第 25 卷 第 3 期
2004 年 9 月

首都师范大学学报(自然科学版)
Journal of Capital Normal University
(Natural Science Edition)

Vol. 25, No. 3
Sept. 2004

线性空间公理化定义研究及反例 *

朱一心[1)] 海进科[2)] 刘 蕊[1)] 范兴亚[1)]

([1)]首都师范大学数学系, 北京 100037; [2)]青岛大学数学系, 青岛 266071)

摘 要

讨论线性空间定义中 8 条公理之间的关系, 给出公理 1 的一个充分条件和公理 5 的两个等价条件, 证明公理 6 与公理 8 在有理数域上是等价的, 因此它们在有理数域上不独立; 给出所有只满足 8 条公理中部分公理的四元组 $(V, P, \oplus, \circ)$ 的例子, 特别是构造了一个例子来说明公理 8 在复数域上是独立的以及说明公理 1, 8 不成立和说明公理 1, 6, 8 不成立的例子.

关键词: 线性空间, 运算, 公理, 独立性, 反例.

中图分类号: O 151.2, O 152.8

1 引 言

线性空间[1, 定义 6.1] 是一个满足以下 8 条公理的四元组合 $(V, P, \oplus, \circ)$, 其中 V 是一个非空集合, P 是一个域([1, 定义 6.1] 原文中是数域, 为讨论的一般性需要本文改为域), V 上有一种代数运算 $\oplus$ 叫做加法, P 与 V 之间有一种运算 $\circ$ 叫做数量乘法, 且任给 $\alpha, \beta, \gamma, \in V$, 任给 $k, l \in P$ 有:

1 $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$;

2 $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$;

3 存在零元 $0 \in V$, 使得 $\alpha \oplus 0 = 0 \oplus \alpha = \alpha$;

4 存在 $-\alpha \in V$, 使得 $\alpha \oplus (-\alpha) = (-\alpha) \oplus \alpha = 0$ (称 $-\alpha$ 为 α 的负元).

5 $1 \circ \alpha = \alpha$;

6 $k \circ (l \circ \alpha) = (kl) \circ \alpha$.

7 $(k + l) \circ \alpha = (k \circ \alpha) \oplus (l \circ \alpha)$;

8 $k \circ (\alpha \oplus \beta) = (k \circ \alpha) \oplus (k \circ \beta)$.

其中公理 3 和公理 4 的叙述是按群的运算单位元和运算逆元进行的, 而[1, 定义 6.1] 是按运算的单侧单位元和单侧逆元来写的, 在公理 1 的前提下两者是等价的, 但在公理 1 不成立时两者不等价, 这种不同造成公理 1 独立与不独立的两种说法, 详见[20]. 显然线性空间 V 关于 $\oplus$ 构成一个(交换)群, 因而零元惟一, 一个元的负元惟一. (公理 3, 4 只给出零元和负元的存在性, 零元的惟一性由公理 3 直接给出[1, P. 250 性质 1], 而负元的惟一需要公理 2 [1, P. 250 性质 2], 反例见例(1.2).)

在线性空间的定义中公理的独立性, 长期以来一直有人在研究, 一般教材[1~6, 11~12, 14~17] 中多数给出了公理 5, 7 独立的例子(如[1, ex. 6.1.(6), ex. 6.1.(7)]). 文[18] 给出了公理 1 的不独立性证明并给出了其它公理独立的例子, 文[19] 修正了[18] 例子中的 3 处错误给出了公理 8 在有理数域上不独立的证明, 文[20] 补充了[18] 中公理 1 的不独立性的条件. 文献[7, §3.1] 中给出公理 2, 5, 6, 7, 8 独立的例子, 其中说明公理 8 独立的例子为[7, P. 27. 例 7]: F 是实数域, $V = \{$全体非零实数$\}$, 加法: $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta$(实数乘法), 数乘: $k \circ \alpha = k\alpha$(实数乘法). 一般的有 $(k \oplus l) \circ \alpha = kl\alpha \neq k\alpha l\alpha = (k \circ \alpha) \oplus (l \circ \alpha)$ 以及 $k \circ (\alpha \oplus \beta) = k\alpha\beta \neq k\alpha k\beta = (k \circ \alpha) \oplus (k \circ \beta)$, 因此公理 7 和公理 8 均不成立, 即该例是不能用来说明公理 8 的独立性的.

本文将给出公理 1 的一个充分条件和公理 5 的两个等价条件; 指出公理 1 的独立性不需要公理 6; 证明公理 6 和公理 8 在有理数域上是等价的, 因而

收稿日期: 2003-04-17

* 国家自然基金(10271081)资助课题

在有理数域上都不独立;构造所有只满足部分公理的四元组(V, P, $\oplus$, $\circ$)的例子,其中关于公理8不独立的例子不同于文[19]给出的例子,而例(1.8)和例(1.6.8)分别是不满足公理1,8和公理1,6,8的不平常例子.

本文第2节中讨论线性空间的8条公理之间的一些重要关系,第3节中给出所有满足部分公理的四元组(V, P, $\oplus$, $\circ$)的例子.有不少例子的构造是有相当难度的.比如:例(6),例(8),例(1.5),例(1.7),例(1.8),例(1.6.8),尤其是例(8)的构造是相当困难的.有些例子的思路来自于文献[21],[22].

文中的术语是标准的,与[1]中的一致,$\mathscr{N}$, $\mathscr{Z}$, $\mathscr{Q}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{C}$分别为自然数集,整数集,有理数域,实数域和复数域,Z_p为模p剩余类域,p为素数(涉及的等号指$\equiv(\bmod\ p)$).

2 线性空间定义中公理的相互关系

本节讨论线性空间8条公理之间的一些关系,并由此给出公理独立性的重要结论.

首先给出公理1的一个充分条件:

定理1 设(V, P, $\oplus$, $\circ$)满足公理2,5,7,8,则任给$\alpha,\beta\in V$,当$0\circ\alpha=0\circ\beta$时有:$\alpha\oplus\beta=\beta\oplus\alpha$.

证明 由公理2,5,7有

$$(1+1)\circ(\alpha\oplus\beta)=(\alpha\oplus\beta)\oplus(\alpha\oplus\beta)$$
$$=\alpha\oplus(\beta\oplus\alpha)\oplus\beta$$

由公理2,5,7,8有

$$(1+1)\circ(\alpha\oplus\beta)=2\circ(\alpha\oplus\beta)$$
$$=(2\circ\alpha)\oplus(2\circ\beta)=(\alpha\oplus\alpha)\oplus(\beta\oplus\beta)$$
$$=\alpha\oplus(\alpha\oplus\beta)\oplus\beta$$

于是$\alpha\oplus(\beta\oplus\alpha)\oplus\beta=\alpha\oplus(\alpha\oplus\beta)\oplus\beta$,即

$$(1\circ\alpha)\oplus(\beta\oplus\alpha)\oplus(1\circ\beta)$$
$$=(1\circ\alpha)\oplus(\alpha\oplus\beta)\oplus(1\circ\beta)$$

等式两边同时左边加$(-1)\circ\alpha$,右边加$(-1)\circ\beta$得

$$(0\circ\alpha)\oplus(\beta\oplus\alpha)\oplus(0\circ\beta)$$
$$=(0\circ\alpha)\oplus(\beta\oplus\alpha)\oplus(0\circ\beta)=\alpha\oplus\beta$$

此时当$0\circ\alpha=0\circ\beta$,由公理2,7有

$$(0\circ\alpha)\oplus(\beta\oplus\alpha)\oplus(0\circ\beta)$$
$$=(0\circ\beta)\oplus(\beta\oplus\alpha)\oplus(0\circ\alpha)=\beta\oplus\alpha$$

得到$\alpha\oplus\beta=\beta\oplus\alpha$.

