现了一个相当奇怪的结论：从整体上看，纯粹数学明显比应用数学更加有用。纯粹数学家似乎在实践方面，正如在美学方面一样，占有优势。有用的东西毕竟是技巧，而数学技巧主要是通过纯粹数学教给人们的。

我希望不用表白自己不是旨在诋毁数学物理这门杰出的学科，它里面有许多宏大的问题，连最优秀的创造力都应付不了。不过，从某个方面看，普通的应用数学家的处境不是有点可悲吗？如果他想成为有用的，他就必须以一种平凡的方式工作，而且，他不能充分地发挥他的想象力，即使他自己想达到这样的高度也不行。“想象的”宇宙比他笨拙地构造出来的“真实的”宇宙远为优美；应用数学家的想象力的最好的产品中的大多数，就是因为这粗野但充分的理由——它们不符合事实，一旦被创造出来就必须被加以拒绝的。

我们的一般性结论肯定已经足够清楚了。如果说，有用的知识是这样的知识（我们暂时同意这样说）：它大概会在现在或相对不远的未来，为人类在物质上的享受方面做出贡献，因而，它是否在单纯的智力上满足人们乃是无关紧要的，那么，大量更高级的数学就是无用的。现代几何和代数，数论，集合论和函数论，相对论，量子力学——没有一种比其他的更经得住这种检验，也没有真正的数学家的生涯可以在这个基础上被证明是有价值的。如果这就是检验标准，那么，阿贝尔、黎曼以及彭加勒便都浪费了他们的生命；他们对人类生活在舒适性方面所做的贡献，是可以忽略不计的，并且，就是他们没有存在过，这个世界的快乐程度也同过去一模一样。

## 27

人们也许会反对说，我的“有用性”概念过于狭窄了，我只是用“快乐”和“舒适”定义了它，却漏掉了数学一般的“社会”效果——最近，持有不同观点的作者们，已经不厌其烦地强调了这一点。因而，怀特海（他曾经是数学家）谈到了“数学知识对人们的生活，对他们的日常嗜好，对社会组织的巨大影响”；霍本（他对我及其他数学家们所称呼的数学之不赞同程度，就如同怀特海之赞同程度一样）说“没有数学知识，有关大小和阶的语法，我们就不能规划出一个所有的人都很安逸，而

无一人受穷的理性社会。”(还有更多具有类似意思的话)

我不能真心地相信，这个雄辩能够对数学家起很大的安慰作用。论辩双方的话语都强烈地夸大其词，而都忽视了一些非常明显的差别。这对霍本来说倒是非常自然的，因为他公认不是数学家。他用“数学”意指他所能够理解的数学，我曾将之称为“中学的”数学。此种数学具有许多用处，这我是承认的，如果愿意的话，我们可称之为“社会的”数学。而霍本通过对数学发现史作大量有趣的探究，强化了这一观点。这一点也正是他的书的价值所在，因为这使他能够向许多从来不是、将来也绝不会是数学家的读者解释清楚，在数学中有比他们所想到的更多的东西。不过，他很少对“真正的”数学有任何理解(随便一个读到他对毕达哥拉斯定理或欧几里得定理所说的话的人，能够马上知道这一点)。“真正的”数学对他来说只不过是轻蔑地予以怜悯的对象。

怀特海的问题，并不是他不理解或不同情真正的数学。只是，在对数学的热忱中，他忘记了他所相当熟悉的差别。对“人们的日常嗜好”以及“社会组织”具有这种“巨大影响”的数学，不是他怀特海的、而是霍本的数学。能够“被普通人用于日常目的”的数学是微不足道的，能够被经济学家或社会学家应用的数学，则几乎达不到“学术标准”。怀特海的数学可以深刻地影响天文学或物理学，相当可观地影响到哲学——就好像是一种高水平思维常常影响另一种高水平思维——但对

别的任何事情则只具有极其微小的影响。其“巨大影响”不是对人们普遍有效的，而只是对像怀特海自己那样的人才有效。

## 28

所以说，有两种数学。有真正数学家的真正的数学，也有我所谓的“平常的”数学，因为没有比“平常的”更好的词可用。平常的数学可由霍本或这一派的其他作者的论证来辩护，但真正的数学则不能有此类辩护。如果说，它毕竟还是能够被辩护的，那也只能被作为艺术来辩护。这个观点没有一丝矛盾或稀奇之处，它是数学家所普遍持有的观点。

还有另一个问题需要考虑。我们曾经总结说，在总体上，平常的数学是有用的，而纯粹数学不然；平常的数学在某种意义上“有益”，而纯粹数学不然。但我们仍然要问，是否每种数学都有害呢？主张任何种类的数学在和平时期都有很大危害，自然是有悖情理的，所以我们被迫去考虑数学在战争中的作用。在目前，想要不带一丝感情色彩地讨论这类问题，是非常困难的，所以我更乐意避开它们。不过作某种讨论似乎又是必不可少的，幸运的是，这不需要很长。

