致谢

感谢我的导师，李方教授五年以来对我的关心和教诲，正是他将我带进了代数学的天地。从他那里，我知道了什么是 Hopf 代数、什么是量子群、什么是常表示、什么是模表示···。更重要的是使我学会了思考，学会了去区分哪些是形式的内容，哪些是本质的内容，学会了如何去把握问题的关键···。导师对我最大的影响是他兢兢业业的敬业精神。他对数学的痴迷执着令人折服，对数学的精益求精令人佩服，对数学的勇于创新令人钦佩。很多次从与他的交谈中重新找回了自己对数学的信心。

感谢我的父母。他们是世界上最辛苦的人。也不知是多少次的田间劳作方造就今天这一纸文章。

感谢惠昌常教授的无私指导，正是他的到来使我加深了对 Tame 代数的认识。感谢章璞教授、叶郁博士等，他们的来访给我思想方法上带来了很大的帮助。感谢李慧陵教授、姜豪教授、卢涤明教授、吴志祥教授和黄兆镇教授的关爱和指导。

感谢多位同学的真诚帮助，他们是程东明、史美华、曾庆怡、穆尼尔（ Munir. Ahmed ）、汪国军、黄允宝、李样明、叶丽霞、曹海军、贾玲、张棉棉、陈利利、孙钦秀、吕家凤、司君如等。特别感谢史美华、曹海军、张棉棉三位在我最困难的时候给予了我最有力的帮助！

最后，要感谢我的爱妻董永梅。正是她的任劳任怨和一如既往的支持才有了今天的结果，这篇文章之中不知凝聚了她多少辛酸！

摘要

本论文的主要目的是分类有限维的 Hopf 代数，特别地去分类有限维的基本 Hopf 代数。我们的思想是通过其表示型来分类他们，我们的方法主要依赖于有限维代数的表示理论。

为了分类有限维的 Hopf 代数，我们给出了以下四个步骤：

（1）给出一个有效的方法来决定基本 Hopf 代数的表示型；

（2）通过表示型来分类有限维基本 Hopf 代数；

（3）确定一个 Hopf 代数什么时候会 Morita 等价于一个基本 Hopf 代数；

（4）寻找新的途径来将（2）的结果推广到一般的有限维 Hopf 代数。

为了解决步骤（1），我们为每一个基本 Hopf 代数 H 配备了一个被称为表示型数的数 n_H 并且证明 (i) H 是有限型当且仅当 $n_H = 0$ 或 $n_H = 1$； (ii) 如果 H 是 Tame 型，则 $n_H = 2$； (iii) 如果 $n_H \geqslant 3$，则 H 是 Wild 型。

对于（2），目前，我们已经给出了有限型的完整分类。具体地讲，它们共分三类：①如果 H 是半单的，则 H 同构与一个群代数的对偶；②如果 H 是非半单的并且基础域的特征是 0 的话，则 H 同构一个所谓 Andruskiewitsch-Schneider 代数与一个群代数交差积的对偶；③如果 H 是非半单的并且基础域的特征不是 0 的话，则 H 同构于某个特定代数与一个群代数交差积的对偶。对于 Tame 型的 Basic Hopf 代数，我们可以给出的是根分次情形的结构定理。我们将看到根分次的情形至多只有五类。我们还给出了一些关于 Tame Hopf 代数的例子。

广义路（余）代数为我们解决步骤（3）（4）提供了一种可能。我们首先研究了所谓的广义路余代数的同构问题，证明了两个广义路余代数 $k(\Delta,\mathcal{C}) \cong k(\Delta',\mathcal{D})$ 当且仅当存在 quiver 的同构 $\varphi:\ \Delta \to \Delta'$ 使得 $S_i \cong T_{\varphi(i)}$ 对任意 $i \in \Delta_0$。我们还给出了广义路（余）代数的 Gabriel's 定理。关于一个广义路余代数上什么时候具有 Hopf 代数结构的问题也被解决。

Abstract

The main aim of this paper is to classify finite dimensional Hopf algebras, especially basic Hopf algebras. Our idea is to classify them through their representation type and our methods relay heavily on the representation theory of finite dimensional algebras.

In order to do so, we give four programs to classify finite dimensional Hopf algebras as follows.

(1) Give an effective way to determine the representation type of a finite dimensional basic Hopf algebra;

(2) Classify finite dimensional basic Hopf algebras through their representation type;

(3) Determine that when a finite dimensional Hopf algebra is Morita equivalent to a finite dimensional basic Hopf algebra;

(4) Find some new ways to generalize the conclusions in (2) to general finite dimensional Hopf algebras.

In order to resolve program (1), we attache every finite dimensional basic Hopf algebra H a number n_H which is called representation type number of H and proved that (i) H is of finite representation type if and only if $n_H = 0$ or $n_H = 1$; (ii) H is tame then $n_H = 2$ and (iii) H is wild if $n_H \geqslant 3$.

For program (2), we can classify finite dimensional basic Hopf algebras of finite representation type completely now. Explicitly, they are consist of three classes: (i) If H is semisimple, then $H \cong k(G)^*$ for some finite group; (ii) If H is not semisimple and cha$k$ is zero, then H is isomorphic the dual of the cross product between one so called Andruskiewitsch-Schneider algebra and a group algebra; (iii) If H is not semisimple and cha$k$ is not zero, then H is isomorphic the dual of the cross product between one special algebra and a group algebra. We also can give the structure theorem for basic Hopf algebra of tame type in the radical graded case. We can see that in this case they are consist of five classes at most. More examples about tame Hopf algebras are also given in this paper.

Generalized path (co)algebras give us one possibility to solve programs (3)(4). We study so called isomorphism problem for generalized path coalgebras at first and prove that $k(\Delta, \mathcal{C}) \cong k(\Delta', \mathcal{D})$ as coalgebras if and only if there is an isomorphism of quivers $\varphi: \Delta \to \Delta'$ such that $S_i \cong T_{\varphi(i)}$ as coalgebras for $i \in \Delta_0$. The Gabriel's Theorem for generalized path (co)algebras are also given in this paper. The problem of when there is a Hopf structure on generalized path coalgebra is settled.

目 录

第一章　引言

本章包括三节. 第一节将提供我们所研究问题的背景，第二节描述的是我们的研究步骤和主要结论，而第三节将给出我们的行文布局.

§1.1　背景

1941 年， Hopf 从他在紧李群（及其推广）的同调理论的工作而发展了现在被称为 Hopf 代数的理论. 从那以后，此种代数系统越来越多的出现在数学和数学物理的众多领域中.

自此， Hopf 代数的分类问题成为 Hopf 理论的中心问题之一. 历史上第一个著名的有关 Hopf 代数分类问题的结论是下述现被称为 Cartier-Kostent-Milnor-Moore 定理的定理.

定理 1.1.1. *一个特征 0 代数闭域上的余交换的 Hopf 代数是一个群代数与一个李代数的包络代数的半直积. 特别的，一个特征 0 代数闭域上的有限维余交换的 Hopf 代数是一个群代数.*

虽然量子群理论给了我们一种处理无限维 Hopf 代数的例子，但是一般来讲处理无限维的 Hopf 代数是一件很困难的事情. 通常有限维 Hopf 代数的分类似乎人们更感兴趣.

在过去的几十年间，在各种各样的前提下， Hopf 代数的分类取得了长足的进步. 据作者所知，截至到现在有限维 Hopf 代数的分类主要有以下四个方面组成：

（1）有关半单余半单 Hopf 代数的分类;

（2）有关非半单 Hopf 代数的分类;

（3）有关给定维数的 Hopf 代数的分类;

（4）有关三角 Hopf 代数的分类.

以下我们来简要叙述一下上述四个方面的主要结论和代表人物. 关于第一个方面，如果域 k 的特征为 0 ，我们知道一个 Hopf 代数是半单的当且仅当此 Hopf 代数是余半单的 [40]. 由 Etingof 和 Galaki 的一个漂亮的结论 [25], 我们知道域是正特征时的有关 Hopf 代数问题基本上可以归结为域是 0 特征时的一个类似问题. 因而，我们通常考虑的是特征 0 代数闭域上的半单 Hopf 代数的分类. 有关这个方面问题的一个很好的总结是 [55]. 在这个方面的更今一些的结论可以在文献 [1] 中找到.

关于第二个方面，实质上的分类都是针对特征 0 代数闭域上的点 Hopf 代数进行的. 这儿由两种截然不同的方法被用来研究点 Hopf 代数的分类. 第一种方法主要由 N.Andruskiewitsch 和 H.-J.Schneider 所创. 具体地来讲，就是利用 Radford 给出的 bosonization [68] 来研究 Nichols 代数并最终来分类点 Hopf 代数. 这种方法取得了巨大的成功. 此种方法的最大优点是能将李代数的理论用于点 Hopf 代数的分类 [5]. 另外，通过这种方法，我们还可以发现很多新的 Hopf 代数的例子. 并且，我们还可以利用这种方法来否定 Kaplansky 的第十个有关 Hopf 代数的猜想. 细节内容参见文献 [4][5][6][7][30][32][33].

另外一种方法主要为章璞教授所引入. 具体地，就是利用 quiver 及其表示的方法. 这种方法很是依赖于 Cibils-Rosso 的一个结果 [15]. 此种方法的一种优点是它引入组合的方法来研究点 Hopf 代数的分类问题. 利用这种方法，一种被成为 Monomial Hopf 代数的点 Hopf 代数被完全分类. 另外，局部有限单点 Hopf 代数（不仅仅有限维的）的分类也可以通过这种方法得到. 细节见 [12][65].

第三个方面的开创性工作应该首推下述朱永昌的结果：

定理 1.1.2. *设 p 是一个素数， k 是一个特征 0 的代数闭域. 则 k 上的一个维数为 p 的 Hopf 代数必然是半单的并且同构于 p 阶循环群的群代数.*

虽然朱永昌、 A.Masuoka [51][52][53] 及其他的一些作者 [57][58] 给出了很多有趣的结果，但是我们目前只能分类很少的几类给定维数的 Hopf 代数. 事实上，除了维数为 p, p^2, p^3, pq, p^2q 外，几乎所有的结果都集中在维数 ≤ 60 的情形.

对于第四个方面， N.Andruskiewitsch, P.Etingof 和 S.Gelaki 的工作应该是最重要的. P.Etingof 和 S.Gelaki 事实上已经证明半单三角 Hopf 代数于群代数是很接近的 [26]. 有关极小三角 Hopf 代数的结构也被得到 [2].

这儿有很多很好的有关有限维 Hopf 代数分类的综述文章，比如 [1][80] 等.

§1.2 我们的步骤和主要结论

由上一节的结论我们知道，目前所有的分类工作都是针对特殊 Hopf 代数进行的. 也就是说，我们还没有一个一般性的步骤来帮助我们去考虑所有有限维 Hopf 代数的分类问题.

在代数表示论中有两个已知的结论. 一个是，相对于表示型而言，每一个有限维代数恰是并且且是下述三类代数中的某一类：有限表示型代数、 Tame 型代数和

Wild 型代数. 另外一个就是每一个有限维代数都会 Morita 等价于唯一一个基本代数. 虽然有反例表明, 并不是每一个有限维的 Hopf 代数都会 Morita 等价于一个基本 Hopf 代数, 但是上述两个事实仍然我们产生以下想法:

通过表示型来分类有限维的 Hopf 代数

为了实现这一想法, 我们给出以下的分类步骤:

（ 1 ）给出一个有效的方法来决定基本 Hopf 代数的表示型;

（ 2 ）通过表示型来分类有限维基本 Hopf 代数;

（ 3 ）确定一个 Hopf 代数什么时候会 Morita 等价于一个基本 Hopf 代数;

（ 4 ）寻找新的途径来将（ 2 ）的结果推广到一般的有限维 Hopf 代数.

为了解决步骤 (1), 我们对每个基本 Hopf 代数引入了概念 表示型数. 也就是说, 对每个有限维基本 Hopf 代数 H, 我们为其配备了一个被称为 H 的表示型数的非负整数 n_H (见 4.1 节). 我们在第四章中证明了如下有限维基本 Hopf 代数的表示型数定理.

定理 1.2.1. *设 H 是一个有限维的基本 Hopf 代数， n_H 是其表示型数. 则*

(i) *H 是有限表示型的当且仅当 $n_H = 0$ 或 $n_H = 1$;*

(ii) *如果 H 是 tame 型的, 则 $n_H = 2$;*

(iii) *如果 $n_H \geq 3$, 则 H 是 wild 型的.*

事实上, 此定理在更大的范围内也是成立的（细节见第四章）. 由上述定理, 自然数 n_H 基本上可以确定 H 的表示型.

对于步骤（ 2 ）, 我们已经得到下述结论. 首先, 我们注意到就表示型而言, 我们只需分类有限表示型和 tame 型的 Hopf 代数因为剩下的全是 wild 型的. 目前, 我们已经给出了有限表示型的有限维基本 Hopf 代数的完整分类.

定理 1.2.2. (A) *设 H 是一个有限表示型的有限维基本 Hopf 代数. 则*

(A.1) *如果 H 是半单的, 则存在一个有限群 G 使得 $H \cong (kG)^*$;*

(A.2) *如果 H 不是半单的且域 k 的特征为 0 的话, 则存在一个群资料 $\alpha = (G, g, \chi, \mu)$ 使得 $H^* \cong A(\alpha)$. 这里 $A(\alpha)$ 的定义将在第四章中给出;*

(A.3) *如果 H 不是半单的且域 k 的特征为 p 的话, 则存在两个自然数 $d_0|n$ 、$r \geq 0$ 和一个 d_0 次的本原单位根 $q \in k$ 使得作为余代数*

$$H^* \cong C_d(n) \oplus \cdots \oplus C_d(n)$$

这里 $d = p^r d_0 \geq 2$. 并且作为 *Hopf* 代数

$$H^* \cong C_d(n)\#_\sigma k(G/N)$$

这里 $G = G(H)$ 、 $N = G(C_d(n))$.

(B) 设 H 是一个有限维的 *Hopf* 代数. 如果
- (B.1) 存在一个有限群 G 使得 $H \cong (kG)^*$ 或
- (B.2) 存在一个群资料 $\alpha = (G, g, \chi, \mu)$ 使得 $H^* \cong A(\alpha)$ 或
- (B.3) 作为余代数 $H^* \cong C_d(n) \oplus \cdots \oplus C_d(n)$

则 H 是一个有限表示型的有限维基本 *Hopf* 代数.

对于有限维 tame 型基本 Hopf 代数的情形，我们目前可以给出的是根分次情形的结构定理.

定理 1.2.3. *设 H 是一个有限维的基本 Hopf 代数. 则 grH 是 tame 的当且仅当存在一个有限群 G 和下述五种理想的某个理想 I 使得 $grH \cong k<x,y>/I \times (kG)^*$:*
- *(1) $I = (x^2 - y^2,\ yx - ax^2,\ xy)$ 这里 $0 \neq a \in k$;*
- *(2) $I = (x^2,\ y^2,\ (xy)^m - a(yx)^m)$ 这里 $0 \neq a \in k$ 且 $m \geq 1$;*
- *(3) $I = (x^n - y^n,\ xy,\ yx)$ 这里 $n \geq 2$;*
- *(4) $I = (x^2,\ y^2,\ (xy)^m x - (yx)^m y)$ 这里 $m \geq 1$;*
- *(5) $I = (yx - x^2,\ y^2)$*

本定理的证明将在第五章中给出. 此结构定理实际上告诉我们根分次的有限维 tame 型基本 Hopf 代数的数量是很少的. 至于非分次情形的分类，目前仍然是一个未知问题.

关于步骤（ 3 ），目前只有很少的一部分结论. 然而下面关于一有限表示型的有限维 Hopf 代数 Morita 等价于一个基本 Hopf 代数的必要条件看起来是有趣的.

定理 1.2.4. *设 H 是一个有限表示型的有限维 Hopf 代数. 如果它 Morita 等价于一基本 Hopf 代数，则它的 Ext-quiver 是一些同构基本圈的并. 因而它是一个 Nakayama 代数.*

此定理的证明将在第七章第四节中给出. 一个关于一有限表示型的有限维 Hopf 代数 Morita 等价于一个基本 Hopf 代数的充要条件也将在第七章中给出.

对于步骤（ 4 ），我们的思想是通过研究一种通常的路（余）代数的推广——

广义路（余）代数来解决它．我们首先推广了著名的对偶 Gabriel's 定理.

定理 1.2.5. 设 C 是一个满足 $CodimC_0 \leq 1$ 的余代数．记 $C_0 = \oplus_{i\in\Lambda} S_i$ 这里 S_i 是单余代数对所有 $i \in \Lambda$. 则

(a) (余代数的 Wedderburn-Malcev 定理) 存在 C 的一个余理想 I 使得作为线性空间 $C = I \oplus C_0$. 也就是说，存在一个从 C 到 C_0 的余代数投射.

(b) 假定 C_1/C_0 作为 C_0 －双模是 C/C_0 的直和项．则

(i) 存在一个余代数的嵌入 $\psi: C \hookrightarrow CoT_{C_0}(C_1/C_0)$.