引理1[1] 若(V, P, $\oplus$, $\circ$)满足公理2,3,4,7,则任给$\alpha\in V$,有$0\circ\alpha=0$.

证明 由公理7,$(1\circ\alpha)\oplus(0\circ\alpha)=(1+0)\circ\alpha=1\circ\alpha$,再由公理2,3,4,等式两边同时左加$1\circ\alpha$的负元,则$0\circ\alpha=0$.

由引理1和定理1即有如下熟知的公理1的不独立性[18],而且其证明不需要公理6:

推论1 设(V, P, $\oplus$, $\circ$)满足公理2,3,4,5,7,8,则任给$\alpha,\beta\in V$,$\alpha\oplus\beta=\beta\oplus\alpha$,即公理1是不独立的.

注 由下一节的例(2),例(3.4),例(4),例(5),例(6),例(7),例(8),知公理2,3,4,5,6,7,8是独立的.

引理2 若(V, P, $\oplus$, $\circ$)满足公理2,3,4,8,则:

(1) [1, P.250性质3] 任给$k\in P$,$k\circ 0=0$;

(2) 任给$k\in P$,$\alpha\in V$,$k\circ(-\alpha)=-(k\circ\alpha)$.

证明 (1)由公理3,8有$k\circ 0=k\circ(0\oplus 0)=(k\circ 0)\oplus(k\circ 0)$,再由公理2,3,4,将等式两边同时右加$k\circ 0$的负元,得$k\circ 0=0$.

(2) $0=k\circ 0=k\circ(\alpha\oplus(-\alpha))=(k\circ\alpha)\oplus(k\circ(-\alpha))=(k\circ(-\alpha))\oplus(k\circ\alpha)$,故$k\circ(-\alpha)=-(k\circ\alpha)$.

由引理1,引理2可得公理5的等价条件:

定理2 (1)若(V, P, $\oplus$, $\circ$)满足公理2,3,4,7,则公理5等价于:

公理5':任给$\alpha\in V$,有$(-1)\circ\alpha=-\alpha$.

(2) 若(V, P, $\oplus$, $\circ$)满足公理2,3,4,6,8,则公理5等价于:

公理5":任给$\alpha\in V$,$1\circ\alpha=0$当且仅当$\alpha=0$;

即等价于公理5"':任给$\alpha\in V$,$k\in P$,$k\circ\alpha=0$当且仅当$k=0$或$\alpha=0$.

证明 (1).当公理5成立时:由引理1及公理7

$$((-1)\circ\alpha)\oplus\alpha=((-1)\circ\alpha)\oplus(1\circ\alpha)=0$$
$$=(1\circ\alpha)\oplus((-1)\circ\alpha)=\alpha\oplus((-1)\circ\alpha)$$

由公理4有$(-1)\circ\alpha=-\alpha$.

当公理5'成立时:由公理7

$$(-\alpha)\oplus(1\circ\alpha)=((-1)\circ\alpha)\oplus(1\circ\alpha)=0$$
$$=(1\circ\alpha)\oplus((-1)\circ\alpha)=(1\circ\alpha)\oplus(-\alpha)$$

由公理4有$1\circ\alpha=-(-\alpha)=\alpha$.

(2).若公理5成立,则显然"$1\circ\alpha=0$当且仅当$\alpha=0$".

反之,若"任给$\alpha\in V$,$1\circ\alpha=0$当且仅当$\alpha=0$",则由引理2及公理3,4,6,8

$$1\circ((1\circ\alpha)\oplus(-\alpha))$$
$$=(1\circ(1\circ\alpha))\oplus(1\circ(-\alpha))$$
$$=(1\circ\alpha)\oplus(1\circ(-\alpha))$$
$$=1\circ(\alpha\oplus(-\alpha))=1\circ 0=0$$

可得$(1\circ\alpha)\oplus(-\alpha)=0$, 即$1\circ\alpha=\alpha$.

对$k\circ\alpha=0$, 若$k\neq0$, 则$\alpha=1\circ\alpha=k^{-1}\circ(k\circ\alpha)=k^{-1}\circ0=0$, 当且仅当$\alpha=0$.

由定理2(1)的证明过程可以得.

推论 2　当$(V,P,\oplus,\circ)$满足公理 2, 3, 4, 7 时, 任给$\alpha\in V$, $k\in P$, 有$(-k)\circ\alpha=-(k\circ\alpha)$.

以下两个定理说明公理 6, 8 在有理数域上是不独立的, 其中定理 4 在[19, 命题] 中已给出证明, 我们的证明稍有不同, 因此也列出:

定理 3　若$(V,P,\oplus,\circ)$满足公理 2, 3, 4, 5, 7, 8, 其中P为数域, 则公理 6 对所有有理数k, l成立.

证明　任给$\alpha\in V$

(1) 如果对$k,l\in\mathbb{Q}$, 公理 6 成立, 即$(kl)\circ\alpha=k\circ(l\circ\alpha)$, 那么由推论2 有

$$(-k)\circ(l\circ\alpha)=-(k\circ(l\circ\alpha))=-((kl)\circ\alpha)=(-kl)\circ\alpha=((-k)l)\circ\alpha$$

由公理7, 8和引理 1 及引理 2(1)

$$\begin{aligned}&(k\circ((-1)\circ\alpha))\oplus((kl)\circ\alpha)\\&=(k\circ((-l)\circ\alpha))\oplus((k\circ(l\circ\alpha))\\&=k\circ((-l+l)\circ\alpha)=k\circ(0\circ\alpha)=0\\&=((kl)\circ\alpha)\oplus(k\circ((-l)\circ\alpha))\end{aligned}$$

再由公理 4 有$k\circ((-l)\circ\alpha)=-((kl)\circ\alpha)$.

结合推论 2 即有

$$k\circ((-l)\circ\alpha)=-((kl)\circ\alpha)=(-kl)\circ\alpha=(k(-l))\circ\alpha$$

进一步由推论 2 有

$$(-k)\circ((-l)\circ\alpha)=-(k\circ((-l)\circ\alpha))=-(-((kl)\circ\alpha))=(kl)\circ\alpha$$

综上

$$(\pm k)\circ((\pm l)\circ\alpha)=((\pm k)(\pm l))\circ\alpha$$

所以下面只需要证明对一切正有理数k, l, 的确有$(kl)\circ\alpha=k\circ(l\circ\alpha)$, 从而公理 6 成立.

(2) 首先证明k, l是正整数的情形. 由公理 5, 7 有$k\circ\alpha=\underbrace{\alpha\oplus\cdots\oplus\alpha}_{k}$. 于是由公理 2, 5 有

$$\begin{aligned}(kl)\circ\alpha&=\underbrace{\alpha\oplus\cdots\oplus\alpha}_{kl}\\&=\underbrace{(\underbrace{\alpha\oplus\cdots\oplus\alpha}_{l})\oplus\cdots\oplus(\underbrace{\alpha\oplus\cdots\oplus\alpha}_{l})}_{k}\\&=k\circ(l\circ\alpha)=l\circ(k\circ\alpha)\end{aligned}$$

(3) 其次证明k是正整数, l是正有理数的情形. 由公理 7 有

$$k\circ(l\circ\alpha)=\underbrace{(l\circ\alpha)\oplus\cdots\oplus(l\circ\alpha)}_{k}=(\underbrace{l+\cdots+l}_{k})\circ\alpha=(kl)\circ\alpha$$

由公理 8 有

$$\begin{aligned}k\circ(l\circ\alpha)&=\underbrace{(l\circ\alpha)\oplus\cdots\oplus(l\circ\alpha)}_{k}\\&=l\circ(\underbrace{\alpha\oplus\cdots\oplus\alpha}_{k})=l\circ(k\circ\alpha)\end{aligned}$$

所以

$$(kl)\circ\alpha=k\circ(l\circ\alpha)=l\circ(k\circ\alpha);$$

(4) 最后证明k, l是正有理数的情形. 首先, 当a, b都是正整数时, 在V中取向量$\beta=\frac{1}{b}\circ\alpha$, 则$b\circ\beta=b\circ\left(\frac{1}{b}\circ\alpha\right)=1\circ\alpha=\alpha$, 于是由(3)有

$$\frac{1}{ab}\circ\alpha=\frac{1}{ab}\circ(b\circ\beta)=\frac{1}{a}\circ\beta=\frac{1}{a}\circ\left(\frac{1}{b}\circ\alpha\right)$$

其次, 对于正有理数k, l, $k=\frac{c}{a}$, $l=\frac{d}{b}$, 其中a, b, c, d是正整数, 且$(a,c)=1$, $(b,d)=1$.

