向量空间定义中一公理的独立性

赵 宝 璋

（中央民族学院数理系）

向量空间定义中向量加法的交换律这条公理在整个系统中是否独立这个问题，王凯宁同学按北京大学编《高等代数》（以下简称〔3〕）及其他一些书上的定义给出了否定的回答（见1980年第11期《数学通报》“关于线性空间的定义”一文，以下简称〔1〕）。本文则按张禾瑞、郝钢新编《高等代数》（以下简称〔2〕）上的定义证明这条公理是独立的，顺便再更正文〔1〕中的一处疏忽。

〔2〕中向量空间的定义是：

令 F 是一个数域，F 中的元素用小写拉丁字母 a，b，c，……来表示，令 V 是一个非空集合。V 中元素用小写希腊字母 α，β，γ，……来表示。我们把 V 中的元素叫做向量而把 F 中的元素叫做纯量。如果下列条件被满足，就称 V 是 F 上的一个向量空间：

1°在 V 中定义了一个加法。对于 V 中任意两个向量 α、β，有 V 中一个唯一确定的向量与它们对应，这个向量叫做 α 与 β 的和，并且记作 $\alpha+\beta$。

2°有一个“纯量乘法”。对于 F 中每一个数 a 和 V 中每一个向量 α，有 V 中唯一确定的向量与它们对应，这个向量叫做 a 与 α 的积，并且记作 $a\alpha$。

3°向量的加法和纯量乘法满足下列算律：

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

3) 在 V 中存在一个零向量，记作 0，它具有以下性质：对于 V 中每一个向量 α，都有 $0+\alpha=\alpha$；

4) 对于 V 中每一向量 α，在 V 中存在一个向量 α'，使得 $\alpha+\alpha'=0$。这样的 α' 叫做 α 的负向量；

5) $a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta$；

6) $(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha$；

7) $(ab)\alpha=a(b\alpha)$；

8) $1\alpha=\alpha$，

这里 α，β，γ 是 V 中任意向量，而 a，b 是 F 中任意数。

注意：3)中等式 $0+\alpha=\alpha$ 的左端 $0+\alpha$ 的 0 在 α 的左边；而4)中等式 $\alpha+\alpha'=0$ 的左端 $\alpha+\alpha'$ 中的 α' 在 α 的右边。而〔3〕中的3)要求 0 在 α 的右边即要求 $\alpha+0=\alpha$；4) 要求 α' 也在 α 的右边，即要求 $\alpha+\alpha'=0$。两个定义的区别就在这里。就是这点区别使加法交换律的独立性一个成立一个不成立。按〔3〕之所以不独立，是因为〔3〕要求 V 关于加法要具有右零元和右负元，由2)、3)、4)可推出 V 关于加法构成加群。而在〔2〕中仅要求 V 关于加法有左零元和右负元，仅靠2)、3)、4)不能推出 V 关于加法构成群。所以文〔1〕按〔3〕所给交换律不独立的证明按〔2〕就不成立了。下面按〔2〕证明加法交换律是独立的。

取 $V=\{\alpha=(a,b)\mid a、b\in R\}$，$F=R$，并规定当且仅当 $a=c$、$b=d$ 时 $(a,b)=(c,d)$。V 中的加法定义为：

$$\forall\alpha、\beta\in V,\quad \alpha+\beta=\beta$$

F 中的数与 V 中元素的乘法定义为：

$$\forall k\in F,\ \forall\alpha\in V,\quad k\alpha=\alpha。$$

下面验证定义中的各条是否成立。

1°、2°显然。

3°1)若 $\alpha\neq\beta$ 则 $\alpha+\beta\neq\beta+\alpha$，加法交换律不成立；

2) $\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$ 都有 $(\alpha+\beta)+\gamma=\beta+\gamma=\gamma=\alpha+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

3) $\exists\bigcirc=(0,0)\in V$ 使 $\forall\alpha\in V$ 都有 $\bigcirc+\alpha=\alpha$；

4) $\forall\alpha\in V$，都 $\exists\bigcirc=(0,0)$ 使 $\alpha+\bigcirc=\bigcirc$。可令 $\alpha'=\bigcirc$；

5) $\forall k\in F$，$\forall\alpha$、$\beta\in V$ 都有 $k(\alpha+\beta)=k\beta=\beta=\alpha+\beta=k\alpha+k\beta$；

6) $\forall k_1$、$k_2\in F$，$\forall\alpha\in V$ 都有 $(k_1+k_2)\alpha=\alpha=\alpha+\alpha=k_1\alpha+k_2\alpha$；

7) $\forall k_1$、$k_2\in F$，$\forall\alpha\in V$ 都有 $(k_1k_2)\alpha=\alpha=k_2\alpha=k_1(k_2\alpha)$；

8) $\forall\alpha\in V$，都有 $1\alpha=\alpha$。

只有加法交换律不成立，证明它是独立的。这个结论可算是对〔1〕的一点补充。下面再指出〔1〕中的一点疏忽：

证明 $1\alpha=\alpha$ 独立的例7是这样的：

取 $V=\{e,a\}$，取数域为 R。V 中加法由下表定义

+	e	a
e	e	a
a	a	e

R 中数与 V 中元素的乘法定义为

$\forall k\in R$，$ke=a$，$ka=e$

这时除 $1e\neq e$，$1a\neq a$ 之外，还另有两条公理不成立：$\forall k_1$、$k_2\in R$

$$(k_1k_2)a=e\neq a=ke=k_1(k_2a)$$

$$(k_1+k_2)e=a\neq e=k_1e+k_2e$$

若将 R 中数与 V 中元素的乘法定义改为 $\forall k\in R$，$ka=ke=e$，就可使 $1a\neq a$，而其余各公理成立。