(ii) (广义对偶 Gabriel 定理) 设 $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ 是 $CoT_{C_0}(C_1/C_0)$ 的 *quiver*, $\mathcal{C} = \{S_i | i \in \Lambda\}$. 则存在一个余代数的嵌入 $\varphi: C \hookrightarrow k(\Delta, \mathcal{C})$ 使得 $\varphi(I_1) \subseteq k(\Delta_1, \mathcal{C})$ 这里 $I_1 = I \cap C_1$.

什么时候一个广义路（余）代数具有 Hopf 代数结构？这个问题将被在第七章的最后一节中研究.

定理 1.2.6. 正规广义路余代数 $k(\Delta,\mathcal{C})$ 上具有一个以长度分次的分次 *Hopf* 代数结构当且仅当 $k(\Delta_1,\mathcal{C})$ 是一个 $k(\Delta_0,\mathcal{C})$-*Hopf* 双模且双余模映射就是命题 *7.1.2* 中给出的。

不过遗憾的是我们无法给出此时 quiver 的形状（但是我们却可以在通常的路（余）代数中做到这一点）.

§1.3 布局

在这一节中，我们将给出本文的行文布局．本文共分八章，每一章都由一些小节组成.

第一章是引言．分别给出了我们研究对象的背景以及我们的分类步骤和主要结果.

第二章给出的是以下各章的预备知识. 第一节的内容是 quiver 及其表示的一些相关记号和结论．这些记号和结论将在以后的各章中被自由地使用．一些有关 Hopf 代数的结论将在第二节中给出．为了研究 Hopf 代数，两类特殊的 quiver —— Hopf quiver 和 covering quiver 在第三节中被讨论．最后一节是一些 wild 代数的例子. Ringel 的一个著名的结果也将在此节中给出.

第三章给出的是一些有关 smash 积的性质．这些结论本身是有趣的，当然这些

结论也将被用在第四和第五章中．具体来讲，设 H 、H^* 是半单的 Hopf 代数，A 是一个 H- 模代数．在第一节中，我们证明 A 和 $A\#H$ 具有同样的整体维数和弱维数．第二节，我们证明他们具有相同的表示型．第三节，我们证明在某些条件下 $A\#H$ 是 Nakayama 代数当且仅当 A 是 Nakayama 代数．

第四章提供的是有限表示型的有限维基本 Hopf 代数的分类．第一节我们引入所谓的表示型数的定义并证明了 covering quiver 的表示型数定理．我们得到一个有限维基本 Hopf 代数是有限型的当且仅当它是一个 Nakayama 代数．在第二、第三、第四节中我们分别就此给出了三种不同的证明方法．有限表示型的有限维基本 Hopf 代数的完整分类在最后一节中给出．

第五章研究的是有限维基本 tame 型 Hopf 代数的分类．本章的主要结果是给出了根分次情形下的有限维基本 tame 型 Hopf 代数的结构定理．第一节，我们给出 tame 局部 Frobenius 代数的完整列表．此列表对本章的主要结果起到关键的作用．根分次情形下的有限维基本 tame 型 Hopf 代数的结构定理在第二节中得到．

第六章提供的是更多的有关 tame Hopf 代数的例子．具体来讲，我们通过两种途径来构造 tame Hopf 代数的例子——张量积和 Drinfeld 偶．第一节，我们引入 quiver 的形式张量的定义并且证明两个代数的张量积的 Ext-quiver 是他们 Ext-quiver 的形式张量．在第二节中，我们研究了两个非半单基本 Hopf 的张量积何时是 tame 的．我们证明只有这两个基本 Hopf 代数都是有限表示型时，此种情况才会发生．关于两个 Taft 代数（或更进一步，两个 Andruskiewitsch-Schneider 代数）的张量积何时是 tame 的的一个充要条件同样在此节中给出．最后一节，我们证明了一个所谓的 Andruskiewitsch-Schneider 代数的 Drinfeld 偶是一个 tame 代数．

第七章可以看成是我们为解决我们分类步骤中的第四步而作的一种尝试．一些关于广义路余代数的记号和结论在第一节中被给出．所谓的广义路余代数的同构问题在第二节中被解决．第三节给出的是广义对偶 Gabriel 定理．第四节主要是研究广义路代数．此节的主要目标是研究代数 A 的 Ext-quiver 和 $T(A/J_A, J_A/J_A^2)$ 的 quiver 的关系．此关系的一些应用也在此节中给出．最后一节我们讨论了关于一个广义路余代数上何时具有 Hopf 代数结构的问题．

第八章研究的是一类被称为弱 Hopf 代数（ Hopf 代数的一种推广）的代数上的表示范畴．与一般方式不同的是，我们通过引入弱张量范畴来研究其表示．一些相关定义和结论被给出．

第二章　预备知识

在本文中，除非我们另外说明，我们总是假定 k 是一个代数闭域并且所有的空间都是 k 线性空间. 对于一个代数 A，记 J_A (或 J 如果我们知道 A 是哪一个) 为 A 的 Jacobson 根.

§2.1　Quiver 及其表示

本节是为了固定一些记号和回顾一些定义. 同时我们也不加证明地给出一些众所周知的有关 quiver 及其表示的结论. 细节，见 [8][70].

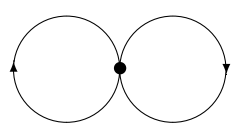
定义 2.1.1. 一个 quiver $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ 就是一个有向图. 这里 Q_0 是顶点集，Q_1 是箭向集， s 和 e 是两个从 Q_1 到 Q_0 的映射定义为 $s(\alpha) = i$, $e(\alpha) = j$ 如果 $\alpha: i \to j$ 是一个从顶点 i 到顶点 j 的箭向.

如果 Q_0 和 Q_1 都是有限集，则 Q 称为一个有限 quiver. 例如，我们有如下的 quiver ：

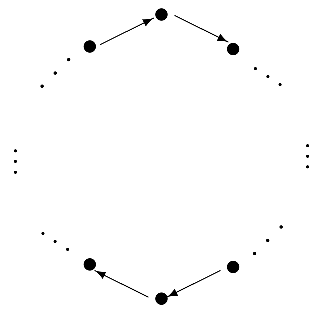
(i) A_n　型　　$\bullet \longrightarrow \bullet \cdots \bullet \longrightarrow \bullet$

(ii) Kronecker quiver　　$\bullet \rightrightarrows \bullet$

(iii) 一个顶点的两个循环圈



(iv) 长度为 n 的基本圈



长度为 1 的基本圈称为 loop. Quiver Q 中的一条路要么是一些箭向的有序序列 $p = \alpha_n \cdots \alpha_1$ 使得 $e(\alpha_t) = s(\alpha_{t+1})$ 对 $1 \leq t < n$，或者是一个符号 e_i 对 $i \in Q_0$. 我们称 e_i 为 平凡路 并且定义 $s(e_i) = e(e_i) = i$. 对于一条非平凡路 $p = \alpha_n \cdots \alpha_1$ 我们定义 $s(p) = s(\alpha_1)$ 且 $e(p) = e(\alpha_n)$. 一条非平凡路 p 被称为一个定向圈如果 $s(p) = e(p)$.

定义 2.1.2. 设 kQ 是以 Q 所有路为基的线性空间. 在 kQ 上以以下的方式定义一种乘法：对于路 p, q，

$$p \cdot q = \begin{cases} pq & \text{如果 } e(q) = s(p) \text{ a 且 } p, q \text{ 是非平凡路} \\ p & \text{如果 } q = e_{s(p)} \\ q & \text{如果 } p = e_{e(q)} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

在这种乘法定义下，容易看出 kQ 是一个结合代数并称之为 Q 的路代数.

一个有限维代数 A 称为 基本 的如果 A/J_A 是可除代数的直和. 我们可以将他们看成路代数的商代数.

定理 2.1.1. (P.Gabriel) *设 A 是一个基本代数，则存在唯一一个 quiver Q 和一个 admissible 理想 I (即 $J^N \subseteq I \subseteq J^2$ 这里 J 是有所有箭向生成的理想) 使得 $A \cong kQ/I$.*

进一步地，如果 A 是遗传的 (即 $Ext^i_A(-,-) = 0$ 对 $i \geq 2$) 当且仅当 $I = 0$.

定理 2.1.1 中的那个唯一的 quiver 被称为 A 的 *Ext-quiver*. 这个 quiver 还可以以下述方式来描述：假定 S_i $(i = 1, \ldots, n)$ 是非同构单模的完全集，则此 quiver 的顶点集就是 $\{1, \ldots, n\}$ 且从顶点 i 到顶点 j 的箭向个数是 $dim_k Ext^1_A(S_i, S_j)$.

命题 2.1.2. 设 Λ 是一个基本代数 $1 = e_1 + \cdots + e_n$ 是单位元的本原元分解. 令 $P_i = \Lambda e_i$ 、 $S_i = P_i/J_\Lambda P_i$ 对 $i = 1, \ldots, n$. 则对给定的属于 $\{1, \ldots, n\}$ 的数字 i, j ，以下数字是相同的.

(a) $dim_k(e_j J_\Lambda / J_\Lambda^2 e_i)$.

(b) 单模 S_j 在 $J_\Lambda P_i / J_\Lambda^2 P_i$ 中的重数.

(c) P_j 在 P 中的重数这里 $P \to P_i \to S_i \to 0$ 是单模 S_i 的极小投射分解.

(d) $dim_k Ext_\Lambda^1(S_i, S_j)$.

在本节的以下内容中，我们总是假定 Q 是一个有限 quiver.

定义 2.1.3. Quiver Q 的一个表示 M 就是一组资料

$$M = (M_i,\ i \in Q_0,\ f_\alpha,\ \alpha \in Q_1)$$

这里对每个 $i \in Q_0$ ， M_i 是一个有限为的 k- 空间，并且对每个箭向 $\alpha: i \to j$ ， $f_\alpha: M_i \to M_j$ 是一个 k- 映射. 记 $\underline{dim}M$ 为向量 $(dim_k M_i)_{i \in Q_0}$ 并称其为 M 的维数向量.

给定两个表示 $M = (M_i,\ i \in Q_0,\ f_\alpha,\ \alpha \in Q_1)$ 和 $N = (N_i,\ i \in Q_0,\ g_\alpha,\ \alpha \in Q_1)$ ，从 M 到 N 的态射 $h: M \to N$ 是一组线性映射 h_i ，即 $h = (h_i: M_i \to N_i,\ i \in Q_0)$ ，使得对每一个箭向 $\alpha: i \to j$ 下图是交换的：

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "h_i"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & N_i \arrow[d, "g_\alpha"] \\ M_j \arrow[r, "h_j"] & N_j \end{tikzcd}$$

记 $Rep_k(Q)$ 是 Q 的表示范畴.

定理 2.1.3. kQ 的有限维左模范畴与范畴 $Rep_k(Q)$ 是等价的.

定义 2.1.4. 一个代数 A 被称为是 有限表示型 的如果它只有有限个互不同构的不可分解模.

A 被称为 *tame* 型 或 A 是一个 *tame* 代数如果 A 不是有限表示型的，并且对任意维数 $d > 0$ ，存在有限个 A-$k[T]$- 双模 M_i 使得（ 1 ）这些 M_i 作为右 $k[T]$- 模

是自由的；（2）几乎所有的维数为 d 的 A –模都同构与 $M_i \otimes_{k[T]} k[T]/(T-\lambda)$ 对 $\lambda \in k$. 这里几乎所有是指除了有限多个其余都是的意思.

称 A 是 *wild* 型 或 A 是一个 *wild* 代数如果存在一个作为右 $k\langle X,Y\rangle$ 是自由的 A-$k\langle X,Y\rangle$- 模 B 使得函子 $B\otimes_{k\langle X,Y\rangle} -$ 从有限生成 $k\langle X,Y\rangle$ –模范畴到有限生成 A –模范畴保持模的不可分性并且反映同构.

定理 2.1.4. *设 Q 是一个有限连通 quiver. 则*

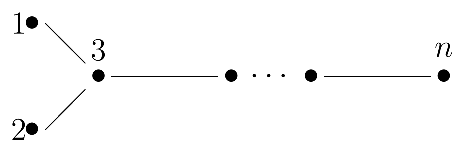
(1) kQ 是有限表示型的当且仅当 Q 所对应的无向图 $\overline{Q}$ 是下述 Dynkin 图中的某一个：

Dynkin 图

(i) A_n

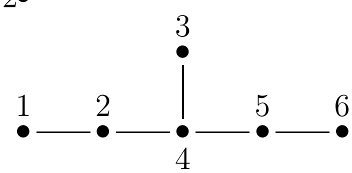
$n \geq 1$

(ii) D_n

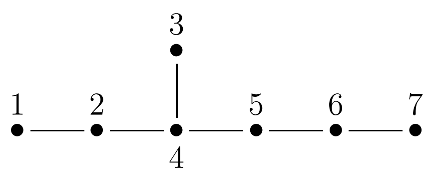


$n \geq 4$

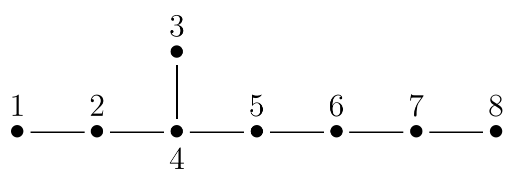
(iii) E_6



(iv) E_7



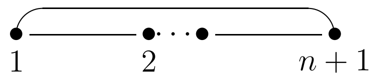
(v) E_8



(2) kQ 是 tame 型的当且仅当 Q 所对应的无向图 $\overline{Q}$ 是下述 Euclidean 图中的某一个：

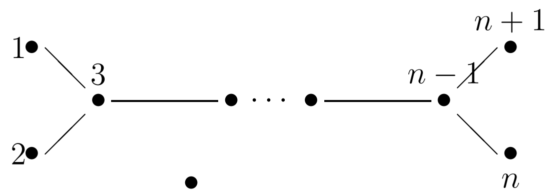
Euclidean 图

(i) $\widetilde{A}_n$



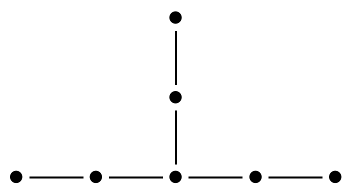
$n \geq 1$

(ii) $\widetilde{D}_n$

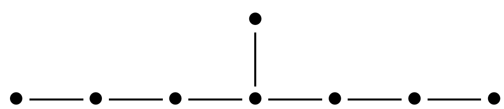


$n \geq 4$

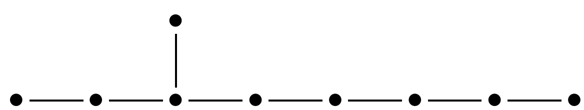
(iii) $\widetilde{E}_6$



(iv) $\widetilde{E}_7$



(v) $\widetilde{E}_8$



最后，我们来看一下路代数是如何与张量代数自然地联系在一起的. 设 Σ 是一个环， V 是一个 Σ- 双模. 对应 $(\Sigma,\ {}_{\Sigma}V_{\Sigma})$，我们可以构造其上的 张量环 $T(\Sigma, V)$. 如果我们记 n- 重张量积 $V \otimes_{\Sigma} V \otimes_{\Sigma} \cdots \otimes_{\Sigma} V$ 为 V^n，则作为阿贝尔群 $T(\Sigma, V) = \Sigma \oplus V \oplus V^2 \oplus \cdots \oplus V^i \oplus \cdots$. 设 $V^0 = \Sigma$ 并且乘法定义为自然的 Σ- 双模同态 $V^i \times V^j \ \rightarrow \ V^{i+j}$ 对 $i, j \geq 0$.

引理 2.1.5. 设 Σ 是一个环， V 是一个 Σ- 双模. 设 Λ 是一个环， $f: \Sigma \oplus V \ \rightarrow \ \Lambda$ 是一个映射满足：

(i) $f|_{\Sigma}: \Sigma \rightarrow \Lambda$ 是一个环同态；

(ii) 通过 $f|_{\Sigma}: \Sigma \rightarrow \Lambda$ 将 Λ 看成 Σ- 双模. 则 $f|_V: V \rightarrow \Lambda$ 是一个 Σ- 双模映射.

则存在唯一的环同态 $\widetilde{f}: T(\Sigma, V) \rightarrow \Lambda$ 使得 $\widetilde{f}|_{\Sigma \oplus V} = f$.

对每一个 n 我们记 $\prod_n(k)$ 为一个 k- 代数其作为环就是 $k\times\cdots\times k$. 通过环同态 $\phi:\ k\to\prod_n(k)$, 它有一个自然的 k 代数结构这里 $\phi(x)=(x,\ldots,x)$ 对所有的 $x\in k$. 设 $\Sigma=\prod_n(k)$， V 是一个 Σ- 双模并且 k 以中心的形式作用于其上. 假定 V 是一个有限维的 k －空间. 则对应的张量环 $T(\Sigma,V)$ 是一个 k- 代数. 我们可以以下方式为 $T(\Sigma,V)$ 配备一个 quiver $Q=(Q_0,Q_1)$：顶点集 Q_0 就是 $\{1,\ldots,n\}$；设 e_i 为第 i 坐标为 1 其余为 0 的向量, 显然它是 Σ 的幂等元. 则 e_jVe_i 是一个 V 的 k- 子空间. 定义这里有 $dim_k e_jVe_i$ 个箭向从 i 到 j. 以此种方式构造的 quiver $Q=(Q_0,Q_1)$ 被称为 $T(\Sigma,V)$ 的 *quiver*.