那么由上面的证明就可推出

$$\begin{aligned}(kl)\circ\alpha&=\left(\frac{cd}{ab}\right)\circ\alpha=(cd)\circ\left(\frac{1}{ab}\circ\alpha\right)\\&=(cd)\circ\left(\frac{1}{a}\circ\left(\frac{1}{b}\circ\alpha\right)\right)=\left(\frac{cd}{a}\right)\circ\left(\frac{1}{b}\circ\alpha\right)\\&=\frac{c}{a}\circ\left(d\circ\left(\frac{1}{b}\circ\alpha\right)\right)=\frac{c}{a}\circ\left(\frac{d}{b}\circ\alpha\right)\\&=k\circ(l\circ\alpha)\end{aligned}$$

定理 4[19]　$(V,P,\oplus,\circ)$满足公理 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 其中P为数域, 则对任何有理数k, 有公理 8 成立.

证明　(1). 首先, 任给$\alpha,\beta\in V$, 证明$-(\alpha\oplus\beta)=(-\alpha)\oplus(-\beta)$成立:

由公理 1, 2, 3, 4, $(\alpha\oplus\beta)\oplus((-\alpha)\oplus(-\beta))=(\alpha\oplus(-\alpha))\oplus(\beta\oplus(-\beta))=0\oplus0=0$

(2). 其次, 证明对$k\leqslant\mathbf{N}$有公理 8 成立:

由引理 1, 当$k=0$时, $0\circ(\alpha\oplus\beta)=0=(0\circ\alpha)\oplus(0\circ\beta)$

由公理 5, 当$k=1$时, $1\circ(\alpha\oplus\beta)=\alpha\oplus\beta=(1\circ\alpha)\oplus(1\circ\beta)$

归纳假设对$k-1$有公理 8 成立, 再由公理 1, 2, 7, 就有

$$\begin{aligned}k\circ(\alpha\oplus\beta)&=((k-1)+1)\circ(\alpha\oplus\beta)\\&=((k-1)\circ(\alpha\oplus\beta))\oplus(1\circ(\alpha\oplus\beta))\\&=(((k-1)\circ\alpha)\oplus(1\circ\alpha))\oplus\\&\quad(((k-1)\circ\beta)\oplus(1\circ\beta))\\&=(k\circ\alpha)\oplus(k\circ\beta)\end{aligned}$$

(3). 然后证明对一切整数公理 8 成立:

对正整数 k, 由推论2及上述(1), (2)有

$$\begin{aligned}&(-k)\circ(\alpha\oplus\beta)=-(k\circ(\alpha\oplus\beta))\\&=-((k\circ\alpha)\oplus(k\circ\beta))\\&=(-(k\circ\alpha))\oplus(-(k\circ\beta))\\&=((-k)\circ\alpha)((-k)\circ\beta)\end{aligned}$$

即对一切整数 k 都有 $k\circ(\alpha\oplus\beta)=(k\circ\alpha)\oplus(k\circ\beta)$ 成立.

(4). 最后证明对有理数 $k=\frac{b}{a}$, $(a, b)=1$, $a\in$ **N** 有公理8成立:

在 V 中取 $\gamma=\frac{1}{a}\circ\alpha$, $\pi=\frac{1}{a}\circ\beta$, 由公理5, 6, 有 $\alpha=a\circ\gamma$, $\beta=a$, $\circ\pi$, 进而有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a}\circ(\alpha\oplus\beta)=\frac{1}{a}\circ((a\circ\beta)\oplus(a\circ\pi))\\&=\frac{1}{a}\circ(a\circ(\gamma\oplus\pi))\\&=\gamma\oplus\pi=\left(\frac{1}{a}\circ\alpha\right)\oplus\left(\frac{1}{a}\circ\beta\right)\end{aligned}$$

因此由上面(3)及公理6

$$\begin{aligned}k\circ(\alpha\oplus\beta)&=\frac{b}{a}\circ(\alpha\oplus\beta)=b\circ\left(\frac{1}{a}\circ(\alpha\oplus\beta)\right)\\&=b\circ\left(\left(\frac{1}{a}\circ\alpha\right)\oplus\left(\frac{1}{a}\circ\beta\right)\right)\\&=\left(b\circ\left(\frac{1}{a}\circ\alpha\right)\right)\oplus\left(b\circ\left(\frac{1}{a}\circ\beta\right)\right)\\&=\left(\frac{b}{a}\circ\alpha\right)\oplus\left(\frac{b}{a}\circ\beta\right)\\&=(k\circ\alpha)\oplus(k\circ\beta)\end{aligned}$$

由定理3和定理4有:

推论3 若$(V, \mathscr{Q}, \oplus, \circ)$满足公理1, 2, 3, 4, 5, 7, 则公理6与公理8等价.

推论4 若$(V, P, \oplus, \circ)$满足公理1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 如果存在 $k\in\mathscr{C}\setminus\mathscr{Q}$ 及 $\alpha, \beta\in V$ 使得 $k\circ(\alpha\oplus\beta)\neq(k\circ\alpha)\oplus(k\circ\beta)$, 则任给非零有理数 l 有:

(1). $(kl)\circ(\alpha\oplus\beta)\neq((kl)\circ\alpha)\oplus((kl)\circ\beta)$;

(2). $(k+l)\circ(\alpha\oplus\beta)\neq((k+l)\circ\alpha)\oplus((k+l)\circ\beta)$.

证明 (1) 反设结论不成立, 则由公理5, 6及定理4有

$$\begin{aligned}&k\circ(\alpha\oplus\beta)=1\circ(k\circ(\alpha\oplus\beta))\\&=l^{-1}\circ((kl)\circ(\alpha\oplus\beta))\\&=l^{-1}\circ(((kl)\circ\alpha)\oplus((kl)\circ\beta))\\&=l^{-1}\circ(l\circ((k\circ\alpha)\oplus(k\circ\beta)))\\&=(k\circ\alpha)\oplus(k\circ\beta)\end{aligned}$$

(2)由公理1, 2, 7及定理4有

$$\begin{aligned}&(k+l)\circ(\alpha\oplus\beta)\\&=(k\circ(\alpha\oplus\beta))\oplus(l\circ(\alpha\oplus\beta))\\&\neq((k\circ\alpha)\oplus(k\circ\beta))\oplus(l\circ(\alpha\oplus\beta))\\&=(k\circ\alpha)\oplus(k\circ\beta)\oplus(l\circ\alpha)\oplus(l\circ\beta)\\&=((k\circ\alpha)\oplus(l\circ\alpha))\oplus((k\circ\beta)\oplus(l\circ\beta))\\&=((k+l)\circ\alpha)\oplus((k+l)\circ\beta)\end{aligned}$$

引理4 若$(V, \mathscr{Q}, \oplus, \circ)$满足公理2, 3, 4, 5, 7, 如果 α 是 V 中加法阶为 $n\in\mathscr{N}$ 的元素, 那么必有阶为 kn 的元素, 其中 $k\in\mathscr{N}$. 因此 V 对于加法运算 $\oplus$ 是个无限群.