对真正的数学家来说，有一个令人感到欣慰的结论：真正的数学对战争没有任何用处。没人发现过数论或相对论曾经被用于战争的目的，而且似乎不大可能

有人会在多年以后这么做。确实,应用数学里有一些分支,如弹道学和空气动力学,它们是刻意为战争而发展出来的,需要相当精巧的技术,也许很难说它们是“平常的”,但它们当中没有一个有权被列为“真正的”数学。它们确实丑恶到了可憎的地步,乏味到了令人难以忍受的地步,即使是利特伍德都不能使弹道学受人尊重,而如果他做不到,谁又能够呢?所以,一个真正的数学家具有洁净的良心,没有任何东西会减损他的工作所可以具有的价值。做数学研究,如我在牛津的时候已经说过的,是“无害的和清白的”职业。

另一方面,平常的数学在战争中有很多用途。比如,若无战争这种用途,火炮与射击学专家和设计者,就不可能从事他们的工作。其一般的后果是清楚的:数学有助于(如果不是像物理学或化学一样明显的话)现代的、科技的、“整体的”战争。

这好像很令人遗憾,但其实事情并不是那么清楚,因为,对于现代科技条件下的战争,存在着两种针锋相对的观点。第一个也是最明显的观点是,科学在战争中所起的作用只不过是:通过增加不得不从事战斗的少数人的苦难,以及把这种苦难扩展到其他阶层的人这两种途径,加大了战争的恐怖性。这是最自然和最正统的观点。但也有个非常不同的观点,似乎也是很能站得住脚的,霍尔丹(Haldane)在《卡利尼可斯》<sup>①</sup>中极为有

---

<sup>①</sup> J. B. S. Haldane, *Callinicus: a Defence of Chemical Warfare*, 1894.

力地表述了这种观点。主张现代战争比前科技时代的战争较少恐怖性,乃是可行的:炸弹很可能比刺刀更为仁慈;催泪瓦斯和芥子气或许是军事科学所曾设计出的人道主义的武器;正统的观点单纯依赖于在思想上不甚严谨的感情主义<sup>①</sup>。也可能有人极力主张(这不是霍尔丹的论题):科学会把战争的危險均摊给大家,这一点从长远来看是有益处的。一个平民的生命并不比一个士兵的生命更有价值,一个妇女的生命也不比一个男子的生命更有价值;任何事情都比把兽性集中在一个特定阶层更好一些;以及,简言之,战争“全力”进行得越早越好。

我不知道哪种观点更接近真理。这是个急迫和激动人心的问题,但我不需要在这里来讨论它。它只关系到“平常的”数学,为之辩护更应该是霍本的事情,而不是我的。对他的数学来说,辩护的理由被损害了——所损害的可能还不止那么一点点,而我为数学的辩护理由则毫发未损。

确实还可以说得更多。因为,不管怎么样,有一种目的,数学在战争中是服务于它的。在世界陷入疯狂之际,一个数学家可以在数学中找到无可匹敌的止痛剂。由于在所有的艺术和科学中,数学是最严峻和偏僻

---

<sup>①</sup> 我不希望由这个被大大地滥用了的词,就对问题下先入为主的判断,这个词或许可以被合法地用于表示某些失常的情绪。当然,许多人把“感情主义”用为贬损其他人高尚感情的词,把“现实主义”当成他们自己粗暴野蛮的伪装。

的，在所有的人当中，数学家应该是这样的人：他能够最轻易地获得一个避难之所。在这里，正如罗素所说，“至少我们较为高贵的强烈愿望中的某一个，能够从我们流放其中的沉闷的实际世界中，被有效地解脱出来”。遗憾的是，在这里，我们无可避免地需要对这段话作个非常重大的保留——数学家必须不是特别年老。数学不是个沉思性的而是个创造性的学科，当失去了创造的能力或欲望时，没人能够从它里面得到很多安慰；而且，这样的事情很容易相当迅速地发生在数学家身上。这是个遗憾，不过在那种情况下，他总归不再有多重要了，为他而烦恼将是愚蠢的。

## 29

一 100

最后，我对自己的结论作个总结，但我将以更为个性化的方式来作表述。我在一开始的时候说过，一个人对他的学科辩护，就是为他自己辩护。归根到底，我对一个职业数学家生涯的价值所作的辩护，注定也是对自己所作的辩护。所以，就主旨来说，这个结论性的段落将是我的自传的一个片断。

我记不得，除了成为一个数学家之外，我还想成为什么样的人。我认定我的特殊能力就在数学上，这无论如何都是一清二楚的，我从来也没有征询长辈们的意见。我不记得作为一个男孩，自己曾经对数学感到过任何的激情，至于我可能成为数学家这类想法，根本说不