对于一个路代数 kQ，记 J 为 kQ 中所有箭向所生成的理想. 下述命题给出了路代数与张量代数的关系.

命题 2.1.6. *设 $\Sigma=\prod_n(k)$， V 是一个 Σ- 双模并且 k 以中心的形式作用于其上. 假定 V 是一个有限维的 k －空间. 如果 Q 是张量代数 $T(\Sigma,V)$ 的 quiver，则存 k- 代数同构 ϕ: $T(\Sigma,V)\to kQ$ 使得 $\phi(\bigoplus_{j\geq t})=J^t$ 对所有 $t\geq 1$.*

我们将使用引理 2.1.1 和命题 2.1.2 来判定何时会有一个从路代数到另外一个代数的代数同态.

§2.2 Hopf 代数

这一节, 我们回顾一些有关（辫子） Hopf 代数的记号、定义和众所周知的结论. 细节见 [54][76][50][68]. 我们对余乘法和余作用采用 Sweedler 的记号, 即 $\Delta(h)=\sum h_{(1)}\otimes h_{(2)}$ 和 $\rho(v)=\sum v_{(-1)}\otimes v_{(0)}$. 为了方便, 我们有时甚至会省略求和记号.

我们假定读者已经熟悉 Hopf 代数的定义. 设 H 是一个 Hopf 代数. 一个 H 的元素 $t\in H$ 称为一个 *左积分* 如果 $ht=\varepsilon(h)t$ 对所有的 $h\in H$. 记左积分集为 $\int_H^l$. 类似地, 我们可以定义右积分和符号 $\int_H^r$.

定理 2.2.1. *设 H 是一个有限维的 Hopf 代数. 则*

(1) $dim_k\int_H^l=dim_k\int_H^r=1$.

(2) *H 是一个 Frobenius 代数.*

(3) *H 是半单的当且仅当 $\varepsilon(\int_H^l)\neq\{0\}$ 或 $\varepsilon(\int_H^r)\neq\{0\}$.*

一个代数 A 被称为 *对称的* 如果存在一个非退化结合的对称双线性型 $(-,-)$: $A\times A\to k$，即 $(ab,c)=(a,bc)$ 和 $(a,b)=(b,a)$ 对所有 $a,b,c\in A$ 成立. 一个有

限维的 Hopf 代数 H 是对称的当且仅当 H 是么模的且对极的平方是一个内自同构（见 [47][66] ）. 我们知道对任意有限维 Hopf 代数，它的 Drinfeld 偶 $\mathcal{D}(H)$ 是么模且对极的平方是一个内自同构. 所以 $\mathcal{D}(H)$ 是一个对称代数.

定义 2.2.1. 设 V 是一个线性空间，$c:\ V\otimes V\to V\otimes V$ 是一个线性同构. 则 (V,c) 称为一个 *辫子空间* 如果 c 是辫子方程（或 Yang-Baxter 方程）的一个解：

$$(c\otimes id)(id\otimes c)(c\otimes id)=(id\otimes c)(c\otimes id)(id\otimes c)$$

设 H 是一个 Hopf 代数. 一个 H 上的 *(左) Yetter-Drinfeld* 模 V 同时是一个左 H- 模和一个左 H- 余模满足相容条件

$$\delta(h\cdot v)=h_{(1)}v_{(-1)}S(h_{(3)})\otimes h_{(3)}\cdot v_{(0)}$$

这里 $\delta:V\to H\otimes V$ 是余作用对 $h\in H,v\in V$. 由所有 H 上的 Yetter-Drinfeld 模组成的范畴记为 ${}^H_H\mathcal{YD}$.

对任意两个 Yetter-Drinfeld 模 M,N ，定义 $c_{M,N}:\ M\otimes N\to N\otimes M$ 为

$$c_{M,N}(m\otimes n)=m_{(-1)}\cdot n\otimes m_{(0)},\quad m\in M,\ \ n\in N$$

直接验证，我们知道对任意 Yetter-Drinfeld 模 M ， $(M,c_{M,M})$ 是一个辫子空间.

在范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 的一个代数是一个结合代数 (R,m,μ) 这里 $m:\ R\otimes R\to R,\ \mu:\ k\to R$ 满足 R 是一个 H 上的 Yetter-Drinfeld 模且 m 和 μ 是范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的态射. 类似地，在范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 的一个余代数是一个余结合余代数 (R,Δ,ε) 这里 $\Delta:\ R\to R\otimes R,\ \varepsilon:\ R\to k$ 使得 R 是一个 H 上的 Yetter-Drinfeld 模且 Δ 和 ε 都是范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的态射.

设 R,S 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 的两个代数. 则上述定义的辫子 $c_{S,R}:S\otimes R\to R\otimes S$ 允许我们在 Yetter-Drinfeld 模 $R\otimes S$ 上定义一个 “扭曲 ” 的代数结构在范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中. 具体地， $R\otimes S$ 上地的乘积定义为 $m_{R\otimes S}:=(m_R\otimes m_S)(id\otimes c_{S,R}\otimes id)$. 我们记此代数为 $R\underline{\otimes}S$. 与通常的张量代数不同的是我们用辫子 c 代替了通常的换位 τ.

定义 2.2.2. 一个在 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的 *辫子 Hopf 代数* 是 $(R,m,\mu,\Delta,\varepsilon,S)$ 这里：

(1) (R,m,μ) 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的代数；

(2) (R,Δ,ε) 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的余代数；

(3) $\Delta:\ R\to R\underline{\otimes}R$ 是一个代数同态；

(4) μ 和 ε 是代数同态；

(5) 恒等映射在 $End(R)$ 是卷积可逆的，它的逆就是对极 S.

设 A, H 是两个 Hopf 代数， $\pi: A \to H$ 和 $\iota: H \to A$ 是两个 Hopf 代数同态. 假定 $\pi\iota = id_H$. 类似于群论，我们想通过 H 和 π 的核的半直积来构造 A. 事实上，如果我们定义

$$R := A^{co\pi} = \{a \in A | (id \otimes \pi)\Delta(a) = a \otimes 1\}$$

一般来说，它不是一个 Hopf 代数但却是一个 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 的辫子 Hopf 代数具备下述结构：

- H 在 R 的作用就是伴随作用的限制；
- 余作用是 $(\pi \otimes id)\Delta$ ；
- R 是 A 的一个子代数；
- 余乘法是 $\Delta_R(r) = r_{(1)}\iota\pi S(r_{(2)}) \otimes r_{(3)}$ 对所有的 $r \in R$.

设 R' 同时是一个 H- 模代数和一个 H- 余模余代数. 我们可以考虑 R' 和 H 的 *带化* 或 *双积* $R' \times H$. 作为线性空间，它等于 $R' \otimes H$. 它同时是一个代数和余代数，其乘法和余乘法分别定义为

$$(r \times h)(s \times f) = r(h_{(1)} \cdot s) \times h_{(2)} f$$

$$\Delta(r \times h) = r_{(1)} \times (r_{(2)})_{(-1)} h_{(1)} \otimes (r_{(2)})_{(0)} \times h_{(2)}$$

对 $r, s \in R'$, $h, f \in H$.

定理 2.2.2. (i) *$R' \times H$ 是一个 Hopf 代数当且仅当 R' 在 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中是一个辫子 Hopf 代数.*

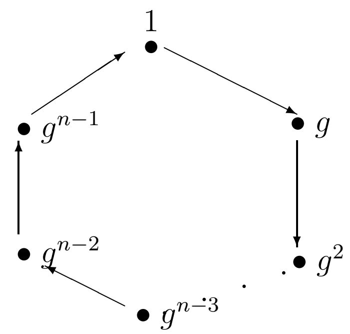
(ii) *设 $R = A^{co\pi}$. 则 R 是 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的一个辫子 Hopf 代数且作为 Hopf 代数 $A \cong R \times H$.*

§2.3 Hopf Quiver 和 Covering Quiver

作为一类特殊的代数， Hopf 代数拥有两类特殊的 quiver.

定义 2.3.1. 设 G 是一个有限群， $\mathcal{C}$ 是其共轭类集. 记自然数集为 $\mathcal{N}$. 一个类函数 $\chi : \mathcal{C} \to \mathcal{N}$ 称为一个 *ramification* 并记之为 $\chi = \sum_{C \in \mathcal{C}} \chi_C C$. 给定一个 G 的 ramification $\chi = \sum_{C \in \mathcal{C}} \chi_C C$ ，则对应的 *Hopf quiver* $\Gamma(G, \chi)$ 的顶点集是 $\Gamma_0 = G$ ，其箭向集定义为：对每一个 $x \in \Gamma_0, c \in C \in \mathcal{C}$ ，我们有 χ_C 个从 x 到 cx 的箭向.

例 2.3.1. (i) 设 $G = \langle g | g^n = 1 \rangle$， $\chi = [g]$ 这里 $[g]$ 表示 g 所在的共轭类，则对应的 Hopf quiver 是



(ii) 设 $G = K_4 = \{1, a, b, ab\}$ 是 Klein 四元群， $\chi = [1] + [a]$，则对应的 Hopf quiver 是

有很多作者研究过 Hopf quiver，例如 [12][15] 等. 我们回顾一下一个 Cibils 和 Rosso [15] 的结果，我们将会看到 Hopf 代数与 Hopf quiver 的联系.

定义 2.3.2. 设 Q 是一个 quiver， kQ 是以所有路为基的线性空间. 我们为 kQ 配备一种余乘法和一个余单位使之成为一个余代数. 余乘法定义为

$$\Delta(p) = p \otimes s(p) + \sum_{i=1}^{l-1} \alpha_l \cdots \alpha_{i+1} \otimes \alpha_i \cdots \alpha_1 + t(p) \otimes p$$

对任意 $p = \alpha_l \cdots \alpha_1$；余单位定义为

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} 0 & \text{if } l \geq 1 \\ 1 & \text{if } l = 0 \end{cases}$$

这个余代数称为 Q 的路余代数并记为 kQ^c.

定理 2.3.1. [15] 设 Q 是一个 *quiver.* 则下述命题是等价的：

(i) Q 是某个 (G, χ) 的 *Hopf quiver;*

(ii) kQ^c 具备一个以长度分次的分次 *Hopf* 代数结构.

另外一类对 Hopf 代数（尤其基本 Hopf 代数）有重要意义的 quiver 是 covering quiver.

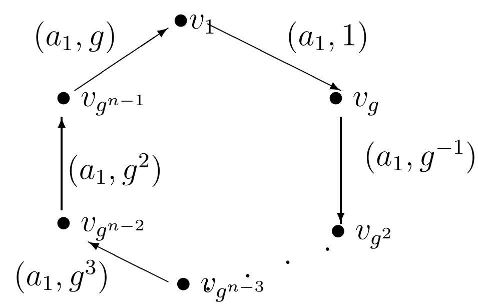
定义 2.3.3. 设 G 是一个有限群，$W=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ 是一个 G 中元素的序列. 我们称 W 是一个 *权序* 如果对每一个 $g\in G$, 序列 W 和 $(gw_1g^{-1},gw_2g^{-1},\ldots,gw_ng^{-1})$ 在除了一个置换的作用下是一样的. 特别地， W 在群的的共轭作用下是稳定的. 我们以下述方式定义一个 quiver 并记为 $\Gamma_G(W)$ ： $\Gamma_G(W)$ 顶点集就是 $\{v_g\}_{g\in G}$ ；它的箭向以下述方式给出

$$\{(a_i,g):\ v_{g^{-1}}\to v_{w_ig^{-1}}|i=1,2,\ldots,n,g\in G\}$$

我们称此 quiver 为相对与 W 的 covering quiver.

在文献 [31] 作者第一次引入了 covering quiver 的定义并用其去研究基本 Hopf 代数. 一个有限维 Hopf 代数称为基本的如果它作为代数是基本的.

例 2.3.2. *(1)* 设 $G=\langle g\rangle$, $g^n=1$ 且 $W=(g)$ ，则对于的 covering quiver 是：



(2) 设 $G=K_4=\{1,a,b,ab\}$ 为 Klein 四元群且 $W=(1)$. 则对于的 covering quiver 是：

下述定理将告诉我们 covering quiver 的重要性 (见 [31] 定理 2.3).

定理 2.3.2. *设 H 是 k 的一个有限维基本 Hopf 代数. 则存在一个有限群 G 和一个权序 $W=(w_1,w_2,\ldots,\ldots,w_n)$ 使得 $H\cong k\Gamma_G(W)/I$ 对一个 admissible 理想 I.*

这个结论实际上告诉我们基本 Hopf 代数的 Ext-quiver 是 covering quiver. 我们现在来讨论一下 Hopf quiver 和 covering quiver 的关系.

给定一个 covering quiver $\Gamma_G(W)$ 这里 $W=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ 是一个权序. 因为 W 在共轭作用下是稳定的，因而作为一个集合 W 是一些共轭类的不交并. 不失一般性，假定 W 是 $C_1,C_2,\ldots,C_m$ 的并. 定义一个 ramification χ 为 $\chi_C=$

C 在 $\{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$ 中的重数.. 则作为有向图 $\Gamma_G(W) \cong \Gamma(G,\chi)$.

反之，设 $\Gamma(G,\chi)$ 是一个 Hopf quiver 这里 $\chi = \sum_{C\in\mathcal{C}} \chi_C C$. 定义 W 为 χ_C 个 C 中元素的不交并. 因为 W 是一个有限集，所以我们可以在上面定义一个序使之成为一个序列. 显然， W 是一个权序且 $\Gamma_G(W)$ 是一个 covering quiver. 易见，作为有向图 $\Gamma(G,\chi) \cong \Gamma_G(W)$. 结合这些说明，我们得到下述结论：

命题 2.3.3. *一个 quiver 是 covering quiver 当且仅当它是一个 Hopf quiver.* □

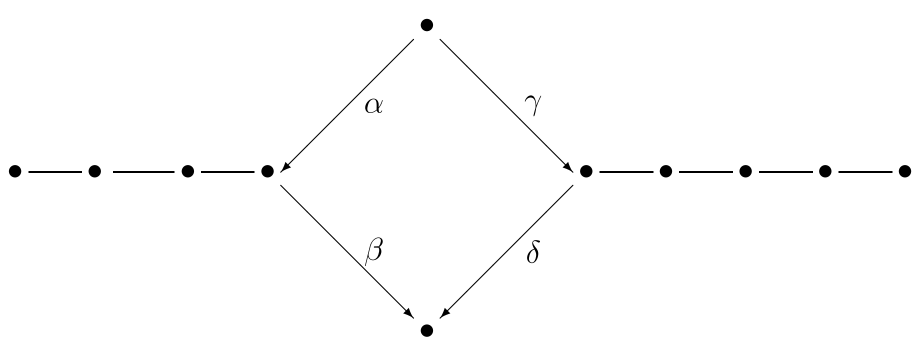
事实上，一般来讲，如果我们想考虑路余代数上的 Hopf 结构，我们需要考虑 Hopf quiver. 但当我们考虑路代数上的 Hopf 结构时，我们需要考虑的是 covering quiver.

§2.4 一些 Wild 代数

本节我们在主要给出两个结果. 一个由 Karin Erdmann [23] 给出. 此结果主要是给出几个 wild 代数的例子. 另一个是根据表示型来分类局部代数，这主要得归功于 C.M.Ringel.

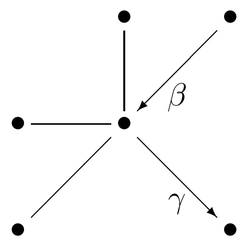
定理 2.4.1. *下述形式两个代数 kQ/I 都是 wild 的.*

(i)



这里 $I = \langle \beta\alpha - \delta\gamma \rangle$;

(ii)



这里 $I=\langle\gamma\beta\rangle$

为了根据表示型给出局部代数的完整分类，我们需要找出所有的极小 wild 代数 (即其任何真的商代数是 tame 的或有限型的) 和极大 tame 代数 (即其不会成为其他 tame 代数的真商代数). 下述定理是根据表示型而给出的局部代数的完整分类. 这是由 C.M.Ringel (见 [69]) 给出的.