证明 设 $\alpha\in V$ 的加法阶为 n, 对 $k\in\mathscr{N}$ 取 $\beta=\frac{1}{k}\circ\alpha\in V$, 由公理5, 7得

$$\begin{aligned}\alpha&=1\circ\alpha=\Big(\underbrace{\frac{1}{k}+\cdots+\frac{1}{k}}_{k}\Big)\circ\alpha\\&=\underbrace{\frac{1}{k}\circ\alpha+\cdots+\frac{1}{k}\circ\alpha}_{k}=\underbrace{\beta\oplus\cdots\oplus\beta}_{k}\end{aligned}$$

所以 β 的阶是 kn. 于是 V 中有加法阶为$\{kn\mid k\in\mathscr{N}\}$的元素, 所以 V 对于运算$\oplus$是个无限群.

注 由推论4和引理4, 对满足公理2, 3, 4, 5, 6, 7的$(V, C, \oplus, \circ)$, 如果存在 $k\in\mathscr{C}\setminus\mathscr{Q}$, 使公理8不成立, 那么:

1° 集合$\{lk, k+l\mid l\in\mathscr{Q}\}$中的数都使公理8不成立;

2° 不存在 $\alpha\in V$ 使得 $V=\{l\circ\alpha\mid l\in P\}$, 否则

$$\begin{aligned}&k\circ((l_1\circ\alpha)\oplus(l_2\circ\alpha))=k\circ((l_1+l_2)\circ\alpha)\\&=(kl_1+kl_2)\circ\alpha=((kl_1)\circ\alpha)\oplus((kl_2)\circ\alpha))\\&=(k\circ(l_1\circ\alpha))\oplus(k\circ(l_2\circ\alpha));\end{aligned}$$

3° V 不能是有限集.

这些结论对构造"例(8)"有帮助, 而下面的引理5对于构造"例(1. 8), 例(1. 6. 8)"有用:

引理5 若$(V, Z_p, \oplus, \circ)$满足公理2, 3, 4, 5, 7, 则 V 中非零元 α 的加法阶为 p; 任给 $k\in Z_p$, $k\circ\alpha=\underbrace{\alpha\oplus\cdots\oplus\alpha}_{k}$; 因此公理6成立. 此时若$(V, Z_p, \oplus, \circ)$还满足公理1, 则公理8成立.

证明 对 $k\in Z_p$, 可将 k 看为正整数, 由公理5和公理7, $k\circ\alpha=\underbrace{\alpha\oplus\cdots\oplus\alpha}_{k}$. 因此由引理1得, $p\circ\alpha=0\circ\alpha=0$, 所以 α 的加法阶整除 p, 而 p 为素数, α 非零, 故 α 的加法阶为 p. 进而由定理3的证明(2), 知公理6成立. 最后的结论由定理4的证明(2)得.

3 例 子

本节构造满足8条公理中部分公理的所有可能

的例子.

"例(8)"表示不满足公理 8 但满足其他公理的例子；"例(1.8)"表示不满足公理 1 和公理 8 但满足其他公理的例子；等等. 每个例子的 4 个要素按 V, P, $\oplus$, $\circ$的次序给出, V 中元素用 α, β, γ 等表示, P 中元素用 k, l 等表示；不特别说明时, 用于定义 $\oplus$和 $\circ$的是通常的运算.

若集合 V_1, V_2 上分别有代数运算 $\oplus_1$, $\oplus_2$, 在数域 P 与 V_1, V_2 之间分别有运算 $\circ_1$, $\circ_2$, $V_1\times V_2$ 为 V_1 与 V_2 的直积, 定义 $V_1\times V_2$ 上代数运算 $\oplus$和 P 与 $V_1\times V_2$ 之间的运算 $\circ$如下：

$$\oplus=\oplus_1\times\oplus_2:(\alpha_1,\alpha_2)\oplus(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1\oplus_1\beta_1,\alpha_2\oplus_2\beta_2)$$

$$\circ=\circ_1\times\circ_2:k\circ(\alpha_1,\alpha_2)=(k\circ_1\alpha_1,k\circ_2\alpha_2)$$

将($V_1\times V_2$, P, $\oplus$, $\circ$)记为(V_1, P, $\oplus_1$, $\circ_1$)×(V_2, P, $\oplus_2$, $\circ_1$), 称为 V_1, V_2 在 P 上的直和. 于是($V_1\times V_2$, P, $\oplus$, $\circ$)具有的性质是(V_1, P, $\oplus_1$, $\circ_1$)具有的性质和(V_2, P, $\oplus_2$, $\circ_2$)具有的性质的交. 如(V_1, P, $\oplus_1$, $\circ_1$)是"例(1.2)", (V_2, P, $\oplus_2$, $\circ_2$)是"例(5.6.7)", 则($V_1\times V_2$, P, $\oplus$, $\circ$)是"例(1.2.5.6.7)", 记之为"例(1.2.5.6.7)＝例(1.2)×例(5.6.7)"；另如"例(2.5.7)＝例(2.5)×例(7)", 等等. 用此方法可以利用较少的例子构造全部的例子.

由推论 1, "例(1)"和"例(1.6)"是不存在的；当公理 3 不满足时, 公理 4 也就没有意义了, 因此"例(3)"事实上即"例(3.4)", "例(1.3)"即"例(1.3.4)", 等等.

文[18]和[19]已给出了公理 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 分别不成立的例子, 本文中的"例(2), 例(3.4), 例(4), 例(5), 例(6), 例(7), 例(8)"都是在复数域上的, 除"例(4)"与[18, 例 1]相同外, 其它的均是自己编制的, 特别是"例(8)". 易知所有在复数域上公理 1 成立的例子均可由这些例子做直和得到. 但"例(1.2), 例(1.3.4), 例(1.4), 例(1.5), 例(1.6.8), 例(1.7), 例(1.8)", 不能由上述例子做直和得到, 再由这些例子可以构造出所有公理 1 不成的例子. 因此本文只给出 14 个基本例子, 由它们可以构造出所有 $2^8-2^6-2-1=189$ 个不同的非线性空间例子, 其中 2^8 表示 8 条公理成立与不成立的选择, -2^6 表示当公理 3 不成立时公理 4 无意义的选择, -2 表示"例(1), 例(1.6)"不存在, -1 表示线性空间的例. 本文只在有限域上构造出了"例(1.8), 例(1.6.8)", 没有在无限域上得到这两个例子.

例(2)　$V=\{a,b,c\}$, $P=\mathscr{C}$, $\begin{array}{c|ccc}\oplus & a & b & c\\ \hline a & a & b & c\\ b & b & b & a\\ c & c & a & c\end{array}$, $k\circ\alpha=\alpha$：

不满足公理 2：由于 $(b\oplus b)\oplus c=b\oplus c=a$, 而 $b\oplus(b\oplus c)=b\oplus a=b$.

满足公理 4：$b\oplus c=c\oplus b=a$, 所以 b, c 互为负元. 任给 α 有 $\alpha\oplus\alpha=\alpha$, 故满足公理 7, 8.

例(3.4)　$V=\mathscr{N}\setminus\{0\}$, $P=\mathscr{C}$, $\alpha\oplus\beta=(\alpha,\beta)$为 α, β 的最大公因数, $k\circ\alpha=\alpha$：由最大公约数的性质知, 满足公理 1, 2.

不满足公理 3：不存在 $\beta\in V$ 使任给 $\alpha\in V$ 有 $\alpha=\alpha\oplus\beta=\beta\oplus\alpha$.

例(4)[18]　$V=\{a,b\}$, $P=\mathscr{C}$, $\begin{array}{c|cc}\oplus & a & b\\ \hline a & a & b\\ b & b & b\end{array}$, $k\circ\alpha=\alpha$：

例(5)　$V=\mathscr{C}$, $P=\mathscr{C}$, $\alpha\oplus\beta=\alpha+\beta$, $k\circ\alpha=0$：

例(6)　$V=\mathscr{C}$, $P=\{a+bi\mid a,b\in\mathscr{Q},i^2=-1\}$, $\alpha\oplus\beta=\alpha+\beta$, $(a+bi)\circ\alpha=(a+b)\alpha$：

(V, $\oplus$)是一个加法群, 所以(V, P, $\oplus$, $\circ$)满足公理 1, 2, 3, 4 且 $1\circ\alpha=\alpha$.