上是崇高的。我只是由于考试和奖学金才想到数学：因为我想胜过其他男孩，而成为数学家似乎是我能够最终实现这一目标的方式。

大约在十五岁的时候，我的抱负（以一种很偶然的方式）来了个大转弯。有本“阿兰·圣·奥宾”<sup>①</sup>写的名为《三一学院的研究员》的书，是描述所谓的剑桥大学生活系列中的一种。我猜测，这本书比玛丽·考若莉的大部分书都要差一些，但是，如果它曾经激起过一个聪明男孩的想象力的话，它也不大可能是本糟糕透顶的书。书里面有两位男主角，一号男主角叫弗劳尔斯（Flowers），几乎是个完人；而二号男主角叫布朗（Brown），很女性化。两人都发现学院生活中有许多危险，但最坏的是切斯特顿（Chesterton）<sup>②</sup>的赌博沙龙，由两位年轻迷人但极邪恶的贝伦登（Bellenden）小姐经营。弗劳尔斯度过了所有的麻烦，是数学学位考试的第二名和古典语文优等生，自动转成了研究员（这跟我想的一样）。而布朗则屈从于诱惑，使父母破产，自己嗜好饮酒，在一次暴风雨中，被牧师的祈祷从酒狂中拯救过来，即使连获得一个普通学位都是困难重重，最终成为一名传教士。他们的友谊并没有因为这些不幸的事件而破裂，当第一次在高级休息室里边啜饮波尔多葡萄酒，边咀嚼核桃仁的时候，带着深切的同情，弗劳尔

---

① “阿兰·圣·奥宾实际上是弗朗西斯·马歇尔（Frances Marshall）夫人，马修·马歇尔（Matthew Marshall）的夫人。

② 实际上，切斯特顿没有什么好看的风光。



斯的思绪转到了布朗身上。

弗劳尔斯现在是一个相当得体的教员(就“阿兰·圣·奥宾”所能够刻画出来的而言),但就连我这并不精明的头脑都不会承认他有多么聪明。既然他能够做到那些事情,我为什么就不能呢?特别是休息室里的最后一幕,彻底把我迷住了,自从那时起,直到我获得,数学对我主要就意味着三一学院的教职。

当我来到剑桥时,我立即发现,教职意味着有创意的工作,但在我能够形成任何确定的研究想法之前,我花了很长的时间。自然我在学校就已发现,我经常能够比老师做得更好,正如每一个未来的数学家都会发现的那样;即使在剑桥我也发现,尽管当然不如过去频繁,我时常能比学院的讲座者做得更好。但是,我确实非常无知,即便是我已通过了我此后毕生去从事的学科——数学的荣誉学位考试;我仍然把数学想成实质上是个“竞争性”的学科。我的眼界被拉乌教授第一次打开了,他教了我几个学期,给予我关于数学分析的第一个严肃概念。但我最要感谢他的——他毕竟主要是一个应用数学家——是他让我阅读约当著名的《分析教程》的建议;我将永远不会忘记我阅读这本了不起的著作时所感到的惊愕,对我这个时代那么众多的数学家来说,它都是第一个激励,而且,在阅读它的时候,我第一次体会到了数学真正的意味。从那以后,我就以我的方式是真正的数学家了,怀有彻底的数学抱负和对数学的真正激情。

在接下来的十年中，我写了一大堆东西；有超不过四至五篇的文章我仍能记得住，感到它们还算是差强人意。我事业中真正的危机出现在十年或十二年之后，在1911年我开始与利特伍德长期合作，以及在1913年发现了拉曼努安之时。从那时起，我所有最好的工作都与他们的工作联在了一起，而且显然，我与他们的联系是我生涯中有决定意义的事件。在我感到消沉，以及不得不听夸夸其谈、令人厌烦的人讲话时，我仍然可以对自己说，“好吧，我做了一件你永远不可能做到的事情，那就是在一些事情上，我与利特伍德和拉曼努安平起平坐地合作过。”由于他们，我成熟的时间晚得不同寻常：我在四十岁过一点的时候达到了一生的最高峰，当时我是牛津的教授。从那以后我就开始逐步退化，这是年过中年的人、特别是年过中年的数学家的宿命。一位数学家也许在六十岁时还是足够称职的，但指望他做出原创性的工作就不行了。

很清楚，我这一辈子——就其值得去过而言，已然结束，我所做的任何事情都不能明显地增加或减少其价值。保持冷静是相当困难的，但我将我的生活算作“成功”；我得到的报答多于，而不是少于具有我这种特殊等级的能力的人所应得到的。我曾经拥有一系列轻松和“高贵的”职位。对于学院里面更为呆板的例行公事，我只遇到过很小一点点的麻烦。我厌恶“教书”，然而不得不做非常少的教学工作，我所做的这类事情几乎完全都是指导研究工作。我喜欢讲演，也曾经在能力