定理 2.4.2. (i) *所有的极小 wild 局部代数为*

(a) $k\langle X,Y,Z\rangle/(X,Y,Z)^2$

(b) $k\langle X,Y\rangle/(X^2,XY,Y^2X,Y^3)$

(b') $k\langle X,Y\rangle/(X^2,YX,XY^2,Y^3)$

(c) $k\langle X,Y\rangle/(X^2,XY-\alpha YX,Y^2X,Y^3)$ 这里 $\alpha\neq 0$

(d) $k\langle X,Y\rangle/(X^2-Y^2,YX)$

(ii) *所有的极大局部 tame 代数为*

(1) $k\langle X,Y\rangle/(XY,YX)$

(2) $k\langle X,Y\rangle/(YX-X^n,XY)$ 这里 $n\geq 2$

(3) $k\langle X,Y\rangle/(YX-X^n,XY-Y^m)$ 这里 $n\geq 2,\ m\geq 3$

(4) $k\langle X,Y\rangle/(YX-X^2,XY-\alpha Y^2)$ 这里 $0\neq\alpha\neq 1$

(5) $k\langle X,Y\rangle/(X^2-(YX)^nY,Y^2-(XY)^nX)$ 这里 $n\geq 1$

(6) $k\langle X,Y\rangle/(X^2-(YX)^nY,Y^2)$ 这里 $n\geq 1$

(7) $k\langle X,Y\rangle/(X^2-(YX)^n,Y^2-(XY)^n)$ 这里 $n\geq 2$

(8) $k\langle X,Y\rangle/(X^2-(YX)^n,Y^2)$ 这里 $n\geq 2$

(9) $k\langle X,Y\rangle/(X^2,Y^2)$

第三章　Smash 积的某些性质

本章中， k 可以是一个任意域.

§3.1　同调维数

我们用 gl.dim(R) 和 w.dim(R) 分别来表示环 R 左整体维数和左弱维数. 假定 H 是一个半单 Hopf 代数， A 是一个 H- 模代数. 在这一节中，我们将决定 A 的同调维数和 $A\#H$ 同调维数的关系. 具体地，我们证明了下述结论：

定理 3.1.1. *设 H 是一个有限维 Hopf 代数， A 是一个 H- 模代数. 如果 H 和 H^* 都是半单的，则 gl.dim($A\#H$)=gl.dim(A) 及 w.dim($A\#H$)=w.dim(A).*

为了证明此结论，我们先给一些预备知识及相关结论.

令 $(A\#H)^H = \{x \in A\#H | hx = \varepsilon(h)x\}$. 容易证明如果我们定义 $(a\#h)b = a(h \cdot b)$ 对所有的 $a, b \in A,\ h \in H$ ，则 A 是一个 $A\#H$- 模. 我们总是以此种方式考虑 A 为左 $A\#H$- 模. 设 $\mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)$ 是所有的从 A 到 $A\#H$ 的 $A\#H$-模同态，这里 $A\#H$ 通过乘法成为 $A\#H$ －模. 如果 $f \in \mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)$ ，则容易看到 $f(1) \in (A\#H)^H$. 事实上，对 $h \in H,$ ，我们有 $hf(1) = f(h \cdot 1) = f(\varepsilon(h)1) = \varepsilon(h)f(1)$. 所以 $f(1) \in (A\#H)^H$. 另一方面，令 $x \in (A\#H)^H$. 如果我们定义 $f_x : A \to A\#H$ 通过 $f_x(a) = ax$ ，则 $f_x((b\#h)a) = f_x(b(h \cdot a)) = b(h \cdot a)x = \sum b(h_1 \cdot a)\varepsilon(h_2)x = \sum b(h_1 \cdot a)h_2 x = (b\#h)ax = (b\#h)f_x(a)$ 对所有 $a, b \in A,\ h \in H$. 因而 $f_x \in \mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)$. 如果我们定义

$$\varphi : \ \mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H) \to (A\#H)^H \ \text{ by } \ f \mapsto f(1)$$

$$\phi : \ (A\#H)^H \to \mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H) \ \text{ by } \ x \mapsto f_x$$

则容易发现 $\phi \circ \varphi = \mathrm{id}$ 和 $\varphi \circ \phi = \mathrm{id}$. 因此，

引理 3.1.2. *设 H 是一个有限维 Hopf 代数， A 是一个 H- 模代数. 则作为线性空间*

$$Hom_{A\#H}(A, A\#H) \cong (A\#H)^H \quad \square$$

定义 E : $A\#H \to A$ 通过 $E(\sum a\#h) = \sum \varepsilon(h)a$ 对 $a \in A,\ h \in H$. 显然，E 是一个满射. 我们宣称它还是一个 $A\#H$- 模映射. 事实上，对所有的 $a, b \in A,\ m, n \in H$ ，我们有 $E((a\#m)(b\#n)) = E(\sum a(m_1 \cdot b)\#m_2 n) = \sum \varepsilon(m_2 n)a(m_1 \cdot b) = \varepsilon(n)a(m \cdot b) = (a\#m)E(b\#n)$. 因此 E 是一个 $A\#H$- 模满射. 设 $t \in H$ 是 H 的一个非 0 左积分，我们有下述命题：

命题 3.1.3. *设 H 是一个有限维 Hopf 代数， A 是一个 H- 模代数．则 A 是投射 $A\#H$- 模当且仅当存在 $a \in A$ 使得 $t \cdot a = 1$.*

证明. 注意到 A 是一个投射 $A\#H$- 模当且仅当存在 $f \in \mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[ld, "f"'] \arrow[d, "id"] \\
A\#H \arrow[r, "E"] & A
\end{tikzcd}$$

这里 E 就是上述定义的 $A\#H$- 模满射. 易见 $Ef = \mathrm{id}$ 当且仅当 $Ef(1) = 1$ 因为 f, E 是 $A\#H$- 模同态. 由引理 3.1.2 中的同构 $\mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H) \cong (A\#H)^H$, 我们知道存在 $f: A \to A\#H$ 使得 $Ef(1) = 1$ 当且仅当存在 $x \in (A\#H)^H$ 使得 $E(x) = 1$. 但 $(A\#H)^H = (1\#t)(A\#1)$(见 [54] 的 133 页). 因而 $x = (1\#t)(a\#1)$ 对某个 $a \in A$. 因此，A 是投射 $A\#H$- 模当且仅当存在一元素 $a \in A$ 使得 $E((1\#t)(a\#1)) = \sum E(t_1 \cdot a\#t_2) = \sum \varepsilon(t_2)t_1 \cdot a = t \cdot a = 1$. 这正是我们想要的. □

如果我们取 A 是平凡的 H- 模代数，即 $A = k$ 且对所有的 $h \in H$, $a \in k$, $h \cdot a = \varepsilon(h)a$. 则由上述命题 k 是一个投射 $k\#H$ ($\cong H$) - 模当且仅当存在 $a \in k$ 使得 $t \cdot a = \varepsilon(t)a = 1$. 但是， $\varepsilon(t)a = 1$ 当且仅当 $\varepsilon(t) \neq 0$ ，这等价于说 H 是一个半单 Hopf 代数 (见 [54] 的定理 2.2.1). 因此我们有下述推论：

推论 3.1.4. *设 H 是 k 上的有限维 Hopf 代数，则 H 是半单的当且仅当 k 看成平凡模是投射 H- 模.* □

设 A 是一个 H- 模代数. 如果 H 是半单的，则存在一个非 0 左积分 t 使得 $\varepsilon(t) = 1$. 因而 $t \cdot 1 = \varepsilon(t)1 = 1$. 由命题 3.1.3 ， A 是一个投射 $A\#H$- 模. 因此，

推论 3.1.5. *设 H 是一个有限维半单 Hopf 代数， A 是一个 H- 模代数．则 A 是投射 $A\#H$- 模.* □

回顾两个环 R 和 S 称为 *Morita* 等价 的如果他们的模范畴是等价的. 众所周知，如果 R Morita 等价于 S ，则 gl.dim(R)=gl.dim(S) 且 w.dim(R)=w.dim(S). 由 Blattner-Montgomery Duality 定理 (见 [54] 的 9.4 节) 知，当 H 是有限维时，$A\#H\#H^*$ Morita 等价于 A. 因而我们有，

推论 3.1.6. *H 是一个有限维 Hopf 代数，A 是一个 H- 模代数. 则 gl.dim($A\#H\#H^*$) =gl.dim(A) 及 w.dim($A\#H\#H^*$)=w.dim(A).* □

引理 3.1.7. *H 是一个有限维半单 Hopf 代数, A 是一个 H- 模代数. 设 P 是一个左 $A\#H$- 模. 则 P 是投射 $A\#H$- 模当且仅当 P 是一个投射 A- 模.*

证明. 必要性可以直接得到因为 $A\#H$ 是一个自由 A- 模. 接下来, 让我们来考虑充分性. 对于 $A\#H$- 模 M 和 N , 设 $g:\ M\to N$ 和 $h:\ P\to N$ 是两个 $A\#H$- 模同态满足 g 是满的. 为了证明 P 作为 $A\#H$- 模是投射的, 只需找到一个同态 $\widetilde{f}\in Hom_{A\#H}(P,N)$ 满足 $h=g\widetilde{f}$. 因为 P 作为 A- 模是投射的, 所有存在 $f\in Hom_A(P,N)$ 使得 $h=gf$ 这里我们考虑 $A\#H$- 模以自然的方式成为 A- 模. 定义 $\widetilde{f}(p)=\sum S(t_1)\cdot f(t_2\cdot p)$ 对 $p\in P$, 这里 t 是一个非 0 右积分满足 $\varepsilon(t)\neq 0$. 则由 [17] 的命题 2 , 我们有 $\widetilde{f}$ 是 $A\#H$- 线性的. □

定理 3.1.1. 的证明: 我们首先证明 gl.dim($A\#H$)=gl.dim(A). 为此, 先证: gl.dim($A\#H$)≤gl.dim(A). 事实上, 这已经在 [72] 和 [48] 中分别得到过. 为了完整, 我们利用上面的引理来给出一个更直接的证明. 显然. 我们不妨假设 A 的整体维数是有限的, 比方说为 n. 对任意 $A\#H$- 模 N, 考虑其任意一个投射分解. 由引理 3.1.7, 这同样是其作为 A- 模的投射分解. 因而, 它的第 n- 次合冲作为 A- 模是投射的. 由引理 3.1.7, 它作为 $A\#H$- 模也是投射的. 这意味 p.dim(N)≤ n 且 gl.dim ($A\#H$)≤gl.dim(A).

注意到 $A\#H$ 是一个 H^*- 模代数通过 $f\cdot(a\#h)=a\#(f\rightharpoonup h)$ 这里 $f\rightharpoonup h=\Sigma f(h_2)h_1$ 对 $a\#h\in A\#H$ 和 $f\in H^*$. 则由上述结论, 我们有 gl.dim(($A\#H$)$\#H^*$)≤ gl.dim($A\#H$). 由推论 3.1.6, gl.dim(A)=gl.dim(($A\#H$)$\#H^*$). 因此, ,

$$\text{gl.dim}(A)=\ \text{gl.dim}((A\#H)\#H^*)\leq \text{gl.dim}(A\#H)\leq \text{gl.dim}(A)$$

所以, gl.dim($A\#H$)=gl.dim (A).

等式 w.dim($A\#H$)=w.dim(A) 的证明可以由 gl.dim($A\#H$)=gl.dim(A) 的证明完全得到只要我们注意到不等式 w.dim($A\#H$)≤w.dim(A) 已经在 [48] 中得到. □

在本节的最后, 我们给出此定理的一些应用和它与 Kaplansky 第五猜想的关系.

推论 3.1.8. *设 H 和 H^* 是半单的, 则*

(1) *$A\#H$ 是半单的当且仅当 A 半单的.*

(2) *$A\#H$ 是遗传的当且仅当 A 遗传的.*

(3) *$A\#H$ von Neumann 正则当且仅当 A 是 von Neumann 正则.* □

Kaplansky 第五猜想是说半单 Hopf 代数的对极 S 满足 $S^2=id$. 定理 3.1.1 与此猜想的关系由下述结论给出.

命题 3.1.9. 设 H 是有限维半单 *Hopf* 代数. 令其对极为 S 并假定在 k 中 $dim(H)\neq 0$. 则 $gl.dim(A\#H)=gl.dim(A)$ 对所有的 H- 模代数 A 成立当且仅当 $S^2=id$.

证明. "充分性: " 回顾 H 和 H^* 是半单的如果 $S^2 = id$ 且 $\mathrm{char}(k)$ 不整除于 $\dim(H)$([71] 的推论 3.5). 因而充分性由定理 3.1.1 得到.

"必要性: " 因为 H^* 是一个 H- 模代数通过 $a\cdot f = \sum f_2(a)f_1$ 对 $a\in H$, $f\in H^*$, 所以 $\mathrm{gl.dim}(H^*\#H)=\mathrm{gl.dim}(H^*)$. 但是 [54] 的推论 9.4.3, $H^*\#H\cong \mathrm{End}_k(H^*)$. 这是一个半单代数. 因而 $0=\mathrm{gl.dim}(H^*\#H)=\mathrm{gl.dim}(H^*)$. 这意味 H^* 也是半单的. 由 [25] 的推论 3.2, $S^2=\mathrm{id}$. □

当 $\mathrm{char}k = 0$, R.Larson 和 D.Radford 已经证明了 Kaplansky 第五猜想 (见 [39], [40]). Y.Sommerhäuser 同样证明了这个猜想当 $\mathrm{char}k > m^{m-4}$ 这里 $m = 2(\dim(H))^2$(见 [74] 的定理 4.2). P.Etingof 和 S.Gelaki 推进了 Y.Sommerhäuser's 的这个结论, 证明了这个猜想在 $\mathrm{char}k > d^{\varphi(d)/2}$ 的情况下也是成立的这里 $2<d=\dim H$ (这里 φ 是 Euler 函数, 见 [25] 的定理 4.2). 注意到, 这这些情形, k 的特征是不整除于 $\dim(H)$ 的. 因而命题 3.1.9 意味

推论 3.1.10. 设 H 是一个 d- 维半单 *Hopf* 代数且 $d>2$. 假定 $chark = 0$ 或 $chark > d^{\varphi(d)/2}$. 则 $gl.dim(A\#H)=gl.dim(A)$. □

§3.2 表示型

在此节, 我们假定 k 的特征为 0. 我们的主要任务是去证明如果 H 是半单则 A 的表示型与 $A\#H$ 的表示型是一致的.

我们固定一个记号. 设 R 是一个环且 M, N 是两个 R- 模. 如果作为 R- 模, M 是 N 的一个直和项, 则我们记为 $M|N$.

引理 3.2.1. 设 H 是一个有限维半单 *Hopf* 代数且 A 是一个 H- 模代数. 对任意有限生成 $A\#H$- 模 X, 有 $X|(A\#H)\otimes_A X$.

证明. 定义 φ: $(A\#H)\otimes_A X\to X$ 通过 $(a\#h)\otimes x\mapsto (a\#h)x$ 对 $a\in A, h\in H$ 和 $x\in X$. 显然, φ 是一个 $A\#H$- 满射.

设 $0\neq t\in \int_H^r$ 并假定 $\varepsilon(t)=1$. 定义 ψ: $X\to (A\#H)\otimes_A X$ 通过 $x\mapsto S(t')\otimes t''x$

对 $x \in X$. 对 $a \in A,\ h \in H,\ x \in X$, 我们有

$$\begin{aligned}\psi(ax) &= S(t') \otimes t''ax = S(t') \otimes (t'' \cdot a)t'''x \\ &= S(t')(t'' \cdot a) \otimes t'''x = (S(t'')t''' \cdot a)\#S(t') \otimes t'''x \\ &= (a\#S(t')) \otimes t''x = a\psi(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(hx) &= S(t') \otimes t''hx = \varepsilon(h')S(t') \otimes t''h''x \\ &= h'S(h'')S(t') \otimes t''h'''x = h'S(t'h'') \otimes t''h'''x \\ &= hS(t') \otimes t''x = h\psi(x)\end{aligned}$$

因而， ψ 是一个 $A\#H$- 同态. 都是显然 $\varphi\psi = id_X$. 因此 $X|(A\#H) \otimes_A X$. □

命题 3.2.2. *设 H 是一个有限维半单 Hopf 代数且 A 是一个 H- 模代数. 则 A 是有限型的当且仅当 $A\#H$ 也是的.*

证明. “必要性： ” 设 $\{B_1, \ldots, B_t\}$ 是非同构的不可分 A- 模的完备集并假定 X 是一个不可分的 $A\#H$- 模. 则如果将 X 看成 A- 模，我们有 $X \cong \oplus_{j=1}^t n_j B_j$ 因而 $(A\#H) \otimes_A X \cong \oplus_{j=1}^t (n_j(A\#H) \otimes_A B_j)$. 由引理 3.2.1, X 是 $(A\#H) \otimes_A X$ 的 $A\#H$- 直和项，所以我们知道存在 i 使得 X 是 $(A\#H) \otimes_A B_i$ 的 $A\#H$- 直和项. 因而，对所有的 i 及所有的非同构的 $(A\#H) \otimes_A B_i$ 的不可分 $A\#H$- 直和项给出了一个非同构的不可分 A- 模的完备集. 所以， $A\#H$ 是有限表示型的.