不满足公理 6：

$$\begin{aligned}&(a_1+b_1i)\circ((a_2+b_2i)\circ\alpha)\\ &=(a_1+b_1)(a_2+b_2)\alpha\\ &\neq((a_1+b_1i)(a_2+b_2i))\circ\alpha\\ &=((a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1))\alpha\end{aligned}$$

例(7)　$V=\mathscr{C}$, $P=\mathscr{C}$, $\alpha\oplus\beta=\alpha+\beta$, $k\circ\alpha=|k|\alpha$：

不满足公理 7：$(k+l)\circ\alpha=|k+l|\alpha\neq(k\circ\alpha)\oplus(l\circ\alpha)=|k|\alpha+|l|\alpha$.

例(8)　$V=\{a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4\mid a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathscr{R}\}$, 其中 α_1, α_2, α_3, α_4 为 4 个固定符号, $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4$ 为形式和, $P=\mathscr{C}$, $i^2=-1$,

$$\begin{aligned}&a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4\\ &=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3+b_4\alpha_4\\ &\Leftrightarrow a_1=b_1,a_2=b_2,a_3=b_3,a_4=b_4\end{aligned}$$

简记 $0\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4$ 为 $a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4$, $0\alpha_1+a_2\alpha_2+0\alpha_3+a_4\alpha_4$ 为 $a_2\alpha_2+a_4\alpha_4$, 而 $0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3+0\alpha_4$ 为 0, 等等. 简记 $1\alpha_1$, $1\alpha_2$, $1\alpha_3$, $1\alpha_4$ 分别为 α_1, α_2, α_3, α_4.

对

$$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4,$$
$$\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3+b_4\alpha_4\in V$$

定义 $\oplus$:

$$\alpha\oplus\beta=(a_1+b_1)\alpha_1+(a_2+b_2)\alpha_2+(a_3+b_3)\alpha_3+(a_4+b_4)\alpha_4$$

又若 $k=k_1+k_2i$, $k_1,k_2\in\mathscr{R}$ 定义 $\circ$:

$$k\circ\alpha=(k_1\circ\alpha)\oplus(i\circ(k_2\circ\alpha))\qquad(*)$$

其中

$$k_j\circ\alpha=(k_ja_1)\alpha_1+(k_ja_2)\alpha_2+(k_ja_3)\alpha_3+(k_ja_4)\alpha_4\quad(j=1,2)\qquad(**)$$

而 $i\circ\alpha$ 定义如下:

$$i\circ\alpha=\begin{cases}a_4\alpha_1+(-a_3)\alpha_2+a_2\alpha_3+(-a_1)\alpha_4, & a_1,a_2,a_3,a_4\text{ 中至少有两个非零};\\ a_1\alpha_2, & a_2=a_3=a_4=0;\\ (-a_2)\alpha_1, & a_1=a_3=a_4=0;\\ a_3\alpha_4, & a_1=a_2=a_4=0;\\ (-a_4)\alpha_3, & a_1=a_2=a_3=0\end{cases}\qquad(***)$$

由加法 $\oplus$ 的定义知, 满足公理1, 2, 3, 4, 其中零元是0, $-\alpha=(-a_1)\alpha_1+(-a_2)\alpha_2+(-a_3)\alpha_3+(-a_4)\alpha_4$.

满足公理5: 由(**), $1\circ(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4)=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4$

满足公理6: 对 $k=k_1+k_2i$, $l=l_1+l_2i\in P$, $\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4\in V$. 若 $\alpha=0$, 由(*), (**), (***), 有 $k\circ0=0$, 故 $(kl)\circ\alpha=k\circ(l\circ\alpha)=0$. 又若 $k=0$, 则由(**)有 $k\circ\alpha=0$, 因此以下均设 $k,l\neq0$, $\alpha\neq0$.

6.1. 若 $k_2=l_2=0$, 则由(**), 有 $(k_1l_1)\circ\alpha=k_1\circ(l_1\circ\alpha)$.

6.2.1. 若 $k_2=0$, $l_2\neq0$, 而 a_1,a_2,a_3,a_4 只有一个非零, 如 $a_1\neq0$, 则由(***)有

$$\begin{aligned}&(k_1l_1+k_1l_2i)\circ(a_1\alpha_1)\\&=((k_1l_1)\circ(a_1\alpha_1))\oplus(i\circ((k_1l_2)\circ(a_1\alpha_1)))\\&=((k_1l_1a_1)\alpha_1)\oplus(i\circ((k_1l_2a_1)\alpha_1))\\&=(k_1l_1a_1)\alpha_1+(k_1l_2a_1)\alpha_2\\&=k_1\circ((l_1a_1)\alpha_1+(l_2a_1)\alpha_2)\\&=k_1\circ((l_1a_1)\alpha_1\oplus(i\circ((l_2a_1)\alpha_1)))\\&=k_1\circ((l_1+l_2i)\circ(a_1\alpha_1))=k_1\circ(l\circ(a_1\alpha_1))\end{aligned}$$

类似可以验证 $a_2\neq0$, $a_3\neq0$ 和 $a_4\neq0$ 时的情形.

6.2.2. 若 $k_2=0$, $l_2\neq0$, 而 a_1,a_2,a_3,a_4 至少有2个非零,

$$\begin{aligned}&(k_1l_1+k_1l_2i)\circ(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4)\\&=((k_1l_1a_1)\alpha_1+(k_1l_1a_2)\alpha_2+(k_1l_1a_3)\alpha_3\\&\quad+(k_1l_1a_4)\alpha_4)\oplus((k_1l_2a_4)\alpha_1+(-k_1l_2a_3)\alpha_2\\&\quad+(k_1l_2a_2)\alpha_3+(-k_1l_2a_1)\alpha_4)\\&=k_1\circ(l\circ(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4))\end{aligned}$$

类似可以验证 $k_2\neq0$, $l_2=0$ 的情形.

6.3.1 若 $k_2\neq0$, $l_2\neq0$ 而 a_1,a_2,a_3,a_4 中只有一个非零, 如 $a_2\neq0$, 则有

$$\begin{aligned}&(kl)\circ(a_2\alpha_2)=((k_1l_1-k_2l_2)\circ(a_2\alpha_2))\\&\qquad\oplus(i\circ((k_1l_2+k_2l_1)\circ(a_2\alpha_2)))\\&\quad=((-k_1l_2a_2)\alpha_1+(k_1l_1a_2)\alpha_2)\\&\qquad\oplus((-k_2l_1a_2)\alpha_1+(-k_2l_2a_2)\alpha_2)\\&\quad=(k_1\circ((l_1+l_2i)\circ(a_1\alpha_1)))\\&\qquad\oplus(i\circ(k_2\circ((l_1+l_2i)\circ(a_2\alpha_2))))\\&\quad=k\circ(l\circ(a_2\alpha_2))\end{aligned}$$

类似可以验证 $a_1\neq0$, $a_3\neq0$ 和 $a_4\neq0$ 时的情形.