极强的班级里做过大量讲演；我总是有足够的闲暇做研究工作，这是我一生中一个重大的恒久的快乐。我发觉与他人合作是很容易的，曾大量地和两个不同寻常的数学家合作过，且这使我能为数学增加比我可以合理地期待的要多的大量东西。我有过失望，如同任何其他数学家，但没有一桩特别严重，或者使我感到特别不开心。如果在二十岁的时候再给我一次生命，既不更好也不更坏，那么我会毫不犹豫地接受它。

设想我本可能“做得更好”似乎是荒谬的。我没有语言或艺术方面的才能，对实验科学也只有非常少的一点兴趣。我也许会是个还说得过去的哲学家——但不是相当有原创性的那种哲学家。我想我有可能成为一个好律师，不过，新闻业是学院生活之外我唯一真正相信自己有成功机会的职业。做一个数学家对我来说无疑是正确的，如果判断的标准是通常所谓的话。

如果我想要的是合情合理地舒适和快乐的生活，那我的选择就是正确的。事务律师和股票经纪人和出版家常常会过上舒适和快乐的生活，但很难看出世界因他们的存在而变得更加丰富多彩了。存在一种意义，在这种意义上我能够断言，自己的生涯比他们的生涯的无用程度要低一些吗？对我而言似乎还是只有一种答案：是的，可能如此；但是，如果是这样，仅仅是由于一个原因。

我没做过任何“有用的”事。我做出的发现没有一

个直接或间接地使得，或者好像使得，世界上的善或恶增减了，使世界哪怕是稍稍地增加或减少了对人而言的舒适程度。我曾帮助培训其他数学家，但与我是同一类的数学家，他们的工作，就我无论如何帮助过他们去做这些工作而言，与我的一样是无用的。用实践的标准来衡量，我的数学生涯的价值是零；而在数学之外，我的一生无论如何都是平凡的。我只有一个机会逃脱彻底的平凡性的裁决，即我可被断定创造了某种值得创造的东西。而不可否认，我曾经创造了某些东西：问题是其价值如何。

我的生涯的价值，或者任何其他数学家——他们在我是数学家的那种意义上是数学家——的生涯的价值，是这样的：我为知识添柴加叶，且帮助其他人增添了更多的东西；这些东西的价值，仅仅在程度上而不是在种类上不同于伟大数学家们的创造所具有的价值，或者任何其他大的或小的、死后留下了某种纪念物的艺术家们的创造所具有的价值。

布罗德教授和斯诺博士曾经双双向我说过，如果我想要对科学究竟还是为善和为恶之间做出公平的折中，我一定不能让自己过分纠缠于它对战争的作用上；并且，即使想到这些作用，我也必须牢牢记住，科学具有除了纯粹是破坏性作用之外的许多非常重要的作用。因而（先说后一点），我必须记住（a）在战争中把全民组织起来只能通过科学的方法；（b）科学极大地提高了宣传能力，这几乎专门被用于邪恶的目的；以及（c）科学几乎使“中立”成为不可能，或使之失去意义，所以不再有“和平的岛屿”，健全的理智和恢复工作可在战后由它们而逐渐展开。所有这些当然都倾向于增强反对科学的理由。另一方面，即使我们将这种理由推至极致，也不大可能严肃地坚持科学所带来的不幸没有被它带来的好处所完全超过。举例来说，假设每次战争都失去一百万条生命，但科学的最终效果仍然是

增加了平均寿命。简言之,我在§28 太过于“感情用事”了。

我不争论这些批评的正当性,不过,因为我在序言中所说过的原因,我已发现,在我的文中处理它们以及让自己以这个认识而感到满意,乃是不可能的。

斯诺博士对§8 也作过一个有趣的小小的解释。即使我们同意“在埃斯库卢斯(Aeschylus)被遗忘之后,阿基米德将会被记住”,数学声望难不是有点过于是“匿名的”,难以完全令人满意吗?我们能够单独从作品来对埃斯库卢斯的人格(更有甚者,当然,对莎士比亚或托尔斯泰的人格)形成一个相当连续的图像,而阿基米德和奥德修斯不过是单纯的名字而已。

当我们在特拉法格(Trafalgar)广场穿越尼尔森纪念柱时,J. M. 洛马斯先生更为生动地表述了这一观点。如果在伦敦的一个纪念柱上刻一幅雕像,我们是宁愿让这个柱子高得使雕像看不见、还是愿意让柱子低得足以使雕像的容貌可以被辨认出来呢?我将挑选第一种可能,而可以想见,斯诺博士会挑选第二种。