“充分性： ” 由于 k 的特征为 0 ，所以 H^* 也是半单的 (见 [40]). 由必要性的证明知， $(A\#H)\#H^*$ 是有限表示型的. 由 Blattner-Montgomery Duality 定理, $(A\#H)\#H^* \cong M_n(A)$ 是 Morita 等价于 A. 所以 A 是有限型的. □

设 Λ 是一个有限维代数. 我们定义一个所谓的 *generic* 范畴 (我们之所以称其为 generic 范畴是因为它与 tame 代数因而与 *generic* 模(见 [18]) 有紧密的联系). 它的对象是所有的作为右 $k[T]$- 模是有限生成自由的的 Λ-$k[T]$- 双模. 它的态射就是 Λ-$k[T]$- 同态. 我们记此范畴为 $GC(\Lambda)$.

引理 3.2.3. *设 $X \in GC(\Lambda)$. X 在 $GC(\Lambda)$ 中是不可分的当且仅当 $X \otimes_{k[T]} k[T]/(T-\lambda)$ 作为 Λ-$k[T]/(T-\lambda)$- 双模是不可分的对 $\lambda \in k$.*

证明. “充分性： ” 显然，如果 X 是可分的，则 $X \otimes_{k[T]} k[T]/(T-\lambda)$ 也是可分的.

“必要性：” 假定存在 Λ-$k[T]/(T-\lambda)$- 双模 N_1 和 N_2 使得 $X \otimes_{k[T]} k[T]/(T-\lambda) = N_1 \oplus N_2$. 则

$$X \cong X \otimes_{k[T]} k[T]/(T-\lambda) \otimes_{k[T]/(T-\lambda)} k[T] = (N_1 \otimes_{k[T]/(T-\lambda)} k[T]) \oplus (N_2 \otimes_{k[T]/(T-\lambda)} k[T])$$

这里 $k[T]$ 是一个 $k[T]/(T-\lambda)$ －模因为作为代数 $k[T]/(T-\lambda) \cong k$. 由假设， X 是不可分的，所以 $N_1 = 0$ 或 $N_2 = 0$. 也就是说， $X \otimes_{k[T]} k[T]/(T-\lambda)$ 是不可分的. □

命题 3.2.4. *设 H 是一个有限维半单 Hopf 代数且 A 是一个 H- 模代数. 则 A 是 tame 型的当且仅当 $A\#H$ 也是的.*

证明. "必要性： " 我们将通过 tame 代数的定义来证明 $A\#H$ 是 tame 的. 显然， $A\#H$ 不是有限型的因为否则的话，由命题 3.2.2 ， A 也是有限型的. 设 d 是一个正整数， X 是一个不可分的 $(A\#H)$- 模. 假定 $dim_k X = d$. 由引理 3.2.1, $X|(A\#H)\otimes_A X$. 我们记 X 为 X_A 如果我们考虑 X 以自然的方式成为一个 A- 模的时候. 假定 $X_A = X_1\oplus\cdots\oplus X_m$ 是其不可分模的直和分解. 所以存在 $i\in\{1,\ldots,m\}$ 使得 $X|(A\#H)\otimes_A X_i$.

因为 X 的维数是有限的，所以 X_i 当然也是有限维的. 由于 A 是一个 tame 代数，所以有有限个作为右 $k[T]$ –模是自由的 A-$k[T]$- 双模 M_j $(j=1,\ldots,n)$ 使得除了有限多个维数不大于 d 的不可分 A- 模外其余都同构于 $M_j\otimes_{k[T]}k[T]/(T-\lambda)$ 对某个 j 和某个 $\lambda\in k$. 为证 $A\#H$ 是 tame 的, 我们不妨假定 $X_i\cong M_{i_j}\otimes_{k[T]}k[T]/(T-\lambda)$ 对某个 $i_j\in\{1,\ldots,n\}$ 和某个 $\lambda\in k$. 显然， $(A\#H)\otimes_A M_{i_j}\in GC(A\#H)$.

我们将 $(A\#H)\otimes_A M_{i_j}$ 在 $GC(A\#H)$ 中分解为不可分的对象，$(A\#H)_A\otimes M_{i_j}=\oplus_{k\in I_j}M_{i_j}^k$ 这里 I_j 是一个有限的指标集. 由引理 3.2.3, $M_{i_j}^k\otimes_{k[T]}k[T]/(T-\lambda)$ 作为 $A\#H$-$k[T]/(T-\lambda)$- 双模也是不可分的. 这就是说 $M_{i_j}^k\otimes_{k[T]}k[T]/(T-\lambda)$ 作为 $A\#H$-模是不可分的因为 $k[T]/(T-\lambda)\cong k$. 由上述讨论， $X|(A\#H)\otimes_A X_i=(A\#H)\otimes_A M_{i_j}\otimes_{k[T]}k[T]/(T-\lambda)=\oplus_k M_{i_j}^k\otimes_{k[T]}k[T]/(T-\lambda)$. 这意味 $X\cong M_{i_j}^k\otimes_{k[T]}k[T]/(T-\lambda)$ 对某个 $i_j\in\{1,\ldots,n\}$, $k\in I_j$ 和 $\lambda\in k$. 因为集合 $\{M_{i_j}^k\}_{i_j\in\{1,\ldots,n\},\,k\in I_j}$ 是有限的， $A\#H$ 也是 tame 的.

"充分性： " 其证明类似于命题 3.2.2 "充分性 " 的证明. 为了完整，我们将其写出. 由于 k 的特征为 0 ，所以 H^* 也是半单的 (见 [40]). 由必要性的证明知， $(A\#H)\#H^*$ 是 tame 型的. 由 Blattner-Montgomery Duality 定理， $(A\#H)\#H^*\cong M_n(A)$ 是 Morita 等价于 A. 所以 A 是 tame 型的. □

定理 3.2.5. *设 H 是一个有限维半单 Hopf 代数且 A 是一个 H- 模代数. 则 A 与 $A\#H$ 有相同的表示型.*

证明. 回顾 Drozd 著名的 tame–wild 定理是说任意不是有限型的有限维代数要么是 tame 的要么是 wild 的 (见 [21]). 因而由命题 3.2.2 和命题 3.2.4, 我们得到 A 是 wild 的当且仅当 $A\#H$ 是 wild 的. 综合命题 3.2.2 、命题 3.2.4 和此结论，我们得到了证明. □

注 3.2.6. *由 Drozd 关于 tame 代数的定义，有限型事实上是 tame 型的特例. 因而，他原先 tame-wild 定理是说每一个有限维代数要么是 tame 的要么是 wild 的. 为了我们的需要，我们对这个著名的结论做了一点小小的修改，使之成为上面定理中的样子.*

§3.3 Nakayama 性质

一个模 M 称为 *uniserial* 的如果它的子模集在包含关系下是一个全序集．一个有限维代数 A 称为 *Nakayama* 代数 如果它的不可分投射和不可分内射模都是 uniserial 的．除了半单代数外，从表示的角度而言， Nakayama 代数是一类被了解的最清楚的代数．本节的目标就是通过 smash 积由原先的 Nakayama 代数来构造新的 Nakayama 代数．本节的主要结论就是

定理 3.3.1. *H 是一个有限维 Hopf 代数且 A 是一个 H- 模代数．如果 H 和 H^* 是半单的且 A 的根是 H- 稳定的，则 $A\#H$ 是一个 Nakayama 代数当且仅当 A 是一个 Nakayama 代数.*

为了证明此定理，我们需要下述引理.

引理 3.3.2. *如果 H 是半单 Hopf 代数且其根 J 是 H- 稳定的，则 $rad(A\#H)$ 等于 $J\#H$.*

证明. 记通常的满射 $A \to A/J$ 为 p. 这诱导出代数同态 $\pi: A\#H \to (A/J)\#H$ 通过 $\pi(\sum a\#h) = \sum p(a)\#h$ 对所有的 $a \in A,\ h \in H$. 容易验证 $\mathrm{Ker}\pi = J\#H$. 因而， $A\#H/J\#H \cong (A/J)\#H$. 但是 $(A/J)\#H$ 是一个半单代数由推论 3.1.8，这意味 $\mathrm{rad}(A\#H) \subseteq J\#H$. 另外，因为 $(J\#H)^i = J^i\#H$, 我们有 $J\#H$ 是幂零理想因而 $J\#H \subseteq \mathrm{rad}(A\#H)$. 所以， $\mathrm{rad}(A\#H) = J\#H$. □

回顾 [8] 中一些我们将要使用的结论．所有这些结果可以在 [8] 的 IV.2 节中找到.

引理 3.3.3. *设 A 是一个 artin 代数且 J 是 A 的根．则 A 是一个 Nakayama 代数当且仅当 A/J^2 是 Nakayama 代数.*

引理 3.3.4. *设 A 是一个 artin 代数且 $J^2 = 0$. 则 A 是 Nakayama 代数当且仅当 A 的内射包 $I(A)$ 是投射的.*

引理 3.3.5. *设 $f: \Lambda \to \Gamma$ 是一个 artin 代数的同态．则以下是等价的：*

(i) Γ 是一个投射右 Λ- 模.

(ii) 每一个内射 Γ- 模都是内射 Λ- 模.

我们首先说明为了证明定理 3.3.1，我们可以假定 A 的根 J 满足 $J^2 = 0$. 事实上，由引理 3.3.3 我们知道一个有限维代数 A 是 Nakayama 的当且仅当 A/J^2 是

Nakayama 的. 因而, $A\#H$ 是 Nakayama 当且仅当 $A\#H/(\mathrm{rad}A\#H)^2$ 是 Nakayama 的. 由引理 3.3.2 ，我们有 $\mathrm{rad}(A\#H) = J\#H$. 因而 $(\mathrm{rad}(A\#H))^2 = J^2\#H$. 进一步地，由引理 3.3.2 的证明知道 $A\#H/(J\#H)^2 \cong (A/J^2)\#H$. 所以我们了证明定理 3.3.1 ，我们可以假定 A 的根 J 满足 $J^2 = 0$. 这正是我们需要的. 即，从现在开始我们总是假定 A 的根是 2- 幂零的. 下述命题给出了定理 3.3.1 的一个方向.

命题 3.3.6. *如果 H 和 H^* 是半单 Hopf 代数且 A 的根是 H- 稳定的. 如果 $A\#H$ 是一个 Nakayama 代数则 A 是 Nakayama 的.*

证明. 综合引理 3.3.4 和前面的说明, 我们看到为了证明此命题只需证明: 如果 $A\#H$ 的内射包 $I(A\#H)$ 是 $A\#H$- 投射的则 A 的内射包 $I(A)$ 是 A- 投射的. 我们来证这确实是对的.

我们知道通过嵌入 $A \hookrightarrow A\#H$ ， $A\#H$ 是右和左的投射 A- 模. 因为 $A\#H$ 投射右 A- 模，我们由引理 3.3.5 知 $I(A\#H)$ 是一个内射 A- 模. 因为 $I(A\#H)$ 是一个投射 $A\#H$- 模且 $A\#H$ 是一个投射 A- 模，因而 $I(A\#H)$ 是一个投射 A- 模. 所以 $I(A\#H)$ 是一个包含 A 的投射且内射的 A- 模. 因而 $I(A\#H)$ 包含 $I(A)$ 作为一个直和项. 这意味 $I(A)$ 也是投射 A- 模. □

定理 3.3.1 的证明： 由命题 3.3.6, 我们只需证如果 A 是 Nakayama 的则 $A\#H$ 也是的. 现在我们假定 A 是 Nakayama 的. 由 Blattner-Montgomery Duality 定理, 我们知道 $A\#H\#H^*$ 是 Nakayama 的. 由引理 3.3.2, $A\#H$ 的根是 H^*- 稳定的. 因而利用命题 3.3.2 证明的同样方法，我们有 $A\#H$ 也是 Nakayama 的. □

第四章 有限表示型的基本 Hopf 代数

本章中，我们将分类有限表示型的基本 Hopf 代数.

§4.1 表示型数和 Covering Quiver 的表示型数定理

我们给出对一个 covering quiver（见定义 2.3.3 ）的 *表示型数* 的定义.

定义 4.1.1. 设 $\Gamma_G(W)$ 是一个 covering quiver. $\Gamma_G(W)$ 的表示型数定义为 W 的势，即 $n_{\Gamma_G(W)} = |W|$.

给定一个赋值 quiver Γ, 我们可以为其以下述方式定义另外一个称为分离 quiver 的 quiver Γ_s：如果 $\{1, \dots, n\}$ 是 Γ 的顶点集, 则 Γ_s 的顶点集是 $\{1, \dots, n, 1', \dots, n'\}$. 对每一个 Γ 的赋值箭向 $\overset{i}{\cdot} \xrightarrow{(a,b)} \overset{j}{\cdot}$，我们有 Γ_s 的箭向 $\overset{i}{\cdot} \xrightarrow{(a,b)} \overset{j'}{\cdot}$.

注意到定理 2.1.4 在下述结论的证明中被经常用到.

定理 4.1.1. (Covering Quiver 的表示型数定理) *设 $\Gamma_G(W)$ 是一个 covering quiver, $|W|$ 是其表示型数. 假定 A 是一个有限维代数且其 Ext-quiver 是 $\Gamma_G(W)$. 则*

(i) *A 是有限表示型当且仅当 $|W| = 0$ 或 $|W| = 1$;*

(ii) *如果 A 是 tame 的，则 $|W| = 2$;*

(iii) *如果 $|W| \geq 3$, 则 A 是 wild 的.*

证明. (i):“充分性：”当 $|W| = 0$, $\Gamma_G(W)$ 无任何箭向. 这意味 A 是一个半单代数当然有限表示型. 当 $|W| = 1$, $\Gamma_G(W)$ 由一些基本圈组成. 我们知道一个基本代数是 Nakayama 的当且仅当它的 Ext-quiver 是 A_n 或基本圈. 所以 A 的基本代数是一个 Nakayama 代数. 由于每一个 Nakayama 代数都是有限表示型 ([8], 197 页) 且 A 是 Morita 等价与它的基本代数，所以 A 是有限表示型.

“必要性：”我们只需证 A 是无限表示型的如果 $|W| \geq 2$. 为了证明这一点，我们只需考虑 $|W| = 2$ 的情形 (事实上，我们将证明如果 $W \geq 3$, 则 A 是 wild 的). 我们记 A 的基本代数为 $B(A)$. 我们只需证 $B(A)$ 是无限表示型的. 由定理 2.1.1 , 存在一个 admissible 理想 I, 使得 $k\Gamma_G(W)/I \cong B(A)$. 记由所有的箭向生成的理想为 J. 由 admissible 理想的定义知，我们有一个代数的满同态

$$B(A) \twoheadrightarrow k\Gamma_G(W)/J^2$$

因此我们只要证 $k\Gamma_G(W)/J^2$ 不是有限表示型的即可. 显然，$k\Gamma_G(W)/J^2$ 的 Jacobson 根是 2- 幂零的，所以 $k\Gamma_G(W)/J^2$ 稳定等价于下面的遗传代数 (见 [8] X 定理

2.4):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} k\Gamma_G(W)/J & 0 \\ J/J^2 & k\Gamma_G(W)/J \end{pmatrix}$$

Λ 的 Ext-quiver 就是 $\Gamma_G(W)$ 的可分 quiver (见 [8] X 定理 2.6 的证明).

设 $W = (w_1, w_2)$. 如果 $w_1 = w_2$, 我们可以发现 $\Gamma_G(W)$ 分离 quiver 是下述形式 quiver 的不交并：

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & j' \end{tikzcd}$$

这意味 Λ 不是有限表示型的因为显然上述 quiver 是 Kronecher quiver (它不是 Dynkin 图).

如果 $w_1 \neq w_2$, $\Gamma_G(W)_s$ 必有下面的子 quiver ：

$$\begin{tikzcd} \cdots & i_2 \arrow[d] & & i_1 \arrow[d] & \cdots \\ & j_2' & 1 \arrow[l] \arrow[r] & j_1' & \end{tikzcd}$$

如果 $i_1 = i_2$, $\Gamma_G(W)_s$ 不是 Dynkin 图因而 Λ 是无限表示型的. 如果 $i_1 \neq i_2$ ，我们有

$$\begin{tikzcd} j_3' & i_2 \arrow[l] \arrow[d] & & i_1 \arrow[r] \arrow[d] & j_4' \\ & j_2' & 1 \arrow[l] \arrow[r] & j_1' & \end{tikzcd}$$

如果 $j_4' = j_l'$ 对 $l = 1, 2, 3$, $\Gamma_G(W)_s$ 不是 Dynkin 图因而 Λ 是无限表示型的. 如果不是这样，重复上述步骤并由 covering quiver 的定义知存在 i_t, i_s 或 j_t', j_s' 满足 $i_t = i_s$ 或 $j_t' = j_s'$. 一句话说， $\Gamma_G(W)_s$ 不是 Dynkin 图因而 Λ 是无限表示型的． H.Krause [38] 的一个著名结果说稳定等价的代数有相同的表示型. 因此，$k\Gamma_G(W)/J^2$ 是无限型的. 从而 $B(A)$ 不是有限表示型的.