6.3.2. 若 $k_2\neq0$, $l_2\neq0$, 而 a_1,a_2,a_3,a_4 至少有2个非零,

$$\begin{aligned}&(k_1l_1-k_2l_2+(k_1l_2+k_2l_1)i)\\&\quad\circ(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4)\\&=(((k_1l_1-k_2l_2)a_1)\alpha_1+((k_1l_1-k_2l_2)a_2)\alpha_2\\&\quad+((k_1l_1-k_2l_2)a_3)\alpha_3+((k_1l_1-k_2l_2)a_4)\alpha_4)\\&\quad\oplus(((k_1l_2+k_2l_1)a_4)\alpha_1+(-(k_1l_2+k_2l_1)a_3)\alpha_2\\&\quad+((k_1l_2+k_2l_1)a_2)\alpha_3+(-(k_1l_2+k_2l_1)a_1)\alpha_4)\\&=((k_1l_1a_1)\alpha_1+(k_1l_1a_2)\alpha_2\\&\quad+(k_1l_1a_3)\alpha_3+(k_1l_1a_4)\alpha_4)\\&\quad\oplus((k_1l_2a_4)\alpha_1+(-k_1l_2a_3)\alpha_2\\&\quad+(k_1l_2a_2)\alpha_3+(-k_1l_2a_1)\alpha_4)\\&\quad\oplus((-k_2l_2a_1)\alpha_1+(-k_2l_2a_2)\alpha_2\\&\quad+(-k_2l_2a_3)\alpha_3+(-k_2l_2a_4)\alpha_4)\\&\quad\oplus((k_2l_1a_4)\alpha_1+(-k_2l_1a_3)\alpha_2\\&\quad+(k_2l_1a_2)\alpha_3+(-k_2l_1a_1)\alpha_4)\\&=(k_1\circ((l_1+l_2i)\circ(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2\\&\quad+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4)))\\&\quad\oplus(i\circ(k_2\circ((l_1+l_2i)\\&\quad\circ(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4))))\\&=k\circ(l\circ(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4))\end{aligned}$$

满足公理7: 对 $k=k_1+k_2i$, $l=l_1+l_2i\in P$, $\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4\in V$.

若 $\alpha=0$，则易有 $(k+l)\circ 0=(k\circ 0)\oplus(l\circ 0)$，故下面讨论 $\alpha\neq 0$ 的情形.

7.1. 若 $k_2=l_2=0$

$$(k_1+l_1)\circ\alpha=((k_1+l_1)a_1)\alpha_1+((k_1+l_1)a_2)\alpha_2+((k_1+l_1)a_3)\alpha_3+((k_1+l_1)a_4)\alpha_4$$
$$=((k_1a_1)\alpha_1+(k_1a_2)\alpha_2+(k_1a_3)\alpha_3+(k_1a_4)\alpha_4)\oplus((l_1a_1)\alpha_1+(l_1a_2)\alpha_2+(l_1a_3)\alpha_3+(l_1a_4)\alpha_4)$$
$$=(k\circ\alpha_1)\oplus(l\circ\alpha_2)$$

7.2.1. 若 $k_2=-l_2\neq 0$，而 a_1, a_2, a_3, a_4 只有一个非零，如：$a_1\neq 0$，则

$$((k_1+k_2i)\circ(a_1\alpha_1))\oplus((l_1+(-k_2)i)\circ(a_1\alpha_1))$$
$$=(((k_1a_1)\alpha_1\oplus(l_1a_1)\alpha_1)\oplus((k_2a_1)\alpha_2\oplus(-k_2a_1)\alpha_2)$$
$$=((k_1a_1+l_1a_1)\alpha_1)\oplus((k_2a_1+(-k_2a_1))\alpha_2)$$
$$=(k_1+l_1)\circ(a_1\alpha_1)=(k+l)\circ(a_1\alpha_1)$$

类似地可验证 $a_2\neq 0$，$a_3\neq 0$ 和 $a_4\neq 0$ 时的情形.

7.2.2. 当 $k_2=-l_2\neq 0$ 而 a_1, a_2, a_3, a_4 至少有 2 个非零时，

$$((k_1+k_2i)\circ\alpha)\oplus((l_1+(-k_2)i)\circ\alpha)$$
$$=(((k_1a_1)\alpha_1+(k_1a_2)\alpha_2+(k_1a_3)\alpha_3+(k_1a_4)\alpha_4)\oplus((l_1a_1)\alpha_1+(l_1a_2)\alpha_2+(l_1a_3)\alpha_3+(l_1a_4)\alpha_4))$$
$$\oplus(((k_2a_4)\alpha_1+(-k_2a_3)\alpha_2+(k_2a_2)\alpha_3+(-k_2a_1)\alpha_4)\oplus((-k_2a_4)\alpha_1+(k_2a_3)\alpha_2+(-k_2a_2)\alpha_3+(k_2a_1)\alpha_4))$$
$$=((k_1+l_1)a_1)\alpha_1+((k_1+l_1)a_2)\alpha_2+((k_1+l_1)a_3)\alpha_3+((k_1+l_1)a_4)\alpha_4$$
$$=(k+l)\circ\alpha$$

7.3.1. 若 $k_2\neq 0$，$l_2=0$，而 a_1, a_2, a_3, a_4 只有一个非零，如：$a_1\neq 0$，则

$$((k_1+k_2i)\circ(a_1\alpha_1))\oplus(l_1\circ(a_1\alpha_1))$$
$$=((k_1a_1)\alpha_1)\oplus((k_2a_1)\alpha_2)\oplus((l_1a_1)\alpha_1)$$
$$=((k_1a_1+l_1a_1))\alpha_1)\oplus((k_2a_1)\alpha_2)$$
$$=(k_1+l_1+k_2i)\circ(a_1\alpha_1)$$
$$=(k+l)\circ(a_1\alpha_1)$$

类似地可验证 $a_2\neq 0$，$a_3\neq 0$ 和 $a_4\neq 0$ 时的情形.

7.3.2. 当 $k_2\neq 0$，$l_2=0$ 而 a_1, a_2, a_3, a_4 至少有 2 个非零时，

$$((k_1+k_2i)\circ\alpha)\oplus(l_1\circ\alpha)$$
$$=((k_1a_1)\alpha_1+(k_1a_2)\alpha_2+(k_1a_3)\alpha_3+(k_1a_4)\alpha_4)\oplus((k_2a_4)\alpha_1+(-k_2a_3)\alpha_2+(k_2a_2)\alpha_3+(-k_2a_1)\alpha_4)$$
$$\oplus((l_1a_1)\alpha_1+(l_1al_2)\alpha_2+(l_1a_3)\alpha_3+(l_1al_4)\alpha_4)$$
$$=(((k_1+l_1)a_1)\alpha_1+((k_1+l_1)a_2)\alpha_2+((k_1+l_1)a_3)\alpha_3+((k_1+l_1)a_4)\alpha_4)$$
$$\oplus((k_2a_4)\alpha_1+(-k_2a_3)\alpha_2+(k_2a_2)\alpha_3+(-k_2a_1)\alpha_4)$$
$$=(k_1+l_1+k_2i)\circ\alpha=(k+l)\circ\alpha$$

由加法的交换性可证 $k_2=0$，$l_2\neq 0$ 的情形.

7.4.1. 若 $k_2+l_2\neq 0$，$k_2l_2\neq 0$，而 a_1, a_2, a_3, a_4 只有一个非零，如：$a_1\neq 0$，则

$$((k_1+k_2i)\circ(a_1\alpha_1))\oplus((l_1+l_2i)\circ(a_1\alpha_1))$$
$$=((k_1a_1)\alpha_1+(k_2a_1)\alpha_2)\oplus((l_1a_1)\alpha_1+(l_2a_1)\alpha_2)$$
$$=((k_1+l_1)a_1))\alpha_1+((k_2+l_2)a_1)\alpha_2$$
$$=(k_1+l_1+(k_2+l_2)i)\circ(a_1\alpha_1)$$
$$=(k+l)\circ(a_1\alpha_1)$$

类似地可验证 $a_2\neq 0$，$a_3\neq 0$ 和 $a_4\neq 0$ 时的情形.