显然， (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). 所以我们只证 (iii). 因为 $|W| \geq 3$, 我们假定 $W = (w_1, w_2, w_3, \ldots)$. 就像 (i) 的 “必要性 ” 的证明，我们来考虑 $k\Gamma_G(W)/J^2$ 的分离 quiver. 如果 $w_1 = w_2$, $\Gamma_G(W)_s$ 具有下述的子 quiver ：

$$\begin{tikzcd}
j_2' \\
1 \arrow[u] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & j_1'
\end{tikzcd}$$

显然它不是 Euclidean 图，然而 $k\Gamma_G(W)/J^2$ 是一个 wild 代数. 如果 $w_1 \neq w_2$，不失一般性我们假定 $w_i \neq w_j$ 对 $1 \leq i \neq j \leq 3$. 这意味 $\Gamma_G(W)_s$ 具有下面的子 quiver：

$$\begin{tikzcd}
 & i_{21} \arrow[d] & j_3' & i_{11} \arrow[d] & \\
i_{22} \arrow[r] & j_2' & 1 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r] & j_1' & i_{12} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

显然它不是 Euclidean 图，然而 $k\Gamma_G(W)/J^2$ 是一个 wild 代数. 从而 $B(A)$ 和 A 是 wild 代数. $\square$

§4.2 第一种方法

在本节和下述两节中，我们分别给出三种不同的方法来证明下述定理. 此定理对我们有关有限表示型的基本 Hopf 代数的分类是很重要的.

定理 4.2.1. *设 H 是一个有限维的基本 Hopf 代数. 则 H 是有限表示型的当且仅当 Nakayama 代数.*

此定理的充分性是显然的. 因此有时我们只给出必要性的证明. 我们在本节只先给出此定理的第一种证明. 回顾定理 2.3.2 告诉我们有限维基本 Hopf 代数的 Ext-quiver 是 covering quiver. 由此，我们给出 *基本 Hopf 代数的表示型数* 的定义.

定义 4.2.1. 设 H 是一个有限维基本 Hopf 代数且 $\Gamma_G(W)$ 是其 Ext-quiver. H 的表示型数 n_H 定义为 $n_{\Gamma_G(W)}$, 即， $n_H = n_{\Gamma_G(W)} = |W|$.

下述引理在 [22] 中已经得到.

引理 4.2.2. *一个不可分的基本代数是 Nakayama 当且仅当它的 quiver 是一个基本圈或线性 quiver A_m* $\square$.

定理 4.2.1 的证明： “必要性：” 由 Covering Quiver 的表示型数定理，我们知道 H 是有限表示型当且仅当 $n_H = 0$ 或 $n_H = 1$.

当 $n_H = 0$, $\Gamma_G(W)$ 没有任何箭向．所以 H 是半单的当然 Nakayama.

当 $n_H = 1$, $\Gamma_G(W)$ 由基本圈组成，由引理 4.2.2, H 是 Nakayama 的.

“充分性：” 显然. □

§4.3 第二种方法

第二种方法依赖于 E.Green 的一个结果．为了介绍这个结果，我们先引入一些记号.

对一个 covering quiver $\Gamma_G(W)$．在 $\Gamma_G(W)$ 上有一个自然的左 G 作用，即，$g \cdot v_h = v_{hg^{-1}}$ 和 $g \cdot (a_i, h) = (a_i, gh)$ 对任意 $v_h \in \Gamma_G(W)_0$, $(a_i, h) \in \Gamma_G(W)_1$ 及 $g \in G$. 假定 $W = (w_1, w_2, \ldots, \ldots, w_n)$ 是一个权序．显然，商图 $\Gamma_G(W)/\sim G$ 是由一个顶点和 n 个 loop 组成．所以， $k\Gamma_G(W)/\sim G$ 同构于由 n 个变量生成的自由代数，即

$$k\Gamma_G(W)/\sim G \cong k\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

记 $k\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 为 F. 这是一个 G- 分次代数通过给定 x_i 的次为 w_i (细节，见 [31])．由于下述结论是很重要的，我们称之为 Green 定理 (见推论 4.5 于 [31])．注意我们不加说明的使用 [31] 中的术语.

引理 4.3.1. (Green 定理) *设 $k\Gamma_G(W)$ 是一个 Hopf 代数且其上 Hopf 结构由 allowable kG- 双模结构给出．设 I 是 $k\Gamma_G(W)$ 的一个 admissible Hopf 理想， F 是同构于 $k\Gamma_G(W)/\sim G$ 的 G- 分次自由代数．我们将其视为恒等．最后，我们记 $\overline{I}$ 为 I 的轨道类在 F 中生成的理想．则*

(a) *$\overline{I}$ 在自由代数 F 中是一个齐次理想．从而， $F/\overline{I}$ 是一个有限维 G- 分次代数.*

(b) *G- 分次 $F/\overline{I}$- 模范畴 (有限维 G- 分次 $F/\overline{I}$- 模范畴) 等价于 $k\Gamma_G(W)/I$- 模范畴 (有限维 $k\Gamma_G(W)/I$- 模范畴).* □

事实上，由此引理的证明 (见 [31])，我们知道当 I 满足条件 $G \cdot I \subset I$ 和 $I \cdot G \subset I$ 时， Green 定理也是对的．由于显然 $G \cdot J^2 \subset J^2$ 且 $J^2 \cdot G \subset J^2$ (这里 J 表示由所有箭向生成的理想), 所以我们有：

推论 4.3.2. *G- 分次 $F/\overline{J^2}$- 模范畴 (有限维 G- 分次 $F/\overline{J^2}$- 模范畴) 等价于 $k\Gamma_G(W)/J^2$- 模范畴 (有限维 $k\Gamma_G(W)/J^2$- 模范畴).* □

下面的准备也是重要的.

引理 4.3.3. 设 G 是一个群. 如果 $k\{x,y\}$ 有一个 G- 分次结构且 x,y 是齐次元, 则 $\Lambda = k\{x,y\}/(x,y)^2$ 有无限不可分 G- 分次模的同构类.

证明. 显然, $\Lambda = k\{x,y\}/(x,y)^2 = k[x,y]/(x,y)^2$. 则 Λ 是一个局部代数. 所以 Λ 是一个不可分 Λ- 模且在同构意义下这是唯一的不可分投射 Λ- 模. 设 J_Λ 为 Λ 的 Jacobson 根. 则 $J_\Lambda^2 = 0$ 且 $J_\Lambda \cong S \oplus S$ 这里 $S = \Lambda/J_\Lambda$ 同构意义下是唯一的单 Λ- 模.

由假设, 我们知道 x,y 是齐次元. 因而 $J_\Lambda = (x)/(x,y)^2 \oplus (y)/(x,y)^2$ 是一个 G- 分次 Λ 的子模. 我们宣称每一个有限维 Λ- 模都是一个 G- 分次模. 事实上, 对任意 Λ- 模 C, 存在一个正整数 n 使得 $n\Lambda$ 是 C 的因为 Λ 是唯一的不可分投射 Λ- 模. 即, 存在一个满射 $\pi : n\Lambda \twoheadrightarrow C$ 使得 $n\Lambda/J_\Lambda n\Lambda \cong C/J_\Lambda C$. 所以，显然 $Ker(\pi) \subset J_\Lambda n\Lambda$. 因为 $J_\Lambda^2 = 0$, 所以 $J_\Lambda n\Lambda$ 是半单的. 更具体的，它是一些 $(x)/(x,y)^2$ 和 $(y)/(x,y)^2$ 拷贝的直和. 因而， $Ker\pi$ 同样是一些 $(x)/(x,y)^2$ 和 $(y)/(x,y)^2$ 拷贝的直和. 这意味 $Ker\pi$ 是一个 $n\Lambda$ 的 G- 分次子模从而 $C \cong n\Lambda/Ker\pi$ 是 G- 分次的.

由 [8] 的 110 页的例子知 Λ 有无限不可分 Λ- 模的同构类. 所以由上述宣称, 我们得到我们想要的. □

推论 4.3.4. 设 $k\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 是一个 G- 分次代数且假定 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是齐次元. 如果 $n \geq 2$, 则 $k\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}/(x_1, x_2, \ldots, x_n)^2$ 有无限不可分 G- 分次模的同构类.

证明. 注意到存在一个作为 G- 分次代数自然的满射

$$k\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}/(x_1, x_2, \ldots, x_n)^2 \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} k\{x_1, x_2\}/(x_1, x_2)^2$$

因而，通过这个代数满射 π, 我们有每一个 G- 分次 $k\{x_1, x_2\}/(x_1, x_2)^2$- 模是一个 G- 分次 $k\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}/(x_1, x_2, \ldots, x_n)^2$- 模. 所以引理 4.3.3 给出了此推论. □

定理 4.2.1 的证明: 我们只证必要性. 设 H 是一个基本 Hopf 代数且是有限表示型的. 由定理 2.3.2, 存在一个有限群 G 和一个权序 $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ 使得 $H \cong k\Gamma_G(W)/I$ 对一个 admissible 理想 I. 我们宣称 $n \leq 1$. 否则，设 $n \geq 2$. 回顾 $k\Gamma_G(W)/\sim G \cong k\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 是一个 G- 分次代数通过设定 x_i 的次为 w_i. 回顾 $\overline{I'}$ 的定义. 设 J 表示由所有箭向生成的理想. 则容易发现 $k\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}/\overline{J^2} = k\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}/(x_1, x_2, \ldots, x_n)^2$. 因而由推论 4.3.4, 我们有 $k\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}/\overline{J^2}$ 有无限不可分 G- 分次模. 由推论 4.3.2, 我们知道 $k\Gamma_G(W)/J^2$ 不是有限表示型的. 因为 $I \subset J^2$, 所以存在自然的代数同态 $k\Gamma_G(W)/I \twoheadrightarrow k\Gamma_G(W)/J^2$. 所以, $H \cong k\Gamma_G(W)/I$ 不是有限表示型的. 这是一个矛盾. 所以 $n \leq 1$.

当 $n=0$, 在 $\Gamma_G(W)$ 中没有箭向. 所以 H 半单当然是 Nakayama 的.

当 $n=1$, $\Gamma_G(W)$ 是由基本圈组成. 所以 H 是 Nakayama 的. $\square$

例 4.3.1. 设 q 是一个 n- 次本原单位根. 回顾 Taft 代数 $T_{n^2}(q)$ 是一个 Hopf 代数由 g 和 x 生成具有关系

$$g^n=1, \quad x^n=0, \quad xg=qgx$$

它的余乘法 Δ 、余单位 ε 和对极 S 分别为

$$\Delta(g)=g\otimes g, \quad \Delta(x)=1\otimes x+x\otimes g$$

$$\varepsilon(g)=1, \qquad \varepsilon(x)=0$$

$$S(g)=g^{-1}, \qquad S(x)=-xg^{-1}$$

它是一个基本 Hopf 代数 (这个事实可以由下面两个已知结论得到：$T_{n^2}(q)\cong T_{n^2}(q)^*$ 和 $T_{n^2}(q)$ 是一个点的 Hopf 代数). 我们宣称它是一个 Nakayama 代数 (此结论同样可以由 [12] 推出).

极 $T_{n^2}(q)$ 为 A. 则 $J_A=span\{g^ix^j|i=0,1,\ldots,n-1,\ j=1,2,\ldots,n-1\}$ 且 $J_A^2=span\{g^ix^j|i=0,1,\ldots,n-1,\ j=2,3,\ldots,n-1\}$. 记 A/J_A^2 为 Λ 和 A/J_A^2 的 socal 为 $Soc\Lambda$. 则容易发现 $Soc\Lambda=J_A/J_A^2=span\{g^jx+J_A^2|j=0,1,\ldots,n-1\}$. 定义一个线性同构

$$f:\ \Lambda/J_\Lambda\to Soc\Lambda \text{ 通过 } (g^i+J_A^2)+J_\Lambda\mapsto g^ix+J_A^2$$

对 $i=0,1,\ldots,n-1$. 显然，f 还是一个 Λ- 模同态. 所以作为 Λ- 模，$\Lambda/J_\Lambda\cong Soc\Lambda$. 这意味 Λ 是一个自内射代数 (见练习 12 于 [8] 的 135 页). 所以由 [8] 的命题 2.16 知 Λ 是 Nakayama 的. 我们知道一个代数 B 是 Nakayama 的当且仅当 B/J_B^2 是 Nakayama 的. 因为 $\Lambda=A/J_A^2$, 所以 $A=T_{n^2}(q)$ 是 Nakayama 的. 因而是有限表示型的.

注 4.3.5. *从表示的角度而言， Nakayama 代数是除了半单代数以外目前了解的最清楚的代数. 很多有关它的表示的性质我们都已知道. 比方说，我们可以画出它的 Auslander-Reiten quiver(见 [8]). 当一个 Nakayama 代数是基本的时候，它的 Gabriel quiver 要么是基本圈要么是线性 quiver A_m. 所以限表示型的基本 Hopf 代数的 Gabriel 和 Auslander-Reiten quiver 是清楚的.*

§4.4 第三种方法

本节我们假定 k 是一个特征 0 的代数闭域. 第三种方法是首先研究 gr$H$ 的结构并证明 H 是有限表示型当且仅当 gr$H$ 也是的. 这里 H 是一个有限维的基本

Hopf 代数.

设 H 是一个有限维 Hopf 代数且 J_H 是它的 Jacobson 根. 记 $\mathrm{gr}H$ 是它的根分次代数, 即, $\mathrm{gr}H = H/J_H \oplus J_H/J_H^2 \oplus \cdots \oplus J_H^{m-1}$ 如果 $J_H^m = 0$. 回顾一个 Hopf 代数 H 称为 **分次** 的如果 (i): 作为线性空间, $H = \oplus H(n)$; (ii): $H(i)H(j) \subset H(i+j)$; (iii) $\Delta(H(n)) \subset \Sigma_{i=0}^n H(i) \otimes H(n-i)$ 且 $S(H(n)) \subset H(n)$. 下述引理事实上是对偶于 [54] 的引理 5.2.8. 此引理将帮助我们来判断何时 $\mathrm{gr}H$ 是一个分次 Hopf 代数.

引理 4.4.1. *$grH = H/J_H \oplus J_H/J_H^2 \oplus \cdots \oplus J_H^{m-1}$ 是一个分次 Hopf 代数当且仅当 J_H 是一个 Hopf 理想.*

证明. "充分性: " 由假设, H/J_H 是一个 Hopf 代数因而 J_H 是一个 Hopf 理想.

"必要性: " 显然, 它是一个分次代数. 因为 $S(J_H^i) \subset J_H^i$ 对 $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, 所以 $S(J_H^i/J_H^{i+1}) \subset J_H^i/J_H^{i+1}$.

我们只需证它作为一个余代数是分次的即可. 因为 J_H 是一个 Hopf 理想, 所以 Δ 导出一个代数同态 $\Delta: H/J_H \to H \otimes H/(H \otimes J_H + J_H \otimes H) \cong H/J_H \otimes H/J_H$. 即, $\Delta(H/J_H) \subset H/J_H \otimes H/J_H$.

容易看到我们有线性空间的正合列 $0 \to (H \otimes J_H^2 + J_H \otimes J_H + J_H^2 \otimes H)/(J_H^2 \otimes H + H \otimes J_H^2) \to H/J_H^2 \otimes H/J_H^2 \to (H \otimes H)/(H \otimes J_H^2 + J_H \otimes J_H + J_H^2 \otimes H) \to 0$. 然而, $(H \otimes H)/(H \otimes J_H^2 + J_H \otimes J_H + J_H^2 \otimes H)$ 的一组基是 $e_i \otimes e_j$, $e_i \otimes a$, $a \otimes e_i$ 这里 $\{e_i\}$ 是 H/J_H 的一组基且 a 跑遍 J_H/J_H^2 的一组基. 这意味 $(H \otimes H)/(H \otimes J_H^2 + J_H \otimes J_H + J_H^2 \otimes H)$ 的基位于 $H/J_H \otimes H/J_H + H/J_H \otimes J_H/J_H^2 + J_H/J_H^2 \otimes H/J_H$ 中. 则显然形式 $e_i \otimes a$, $a \otimes e_i$ 的元素组成了 $H \otimes J_H + J_H \otimes H$ 在 $(H \otimes H)/(H \otimes J_H^2 + J_H \otimes J_H + J_H^2 \otimes H)$ 中的一组基. 即, $(H \otimes J_H + J_H \otimes H)/(H \otimes J_H^2 + J_H \otimes J_H + J_H^2 \otimes H)$ 的基位于 $H/J_H \otimes J_H/J_H^2 + J_H/J_H^2 \otimes H/J_H$ 中, 从而 $(H \otimes J_H + J_H \otimes H)/(H \otimes J_H^2 + J_H \otimes J_H + J_H^2 \otimes H) \cong H/J_H \otimes J_H/J_H^2 + J_H/J_H^2 \otimes H/J_H$. 所以, $\Delta(J_H/J_H^2) \subset (H \otimes J_H + J_H \otimes H)/(H \otimes J_H^2 + J_H \otimes J_H + J_H^2 \otimes H) \cong H/J_H \otimes J_H/J_H^2 + J_H/J_H^2 \otimes H/J_H$.

与 J_H/J_H^2 的情形类似, 我们可以证明对任意 $i \in \{2, \ldots, m-1\}$, $(H \otimes H)/(H \otimes J_H^i + J_H \otimes J_H^{i-1} + \cdots + J_H^i \otimes H)$ 的基位于 $H/J_H \otimes H/J_H + H/J_H \otimes J_H/J_H^2 + \cdots + H/J_H \otimes J_H^{i-1}/J_H^i + J_H/J_H^2 \otimes H/J_H + \cdots + J_H/J_H^2 \otimes J_H^{i-2}/J_H^{i-1} + \cdots + J_H^{i-1}/J_H^i \otimes H/J_H$ 中且

$$(H \otimes J_H^{i-1} + J_H \otimes J_H^{i-2} + \cdots + J_H^{i-1} \otimes H)/(H \otimes J_H^i + J_H \otimes J_H^{i-1} + \cdots + J_H^i \otimes H) \cong$$

$$H/J_H \otimes J_H^{i-1}/J_H^i + J_H/J_H^2 \otimes J_H^{i-2}/J_H^{i-1} + \cdots + J_H^{i-1}/J_H^i \otimes H/J_H$$

所以 $\Delta(J_H^{i-1}/J_H^i) \subset (H \otimes J_H^{i-1} + J_H \otimes J_H^{i-2} + \cdots + J_H^{i-1} \otimes H)/(H \otimes J_H^i + J_H \otimes J_H^{i-1} + \cdots + J_H^i \otimes H)$ 其同构于 $H/J_H \otimes J_H^{i-1}/J_H^i + J_H/J_H^2 \otimes J_H^{i-2}/J_H^{i-1} + \cdots + J_H^{i-1}/J_H^i \otimes H/J_H$.

所以 $\mathrm{gr}H$ 作为余代数也是分次的. □

回顾 Green 和 Solberg (见 [31]) 的一个结果是说基本 Hopf 代数的 Jacobson 根是一个 Hopf 理想. 所以我们有下面的推论:

推论 4.4.2. *设 H 是一个基本 Hopf 代数，则 grH 是一个分次 Hopf 代数.* □

设 H, H_0 是两个 Hopf 代数且 $\pi:\ H\to H_0$ 和 $\iota:\ H_0\to H$ 是 Hopf 同态. 假定 $\pi\iota=id_{H_0}$, 所以 π 是满的且 ι 是单的. 定义

$$R_H:=H^{co\pi}=\{h\in H|(id\otimes\pi)\Delta(h)=h\otimes 1\}$$

由定理 2.2.2 (ii),

$$H\cong R_H\times H_0\quad \text{as Hopf 代数 s}$$

这里 “$\times$” 我们称为双积或带化.

在本节的下面内容中， H 总是一个基本 Hopf 代数. 所以由上面的推论我们知道 gr$H$ 是一个分次 Hopf 代数. 显然， H/J_H =gr$H(0)$ 是 gr$H$ 的一个 Hopf 子代数且存在一个自然的 Hopf 代数满射 $\pi:$ gr$H\to H/J_H$ 且它的 retraction 就是嵌入. 我们可以应用上面的讨论. 设 $R_H=\{h\in H|(id\otimes\pi)\Delta(h)=h\otimes 1\}$, 则 gr$H$ 可以通过 R_H 和 H/J_H 以带化的形式得到:

$$\mathrm{gr}H\cong R_H\times H/J_H$$

命题 4.4.3. *设 H 是一个基本 Hopf 代数. R_H 按照上面的定义得到. 则*

(i) *R_H 和 grH 有相同的表示型;*

(ii) *R_H 是一个分次的局部的 Frobenius 代数.*

证明. (i): 由带化的定义知道作为代数 gr$H\cong R_H\#H/J_H$. 所以 (i) 是定理 3.2.5 的直接结论.

(ii): 首先我们证明 R_H 也是分次的代数. 事实上，容易看到如果 $h\in$ gr$H(n)$ 则 $h'\iota\pi S(h'')$ 也是属于 $H(n)$ 的. 另外， $R_H=\{h'\iota\pi S(h'')|h\in H\}$ (这事实已经在 [4] 中给出). 所以， R_H 是分次的且 $R_H(n)=H(n)\cap R$.

接下来，我们来证 R_H 是一个局部代数. 为此我们需证 $R_H(0)=k1$. 我们知道 $R_H(0)=R_H\cap\mathrm{gr}H(0)=R_H\cap H/J_H$. 设 $x\in R_H\cap H/J_H$, 则 $\Delta(x)=\Delta(\pi(x))=(\pi\otimes\pi)\Delta(x)=(\pi\otimes id)(id\otimes\pi)\Delta(x)=\pi(x)\otimes 1$. 所以， $x=(\varepsilon\otimes id)\Delta(x)=\varepsilon(\pi(x))1=\varepsilon(x)1$. 即， $x\in k1$ 因而 $R_H\cap H/J_H=k1$. 故 R_H 是一个局部代数.

剩下的唯一的任务就是去证 R_H 是一个 Frobenius 代数. 这个事实可以直接得到只有我们注意到任意有限维辫子 Hopf 代数都是 Frobenius 的 (见 5.6 和 Remark 5.8 于 [29]) 且 R_H 就是一个有限维的辫子 Hopf 代数. □

命题 4.4.4. *设 H 是 k 上的一个基本 Hopf 代数. 则 H 的 Ext-quiver 是一个 covering quiver $\Gamma_G(W)$ 且 R_H 的 Ext-quiver 是商图 $\Gamma_G(W)/\sim G$.*

证明. H 的 Ext-quiver 是一个 covering quiver $\Gamma_G(W)$ 事实上就是定理 2.3.2.

不失一般性，我们假定 $W=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$. 则显然商图 $\Gamma_G(W)/G$ 是由一个顶点和 n 个 loop 组成. 因为 R_H 是一个局部代数，所以它的 Ext-quiver 只有一个顶点. 所以为证 R_H 的 Ext-quiver 就是商图 $\Gamma_G(W)/G$，我们只需证 $dim_k R_H(1)=n$ 因为 $R_H(1)=J_{R_H}/J^2_{R_H}$.

由 Ext-quiver 的定义知，$dim_k(J_H/J_H^2)=|(\Gamma_G(W))_1|=n|G|$. 即，$dim_k\ \mathrm{gr}H(1)=n|G|$. 由同构 $R_H\times H/J_H\cong \mathrm{gr}H$，我们有作为线性空间 $R_H(1)\times H/J_H\cong \mathrm{gr}H(1)$. 所以 $n|G|=dim_k\ \mathrm{gr}H(1)=dim_k(R(1)\times H/J_H)=dim_k(R_H(1))dim_k(H/J_H)$. 回顾事实（见 [31] ）是说作为 Hopf 代数 $H/J_H\cong (kG)^*$. 所以 $dim_k(H/J_H)=|G|$ 从而 $dim_k R_H(1)=n$. □

有了这些准备，我们有：

定理 4.4.5. *设 H 是一个有限维基本 Hopf 代数且 $\Gamma_G(W)$ 是它的 Ext-quiver. 则 n*

(i) *grH 是有限表示型的当且仅当 R_H 也是的.*

(ii): *H 是有限表示型的当且仅当 grH 也是的.*

证明. (i) 事实上就是命题 4.4.3 的特例.

(ii) 可以由下述讨论直接得到. 因为 R_H 是一个局部代数 (命题 4.4.3 (ii))，所以它是有限表示型的当且仅当它的 Ext-quiver 由一个顶点和一个 loop 的图组成. 利用命题 4.4.4, 这意味 gr$H$ 是有限表示型的当且仅当 $|W|=0$ 或 $|W|=1$(注意到 gr$H$ 的 Ext-quiver 同 H 是相同的). 所以如果 gr$H$ 是有限表示型的，由第一种方法我们知道 H 是 Nakayama 从而是是有限表示型的. 由上述讨论，我们也知道如果 gr$H$ 不是有限表示型的，则 $|W|\geq 2$. 所以 H 也不是有限表示型的. □

定理 4.2.1 的证明： 由定理 4.4.5 的证明，我们知道 H 是有限表示型的当且仅当 $|W|=0$ 或 $|W|=1$. 由第一种方法的证明知 H 是 Nakayama 如果它是有限表示型的. □

§4.5 分类

本节我们将分类所有的有限表示型的有限维基本 Hopf 代数. 当 H 是半单时，我们有 $H=H/J_H\cong k\times k\times\cdots\times k$. 也就是说， H 是交换的. 一个经典的结果是说一个在一个代数闭域 k 上， H 是一个半单交换的有限维 Hopf 代数当且仅当 $H\cong (kG)^*$ 对某个有限群. 所以我们的主要任务是分类非半单的有限表示型的基本 Hopf 代数.

§4.5.1 与 Monomial Hopf 代数的关系

回顾一个代数称为 *monomial* 如果存在一个 quiver Γ 和一个有路生成的 admissible 理想 I 使得 $A \cong k\Gamma/I$. 一个余代数 C 称为 *comonomial* 如果 C^* 是一个 monomial 代数. 一个有限维 Hopf 代数称为 *monomial* (*comonomial*) Hopf 代数如果它作为代数 (余代数) 是 monomial (comonomial) 的. 所以，显然的是，一个有限维 Hopf 代数 H 是 monomial Hopf 代数当且仅当 H^* 是一个 comonomial Hopf 代数.

一个关键的观察是下述在 [12] （见推论 2.4 ）中已经得到的引理.

引理 4.5.1. *一个非半单 Hopf 代数是一个 monomial Hopf 代数当且仅当它是基本的和 Nakayama 的.* □

所以，联合定理 4.2.1 和这个引理，我们有：

推论 4.5.2. *设 H 是一个非半单的 Hopf 代数. 则 H 是有限表示型的基本 Hopf 代数当且仅当它是一个 monomial Hopf 代数.* □

所以，为了分类有限表示型的基本 Hopf 代数，我们只需分类分类 monomial Hopf 代数.

§4.5.2 特征 0 域上的 Monomial Hopf 代数

在 [12] 中，作者已经分类了所有的 comonomial Hopf 代数当域 k 的特征为 0 (见定理 5.9 于 [12]) 时. 让我们来回顾这个结论.

引理 4.5.3. *设 k 是一个代数闭域且特征为 0. 在下面的两个集合中有一个一一对应：*

$$\{\text{非半单 } comonomial\ Hopf\ k\text{- 代数的同构类}\}$$

和

$$\{k \text{ 上群资料的同构类}\} \quad \square$$

在上面的引理中，一个群资料 (细节见 [12]) 是一个序列 $\alpha = (G, g, \chi, \mu)$ 有下面东西组成：

(1) 一个有限群 G 和一个 G 的中心元 g ,

(2) 一个 G 的一维 k- 表示 χ ,

(3) 一个 $\mu \in k$ 使得 $\mu = 0$ 如果 $o(g) = o(\chi(g))$ 且如果 $\mu \neq 0$ 则 $\chi^{o(\chi(g))} = 1$.

注 4.5.4. 对一个群资料 $\alpha = (G, g, \chi, \mu)$ ，对应的 *comonomial Hopf* 代数 $A(\alpha)$ 已经在 *[12]* 中给出. 具体地，它作为代数是由 x 和所有的 $h \in G$ 生成，关系为

$$x^d = \mu(1 - g^d), \quad xh = \chi(h)hx, \quad \forall\, h \in G$$

这里 $d = o(\chi(g))$. 他的余乘法 Δ 、余单位 ε 和对极 S 分别定义为：

$$\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1, \quad \varepsilon(x) = 0,$$

$$\Delta(h) = h \otimes h, \quad \varepsilon(h) = 1 \quad \forall\, h \in G,$$

$$S(x) = -g^{-1}x, \quad S(h) = h^{-1}, \quad \forall\, h \in G.$$

§4.5.3 正特征域上的 Monomial Hopf 代数

因为这一小节比较长，我们将它分为更小的小节. 在整个本小节中， k 的特征总为 p. 我们说一个代数是指一个有限维具有单位的结合 k- 代数.

§4.5.3.1 预备知识

设 C 是一个余代数. 它的类群元集合定义为

$$G(C) := \{c \in C | \Delta(c) = c \otimes c,\ c \neq 0\}$$

显然， $\varepsilon(c) = 1$ 对 $c \in G(C)$. 对 $x, y \in G(C)$, 记

$$P_{x,y}(C) := \{c \in C | \Delta(c) = c \otimes x + y \otimes c\}$$

是 x, y- 本原元集合. 显然， $\varepsilon(c) = 0$ 对 $c \in P_{x,y}(C)$. 注意到 $k(x - y) \subseteq P_{x,y}(C)$. 一个元素 $c \in P_{x,y}(C)$ 是非平凡的如果 $c \notin k(x - y)$. 注意到 $G(kQ^c) = Q_0$ ，且

引理 4.5.5. *[[12] 的引理 1.1]* 对 $x, y \in Q_0$, 我们有 $P_{x,y}(C) = y(kQ_1)x \oplus k(x - y)$ 这里 $y(kQ_1)x$ 表示由所有的从 x 到 y 的箭向张成的空间. 特别的，存在非平凡的本原元当且仅当存在 x 到 y 的箭向.

我们给出 comonomial 余代数的具体定义.

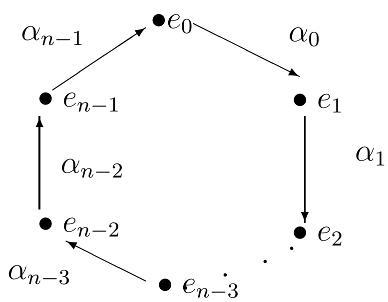
定义 4.5.1. kQ^c 的子余代数 C 称为 comonomial 的如果下面的条件是满足的：

(1) C 包含 Q 中的所以顶点和箭向；

(2) C 包含在一个子余代数 $C_d(Q) := \oplus_{i=0}^{d-1} kQ(i)$ 中对某个 $d \geq 2$, 这里 $Q(i)$ 是所有的长度为 i 的 Q 中的路；

(3) C 有一组由路形成的基.

考虑下面的 quiver:



我们记这个 quiver 为 Z_n 并称之为 长度 n 的基本圈. 记 p_i^l 为 Z_n 中以 e_i 为起点长度为 l 的路. 所以我们有 $p_i^0 = e_i$ 且 $p_i^1 = \alpha_i$.

对每一个 n- 次单位根 $q \in k$ ， Cibils 和 Rosso [15] 已经在 $kZ_n(q)$ 上定义了一种以长度分次的分次 Hopf 代数结构. 即,

$$p_i^l \cdot p_j^m = q^{jl} \begin{pmatrix} m+l \\ l \end{pmatrix}_q p_{i+j}^{l+m}$$

S 定义为将 p_i^l 映到 $(-1)^l q^{-\frac{l(l+1)}{2}-il} p_{n-l-i}^l$ 这里 $\begin{pmatrix} m+l \\ l \end{pmatrix}_q$ 是 Gauss 二项式系数. 其定义为 $\begin{pmatrix} m+l \\ l \end{pmatrix}_q := \frac{(l+m)!_q}{l!_q m!_q}$ 这里 $l!_q = 1_q \cdots l_q$ 且 $l_q = 1 + q + \cdots + q^{l-1}$.

为了简便，我们记 $C_d(Z_n)$ 为 $C_d(n)$. 即， $C_d(n)$ 是 kZ_n^c 的有所有路长严格小于 d 的路组成的子余代数.

显然，如果 $\begin{pmatrix} m+l \\ l \end{pmatrix}_q = 0$ 对所有的 $0 < m, l < d$ 和 $m + l \geq d$, 则 $C_d(n)$ 是一个分次子 Hopf 代数.

例 4.5.1. 设 q 是一个 d_0- 次本原单位根且 $d_0 | n$. 假定 $q \in k$. 在下一小节中 (命题 4.5.10), 我们将证明 $d = p^t d_0$ 对某个非负整数 t, 则 $\begin{pmatrix} d \\ l \end{pmatrix}_q = 0$ 对所有 $0 < l < d$.

由 Gauss 二项式系数的一个标准等式 (见 [37]), 即,

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q$$

我们有 $\binom{m+l}{l}_q = 0$ 对所有的 $0 < m, l < d$ 和 $m + l \geq d$. 则由上面的讨论知, $C_{p^t d_0}(n)$ 是 $kZ_n(q)$ 的一个分次子 Hopf 代数. 我们记这个 Hopf 代数为 $C(d_0, t, n, q)$.

下面的结果 ([12] 的引理 2.3) 给出了 $C_d(n)$ 的重要性.

引理 4.5.6. *设 A 是一个不可分 comonomial 余代数. 则 A 是 coFrobenius 的 (即, A^* 是 Frobenius) 当且仅当 $A = k$ 或 $A \cong C_d(n)$ 对某个 n 和 d 且 $d \geq 2$.*

下面的引理 ([12] , 引理 3.3) 是需要的.