7.4.2. 若 $k_2+l_2\neq 0$，$k_2l_2\neq 0$，而 a_1, a_2, a_3, a_4 至少两个非零，则

$$((k_1+l_1)+(k_2+l_2)i)\circ\alpha$$
$$=((k_1+l_1)\circ\alpha)\oplus(i\circ((k_2+l_2)\circ\alpha))$$
$$=((k_1a_1)\alpha_1+(k_1a_2)\alpha_2+(k_1a_3)\alpha_3+(k_1a_4)\alpha_4)$$
$$\oplus((k_2a_4)\alpha_1+(-k_2a_3)\alpha_2+(k_2a_2)\alpha_3+(-k_2a_1)\alpha_4)$$
$$\oplus((l_1a_1)\alpha_1+(l_1a_2)\alpha_2+(l_1a_3)\alpha_3+(l_1a_4)\alpha_4)$$
$$\oplus((l_2a_4)\alpha_1+(-l_2a_3)\alpha_2+(l_2a_2)\alpha_3+(-l_2a_1)\alpha_4)$$
$$=((k_1\circ\alpha)\oplus(i\circ(k_2\circ\alpha)))\oplus((l_1\circ\alpha)\oplus(i\circ(l_2\alpha)))$$
$$=(k\circ\alpha)\oplus(l\circ\alpha)$$

不满足公理 8：由(***)，$i\circ(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_3+(-1)\alpha_4\neq i\circ\alpha_1+i\circ\alpha_2=(-1)\alpha_1+\alpha_2$.

例(**1.2**)　$V=\{a, b, c, d\}$，$P=\mathscr{C}$，

$\oplus$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	a	c
c	c	a	c	a
d	d	b	a	d

，$k\circ\alpha=\alpha$；

不满足公理 2：$(b\oplus d)\oplus b=c\oplus b=a\neq b\oplus(d\oplus c)=b\oplus a=b$.

满足公理 4：b, c 互为负元，d, c 互为负元.（由于不满足公理 2，负元不必唯一）.

例(**1.3.4**)　$V=\mathscr{C}^2$, $P=\mathscr{C}$, $(\alpha,\beta)\oplus(\gamma,\pi)=(\alpha+\gamma,\beta)$, $k\circ(\alpha,\beta)=(k\alpha,\beta)$:

不满足公理1: $(\alpha,\beta)\oplus(\gamma,\pi)=(\alpha+\gamma,\beta)\neq(\gamma,\pi)\oplus(\alpha,\beta)=(\gamma+\alpha,\pi)$.

满足公理2: $((\alpha_1,\beta_1)\oplus(\alpha_2,\beta_2))\oplus(\alpha_3,\beta_3)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_1)=(\alpha_1\beta_1)\oplus((\alpha_2,\beta_2)\oplus(\alpha_3,\beta_3))$.

不满足公理3: 不存在(x,y)使得任给(α,β)有$(\alpha,\beta)\oplus(x,y)=(x,y)\oplus(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)$.

例(**1.4**)　$V=\{a,b,c\}$, $P=\mathscr{C}$,

$\oplus$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	c	c

, $k\circ\alpha=\alpha$:

由于加法表不对称, 所以不满足公理1, 且 a 是零元, b, c 没有负元.

满足公理2: 3个数相加, 至少有一个数是 a 时, 就相当于 $b\oplus c=b\oplus c$, 当然满足公理2. 否则, 对任一 $\alpha\in V$, 因为 $b\oplus\alpha=b$, $c\oplus\alpha=c$, 易验满足公理2.

因为 $\alpha\oplus\alpha=\alpha$, 所以易验证满足公理7, 8.

例(**1.5**)　$V=S_3=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$, $P=\mathscr{C}$, $\alpha\oplus\beta=\alpha\beta$, $k\circ\alpha=(1)$: S_3 是熟知的三次对称群, 不交换.

不满足公理5: $1\circ(12)=(1)\neq(12)$.

例(**1.6.8**)　$V=\langle a,b,c\rangle$为27阶的非交换群[13], $a^3=b^3=c^3=1$, $[a,b]=c$, $[a,c]=b$, $[b,c]=a$, V 中每个非单位 α 的阶为3, $\alpha\oplus\beta=\alpha\beta$. $P=Z_3(x)$为 Z_3 上的2次扩域, 其中 x 为Z_3 上的2阶代数元, 其最小多项式为 x^2+x+2 即 $x^2=2x+1$. 对 $k=k_1+k_2x\in P(k_1,k_2\in Z_3)$, $k\circ\alpha=\alpha^{k_1+k_2}$:

不满足公理6: $x^2=2x+1$, $(2x+1)\circ\alpha=\alpha^3=1\neq x\circ(x\circ\alpha)=\alpha$.

满足公理7:

$$
\begin{aligned}
&((k_1+k_2x)+(l_1+l_2x))\circ\alpha\\
&=(k_1+l_1+(k_2+l_2)x)\circ\alpha\\
&=\alpha^{k_1+l_1+k_2+l_2}\\
&=((k_1+k_2x)\circ\alpha)\oplus((l_1+l_2x)\circ\alpha)
\end{aligned}
$$

不满足公理8: $2\circ(a\oplus b)=abab\neq a^2b^2=(2\circ a)\oplus(2\circ b)$.

例(**1.7**)　$V=S_3$, $P=\mathscr{C}$, $\alpha\oplus\beta=\alpha\beta$, $k\circ\alpha=\alpha$:

不满足公理7: $(k+l)\circ(123)=(123)\neq(k\circ(123))\oplus(l\circ(123))=(123)\oplus(123)=(132)$.

例(**1.8**)　$V=\langle a,b,c\rangle$为 p^3 阶的非交换群[13], $a^p=b^p=c^p=1$, $[a,b]=c$, $[a,c]=b$, $[b,c]=a$, p 为奇素数, $P=Z_p$, $\alpha\oplus\beta=\alpha\beta$, $k\circ\alpha=\alpha^k$:

由于 V 中每个非单位元α 的阶为p, 故任给 k, $l\in Z_p$; $(kl)\circ\alpha=\alpha^{kl}$中, 等式两边的 kl 均可视为模p同余的值, 因此$(kl)\circ\alpha=(\alpha^l)^k=k\circ(l\circ\alpha)$. 类似的, $(k+l)\circ\alpha=(k\circ\alpha)\oplus(l\circ\alpha)$.

不满足公理8: $2\circ(a\oplus b)=abab\neq a^2b^2=(2\circ a)\oplus(2\circ b)$.

4　问题

本文构造了14个基本例子. 其中若"例(1.8)"能在复数域上找到, 则"例(1.6.8)=例(1.8)×例(6)"不是基本例子.

在上面14个例子中集合 V 是有限集的有:"例(2), 例(4), 例(1.2), 例(1.4), 例(1.5), 例(1.6.8), 例(1.7), 例(1.8)"; V 是无限集的有:"例(5), 例(6), 例(7), 例(8), 例(3.4), 例(1.3.4)". 对于$(V,P,\oplus,\circ)$, 其中 V 是有限集合, 设$(V_0,P,\oplus_0,\circ_0)$是 P 上的线性空间, 且 V_0 是无限集合(如 P 上的多项式空间), 则$(V\times V_0,P,\oplus\times\oplus_0,\circ\times\circ_0)$满足$(V,P,\oplus,\circ)$具有的性质, 且 $V\times V_0$ 是无限集合. 因此"例(2), 例(4), 例(1.2), 例(1.4), 例(1.5), 例(1.7), 例(1.8)"可以用这种直积的方法构造出 V 是无限的例子. 问题是对于域P 分别是无限和有限这两种情况, 是否能构造出14个基本例子使其中的 V 是有限集? 下面给出已经知道的当 P 无限或有限时 V 有限的例子. 用"例$(2)_1$"表示 P 无限时公理2不成立的例子, "例$(2)_2$"表示 P 是有限时公理2不成立的例子, "例$(2)_1$=例(2)"表示"例$(2)_1$ 与例(2)完全相同", 等等.

1) P 无限:

"例$(2)_1$=例(2), 例$(4)_1$=例(4), 例$(5)_1$=例(5), 例$(1.2)_1$=例(1.2), 例$(1.4)_1$=例(1.4), 例$(1.5)_1$=例(1.5), 例$(1.7)_1$=例(1.7)."

例$(\mathbf{7})_1$　由[18, 例6], $V=\{a,b\}$, $P=\mathscr{C}$,

$\oplus$	a	b
a	a	b
b	b	a

, $k\circ\alpha=\alpha$.

例$(\mathbf{3.4})_1$　$V=\{a,b,c\}$, $P=\mathscr{C}$,

$\oplus$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

, $k\circ\alpha=\alpha$.

例$(\mathbf{1.3.4})_1$　$V=Z_2\times Z_2$, $P=\mathscr{C}$, $(\alpha,\beta)\oplus(\gamma,$

$\pi)=(\alpha+\gamma,\beta)$, $k\circ(\alpha,\beta)=(\alpha,\beta)$.

由引理4，当 P 无限时“例(6)，例(8)，例(1.8)，例(1.6.8)”中的 V 必是无限的，从而“例$(6)_1$，例$(8)_1$，例$(1.8)_1$，例$(1.6.8)_1$”不存在.

2）P 有限：

“例$(1.6.8)_2$ = 例(1.6.8)，例$(1.8)_2$ = 例(1.8)”，将“例(2)，例(4)，例(5)，例$(7)_1$，例(1.2)，例(1.4)，例(1.5)，例(1.7)，例$(3.4)_1$，例$(1.3.4)_1$”中 P 改为有限，可得“例$(2)_2$，例$(4)_2$，例$(5)_2$，例$(7)_2$，例$(1.2)_2$，例$(1.4)_2$，例$(1.5)_2$，例$(1.7)_2$，例$(3.4)_2$，例$(1.3.4)_2$”.

例$(\mathbf{6})_2$　$V=\{1,a,a^2\}$ 为 3 阶循环群，$P=$ D

$Z_3(x)$为 Z_3 上的 2 次扩域，其中 x 为 Z_3 上的 2 阶代数元，其最小多项式为 x^2+x+2 即 $x^2=2x+1$. $\oplus$为 V 中乘法，$(k_1+k_2x)\circ\alpha=\alpha^{k_1}$

例$(\mathbf{8})_2$　$V=\{a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4 \mid a_1,a_2,a_3,a_4\in P\}$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 4 个固定符号，$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+a_4\alpha_4$ 为形式和，$P=Z_3(x)$ 为 Z_3 上的 2 次扩域，x 为 Z_3 上的 2 阶代数元，其最小多项为 x^2+1 即 $x^2=-1$. $\oplus$与“例(8)”中类似，$\circ$也与“例(8)”中类似，只是将 i 看成此处 x.

问题　在复数域上“例(1.8)，例(1.6.8)”存在否？

参 考 文 献

1　北京大学数学系几何与代数教研室代数小组. 高等代数. 北京：高等教育出版社，1978. 1～277

2　陈利国. 高等代数主要概念与定理详析. 徐州：中国矿业大学出版社，1992，177～217

3　陈重穆. 高等代数. 北京：高等教育出版社，1990，263～306

4　范德瓦尔登著，曹锡华，曾肯成，郝鈵新译. 代数学. 北京：科学出版社，1978，556～601

5　郭聿琦，岑嘉评，徐贵桐. 线性代数引论. 北京：科学出版社，2001，92～111

6　Hungerford T W. Algebra. New York：Springer-Verlag，1974，327～370

7　胡崇慧. 代数中的反例. 西安：陕西科学出版社，1983，24～41

8　孟道骥. 高等代数与解析几何. 北京：科学出版社，1998，179～957

9　莫宗坚，蓝以中，赵春来. 代数学. 北京：北京大学出版社，1986，175～268

10　聂灵沼，丁石孙. 代数学引论. 北京：高等教育出版社，1988，120～164

11　王湘浩，谢邦杰. 高等代数. 北京：人民教育出版社，1964，207～241

12　萧树铁. 代数与几何. 北京：高等教育出版社，2000，64～100

13　徐明曜. 有限群导引. 北京：科学出版社，1987 年，1～73

14　谢邦杰. 线性代数. 北京：人民教育出版社，1978，210～267

15　张禾瑞. 近世代数基础. 北京：高等教育出版社，1978，31～80

16　张禾瑞，郝鈵新. 高等代数. 北京：高等教育出版社，1983，208～245

17　周伯壎. 高等代数. 北京：人民教育出版社，1966，223～252

18　王凯宁. 关于线性空间的定义. 数学通报，1980，11：20～21

19　袁振邦. 关于向量空间的定义. 西南师范学院学报，1982，3：1～6

20　赵宝璋. 向量空间定义中一公理的独立性. 数学通报，1983，4：25

21　朱一心，范兴亚. 集合上一些运算律的反例（Ⅰ）. 徐州师范大学学报，2002，20（1）：1～3

22　朱一心，游兴中. 集合上一些运算律的反例（Ⅱ）. 徐州师范大学学报，2002，20（1）：4～6

（下转第 14 页）

参 考 文 献

1 Mingsheng Ying. A new approach for fuzzy topology(Ⅰ). Fuzzy Set and Systems, 1991, 39: 303 ~ 321

2 Mingsheng Ying. A new approach for fuzzy topology(Ⅱ). Fuzzy Set and Systems, 1992, 47: 221 ~ 232

3 Mingsheng Ying. A new approach for fuzzy topology(Ⅲ). Fuzzy Set and Systems, 1999, 55: 193 ~ 207

4 Jizhong Shen. Separation axiom in fuzzifying topology. Fuzzy Set and Systems, 1993, 57: 111 ~ 123

5 Zahran A M. Almost continuity and δ-continuity in fuzzifying topology. Fuzzy Set and Systems, 2000, 116: 339 ~ 352

6 Singal M K. Regularly open sets in fuzzy topological spaces. Fuzzy Set and Systems, 1992, 50: 343 ~ 353

7 Khedr F H, Zeyada F M, Sayed O. R. On separation axioms in fuzzifying topology, Fuzzy Set and Systems, 2001, 119: 439 ~ 458

8 Kelley J L. General Topology. New York: Van Nostrand, 1955

9 Zadeb L A. Fuzzy sets. Inform and Control, 1965, 8: 338 ~ 353

Almost Separation Axiom in Fuzzifying Topology

Wang Ruiying Wang Shangzhi

(Department of Mathematics, Capital Normal University, Beijing 100037)

Abstract

In this paper, AT_0-, AT_1-, AT_2-, AT_3-, AT_4- separation axioms are introduced and their equivalents as well as relations are given in fuzzifying topology.

Key words: fuzzifying topology, regular open set, separation.

作者简介 王瑞英, 女, 1974年生, 博士. 主要从事模糊拓扑学研究.
王尚志, 男, 1945年生, 博士生导师.

(上接第9页)

The Axioms of the Vector Space and the Counterexamples

Zhu Yixin[1] Hai Jinke[2] Liu Rui[1] Fan Xingya[1]

([1]Department of Mathematics, Captial Normal University, Beijing 100037; [2]Department of Mathematics, QingDao University, QingDao 266071)

Abstract

Here is a comprehensive discussion of the relationship between the axioms in the defintion of the vector space. Firstly, we give a surfficient condition for the 1th axiom and two equivvalent conditions for the 5th axiom; also, we verify the equialence of the 6th axiom and the 8th axiom on the rational number field, thus the 6th axiom is independent on the rational number field; and then, we attempt to construct all the kinds of examples which satisfy different part of the eight axioms. Particularly, we construct a very different example to show the independence of the 8th axiom, examples to show axioms 1, 8 and axioms 1, 6, 8 are not satisfied, respectively, are also given.

Key words: vector space, operator, axioms, independence, conterexample.