引理 4.5.7. *假定在 $C_d(n)$ 上有一个 Hopf 代数结构. 则在 Hopf 代数同构意义下我们有*

$$p_i^l \cdot p_j^m \equiv q^{jl} \binom{m+l}{l}_q p_{i+j}^{l+m} \quad (mod\ C_{l+m}(n))$$

对 $0 \leq i, j \leq n-1$ 和 $l, m \leq d-1$. 这里 $q \in k$ 是一个 n- 次单位根.

§4.5.3.2 $C_d(n)$ 上的 Hopf 结构和 Andruskiewitsch – Schneider 猜想

本节的目的是给出 $C_d(n)$ 上具有 Hopf 结构的一个等价条件 (定理 4.5.11) , 并分类所有的在 $C_d(n)$ 上的分次 Hopf 结构. 最后, 我们构造 $C_d(n)$ 的一个 Hopf 代数滤子. 这将有助于我们讨论由 Andruskiewitsch 和 Schneider 提出的一个猜想.

由 Gauss 二项式系数的定义的直接分析, 我们有

引理 4.5.8. *设 q 是一个 d_0- 次本原单位根. 则 $\binom{m+l}{l}_q = 0$ 当且仅当*

$$\left[\frac{m+l}{d_0}\right] + \left[\frac{m+l}{pd_0}\right] + \left[\frac{m+l}{p^2 d_0}\right] + \cdots + \left[\frac{m+l}{p^i d_0}\right] + \cdots$$
$$-(\left[\frac{m}{d_0}\right] + \left[\frac{m}{pd_0}\right] + \left[\frac{m}{p^2 d_0}\right] + \cdots + \left[\frac{m}{p^i d_0}\right] + \cdots)$$

$$-(\left[\frac{l}{d_0}\right]+\left[\frac{l}{pd_0}\right]+\left[\frac{l}{p^2d_0}\right]+\cdots+\left[\frac{l}{p^id_0}\right]+\cdots)>0$$

引理 4.5.9. 设 $m>1$ 是一个正整数. 则

$$[m]+\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{p^i}\right]+\cdots$$
$$-([n]+\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^i}\right]+\cdots)$$
$$-([m-n]+\left[\frac{m-n}{p}\right]+\left[\frac{m-n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{m-n}{p^i}\right]+\cdots)>0$$

对所有的 $0<n<m$ 当且仅当 $m=p^t$ 对某个 $t\geq 1$.

证明. 为了简便，我们记

$$[m]+\left[\frac{m}{p}\right]+\left[\frac{m}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{m}{p^i}\right]+\cdots$$
$$-([n]+\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^i}\right]+\cdots)$$
$$-([m-n]+\left[\frac{m-n}{p}\right]+\left[\frac{m-n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{m-n}{p^i}\right]+\cdots)$$

为 $I_{m,n}$.

"充分性：" 显然，对所有的 $i\in N$ ， $\left[\frac{m}{p^i}\right]-\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{m-n}{p^i}\right]\geq 0$. 所以，为了证此，我们只需发现一个 $j\in N$ 使得 $\left[\frac{m}{p^j}\right]-\left[\frac{n}{p^j}\right]-\left[\frac{m-n}{p^j}\right]>0$. 事实上，设 $j=t$ 我们有 $1=\left[\frac{p^t}{p^t}\right]>\left[\frac{n}{p^t}\right]+\left[\frac{m-n}{p^t}\right]=0$ 对所有的 $0<n<m$. 这样，我们证明了充分性.

"必要性：" 显然， $p\leq m$. 首先，我们宣称 $p|m$. 否则假定 $m=kp+r$ 且 $k\geq 1, 0<r<p$. 设 $n=kp$, 则容易看到 $I_{m,n}=0$. 这是与假设矛盾的.

所有一般的设 $m=p^r(a_lp^l+\cdots+a_1p+a_0)$ 这里 $r\geq 1$ 且 $a_i<p$ 对 $i=1,2,\ldots,l$. 设 $n=a_0p^r$ ，则 $m-n=p^r(a_lp^l+\cdots+a_1p)$. 则对任意的 $0\leq j\leq r$, 我们有 $\left[\frac{m}{p^j}\right]=p^{r-j}(a_lp^l+\cdots+a_1p+a_0)$, $\left[\frac{m-n}{p^j}\right]=p^{r-j}(a_lp^l+\cdots+a_1p)$ 且 $\left[\frac{n}{p^j}\right]=a_0p^{r-j}$. 这意味 $\left[\frac{m}{p^j}\right]=\left[\frac{m-n}{p^j}\right]+\left[\frac{n}{p^j}\right]$ 对 $j\leq r$. 如果 $j>r$, 则 $m=p^j(a_lp^{l-(j-r)}+\cdots+a_{j-r})+a_{j-r-1}p^{j-1}+\cdots+a_0p^r$. 但是，$a_{j-r-1}p^{j-1}+\cdots+a_0p^r\leq(p-1)p^{j-1}+\cdots+(p-1)p^r=p^j-p^r<p^j$. 所以 $\left[\frac{m}{p^j}\right]=a_lp^{l-(j-r)}+\cdots+a_{j-r}$, $\left[\frac{m-n}{p^j}\right]=a_lp^{l-(j-r)}+\cdots+a_{j-r}$ 且 $\left[\frac{n}{p^j}\right]=0$. 这意味 $\left[\frac{m}{p^j}\right]=\left[\frac{m-n}{p^j}\right]+\left[\frac{n}{p^j}\right]$ 对 $j>r$. 综合这些讨论，我们有 $\left[\frac{m}{p^j}\right]=\left[\frac{n}{p^j}\right]+\left[\frac{m-n}{p^j}\right]$ 对所有的 j 从而 $I_{m,n}=0$. 这与假设矛盾. 所以，我们知道

$a_0 = 0$ 或对所有的 $2 \le i \le l$ ， $a_i = 0$. 我们宣称只有一个 i 使得 $a_i \neq 0$. 事实上, 如果 $a_0 \neq 0$, 则上述讨论保证对所有的 $2 \le i \le l$ ， $a_i = 0$. 如果 $a_0 = 0$, 则重复上面的讨论，我们得到 $a_1 = 0$ 或 $a_i = 0$ 对所有的 $l \le i \le 2$. 所以，最终我们有唯一一个 a_i 使得 $m = a_i p^{r+i}$.

如果 $a_i > 1$, 则我们能记 $a_i = l_1 + l_2$ 使得 $l_1 l_2 \neq 0$. 设 $n = l_1 p^{r+i}$, 则容易发现 $I_{m,n} = 0$. 这与假设矛盾. 所以， $m = p^{r+i}$. □

有了这些准备，我们可以得到下面的重要结论.

命题 4.5.10. 设 $q \in k$ 是一个 d_0- 次本原单位根. 则 $\begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix}_q = 0$ 对所有的 $0 < n < d$ 当且仅当 $d = p^r d_0$ 对某个 r.

证明. 为了简便，记

$$\left[\frac{m}{d_0}\right] + \left[\frac{m}{pd_0}\right] + \left[\frac{m}{p^2 d_0}\right] + \cdots + \left[\frac{m}{p^i d_0}\right] + \cdots$$

$$-(\left[\frac{n}{d_0}\right] + \left[\frac{n}{pd_0}\right] + \left[\frac{n}{p^2 d_0}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^i d_0}\right] + \cdots)$$

$$-(\left[\frac{m-n}{d_0}\right] + \left[\frac{m-n}{pd_0}\right] + \left[\frac{m-n}{p^2 d_0}\right] + \cdots + \left[\frac{m-n}{p^i d_0}\right] + \cdots)$$

为 $I_{m,n,q}$.

“充分性：” 类似于引理 4.5.9 的证明, 我们有 $1 = \left[\frac{p^r d_0}{p^r d_0}\right] > \left[\frac{n}{p^r d_0}\right] + \left[\frac{p^r d_0 - n}{p^t}\right] = 0$ 对所有的 $0 < n < p^r d_0$. 即， $I_{d,n,q} = 0$ 对所有的 $n < d$ 从而根据引理 4.5.8 $\begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix}_q = 0$ 对所有的 $0 < n < d$.

“必要性： ” 显然， $d \ge d_0$. 我们宣称 $d_0 | d$. 如果不是，我们有 $d = kd_0 + r$ 使得 $k \ge 1$, $0 < r < d_0$. 设 $n = kd_0$, 则易见 $I_{d,n,q} = 0$ 从而由引理 4.5.8, $\begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix}_q \neq 0$. 这与假设矛盾.

所以，我们有 $\frac{d}{d_0}$ 是一个正整数并记之为 m. 如果 $m = 1$, 则 $d = p^0 d_0$. 如果 $m > 1$, 则引理 4.5.8 和引理 4.5.9 保证 $m = p^r$ 从而 $d = md_0 = p^r d_0$ 对某个 $r \ge 1$. 故， $d = p^r d_0$ 对某个 $r \ge 0$. □

定理 4.5.11. $C_d(n)$ 上具有 *Hopf* 代数结构当且仅当存在两个自然数 $d_0 | n$ 、 $r \ge 0$ 和一个 d_0 次的本原单位根 $q \in k$ 使得 $d = p^r d_0$.

证明. “充分性：”由命题 4.5.10, $\begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix}_q = 0$ 对所有的 $0 < n < d$. 所以例 4.5.1 蕴含了充分性.

“必要性：”如果 $C_d(n)$ 有一个 Hopf 结构，则引理 4.5.7 意味存在一个 n- 次单位根 $q \in k$ 使得

$$p_i^l \cdot p_j^m \equiv q^{jl} \begin{pmatrix} m+l \\ l \end{pmatrix}_q p_{i+j}^{l+m} \quad (\mathrm{mod}\ C_{l+m}(n))$$

我们不妨假定 q 是一个 d_0- 次本原单位根. 由于 $C_d(n)$ 中所有路的长度小于 d，所有 $\begin{pmatrix} m+l \\ l \end{pmatrix}_q = 0$ 对所有的 $0 < l, m < d$ 和 $m + l \geq d$. 特别的，$\begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix}_q = 0$ 对所有的 $0 < n < d$. 从而由命题 4.5.10, 我们有 $d = p^r d_0$ 对某个 $r \geq 0$. □

定理 4.5.12. *$C_d(n)$ 上的任意以长度分次的分次 Hopf结构都同构于某个 $C(d_0, t, n, q)$. 这里 $C(d_0, t, n, q)$ 在例 4.5.1 中给出.*

证明. 由引理 4.5.7 和定理 4.5.11 的证明，我们知道任意以长度分次的分次 Hopf 结构同构于 $C(d_0, t, n, q)$，这里 $d_0|n$ 、 $r \geq 0$ 、 $q \in k$ 是一个 d_0 次的本原单位根且 $d = p^r d_0$. □

下面的例子将告诉我们在 $C_d(n)$ 上确实存在非分次的 Hopf 结构.

例 4.5.2. 我们在 $C_{pd_0}(n)$ 给一个非分次的 Hopf 代数结构. 设 $q \in k$ 是一个 d_0- 次本原单位根且 $d_0|n$. 我们同样记 p_i^l 为 Z_n 中以 e_i 为起点长度为 l 的路. 定义：对 $s_1 d_0 + r_1 < pd_0$ 和 $s_2 d_0 + r_2 < pd_0$,

$$p_i^{s_1 d_0 + r_1} p_j^{s_2 d_0 + r_2} = 0 \ \text{ if } \ r_1 + r_2 \geq d_0$$

且

$$p_i^{s_1 d_0 + r_1} p_j^{s_2 d_0 + r_2} = q^{r_1 j} \begin{pmatrix} (s_1+s_2)d_0 + r_1 + r_2 \\ s_1 d_0 + r_1 \end{pmatrix}_q p_{i+j}^{(s_1+s_2)d_0 + r_1 + r_2}$$

如果 $r_1 + r_2 < d_0$ 且 $(s_1 + s_2)d_0 + r_1 + r_2 < pd_0$
且

$$p_i^{s_1 d_0 + r_1} p_j^{s_2 d_0 + r_2} = q^{r_1 j} \frac{((d_0)!_q)^p ((s_1+s_2)d_0 + r_1 + r_2)!_q}{(s_1 d_0 + r_1)!_q (s_2 d_0 + r_2)!_q} (p_{i+j}^{(s_1+s_2-p)d_0 + r_1 + r_2} - p_{i+j+pd_0}^{(s_1+s_2-p)d_0 + r_1 + r_2})$$

如果 $r_1+r_2<d_0$ 且 $(s_1+s_2)d_0+r_1+r_2\geq pd_0$. 对极定义为

$$S(p_i^l):=(-1)^l q^{-\frac{l(l+1)}{2}-il}p_{n-l-i}^l$$

对 $l\leq pd_0$. 这确实是一个 Hopf 代数. 它的单位元是 $p_0^0=e_0$. 注意到它不是长度分次的. 我们可以发现，它作为代数是由 p_1^0, p_0^1 和 $p_0^{d_0}$ 生成. 一个优点是我们有一组自然的基. 我们同样可以通过生成元和关系来得到这个 Hopf 代数.

设 n, d_0, p, q 如上. 我们来定义 $A(n,d_0,p,q)$. 它作为代数由 g,x,y 生成，关系为

$$g^n=1,\ \ x^{d_0}=0,\ \ y^p=1-g^{pd_0},\ \ xg=qgx,\ \ yg=gy,\ \ yx=xy$$

它的余乘法 Δ 、余单位 ε 和对极分别定义为

$$\Delta(g)=g\otimes g,\ \ \Delta(x)=x\otimes 1+g\otimes x,\ \ \Delta(y)=y\otimes 1+g^{d_0}\otimes y+\Sigma_{i=1}^{d_0-1}\frac{1}{(d_0-i)!_q(i)!_q}g^i x^{d_0-i}\otimes x^i$$

$$\varepsilon(g)=1,\ \ \varepsilon(x)=\varepsilon(y)=0$$

$$S(g)=g^{n-1},\ \ S(x)=-g^{n-1}x,\ \ S(y)=-g^{n-d_0}y$$

通过复杂但直接的计算知道 $A(n,d_0,p,q)$ 是一个 Hopf 代数. 我们可以证明作为 Hopf 代数， $A(n,d_0,p,q)\cong C_{pd_0}(n)$ 通过 $g\mapsto p_1^0$, $x\mapsto p_0^1$ and $y\mapsto p_0^{d_0}$.

设 $q\in k$ 是一个 d_0- 次的本原单位根且 $d_0|n$, 则定理 4.5.11 蕴含着对任意 $C_{p^t d_0}(n)$, 我们有一个 Hopf 代数的滤子

$$C_{d_0}(n)\subsetneq C_{pd_0}(n)\subsetneq C_{p^2d_0}(n)\subsetneq\cdots\subsetneq C_{p^td_0}(n)\quad(*)$$

注意到，如果 $d_0=1$, $C_1(n)$ 不是一个 comonomial 余代数因为它没有任何的箭向. 但它是一个 Hopf 代数且显然同构于一个群代数.

如果 $d_0\geq 2$, 则 $C_{d_0}(n)$ 包含所有的顶点和箭向. 由引理 4.5.5, 所有 $kZ_n(q)$ 的类群元和本原元都位于 $C_{d_0}(n)$ 中. 从而，任意长度不小于 d_0 的路 β 肯定无法由类群元和本原元生成因为 $\beta\notin C_{d_0}(n)$. 从而，如果 $d_0\geq 2$, 则对任意 $t\geq 1$，我们知道 $C_{p^td_0}$ 不能由类群元和本原元生成. 这为我们对下述的 Andruskiewitsch-Schneider 猜想（见 [4] ）提供了很多反例如果域 k 的特征是正的话.

Andruskiewitsch-Schneider 猜想 设 H 是一个位于特征 0 代数闭域上有限维的点的 Hopf 代数，则它由类群元和本原元生成.

当域 k 的特征为 0 时，上面的 Hopf 代数滤子 $(*)$ 是不会出现的. 事实上，在 [12] 作者已经证明了 $d=d_0$, 即， $C_d(n)=C_{d_0}(n)$. 所以，在这种情形下. 我们我们

并不能否定上面的猜想因为 $C_{d_0}(n)$ 确实是由类群元和本原元生成（见 [12]，定理 3.6 ）.

§4.5.3.3 Monomial Hopf 代数

本节的注意目的是讨论 comonomial Hopf 代数的结构. 我们首先证明一个类似于 [12] 的定理 5.1 的结论.

.

引理 4.5.13. 设 C 是一个 *comonomial* 余代数. 则 C 具有 *Hopf* 代数结构当且仅当它作为一个余代数有 $C \cong k \oplus \cdots \oplus k$ 或

$$C \cong C_d(n) \oplus \cdots \oplus C_d(n)$$

，这里存在一个 d_0- 次本原单位根使得 $d_0|n$ 且 $d = p^r d_0 \geq 2$.

它的证明类似于 [12] 的定理 5.1 的证明. 为了完整，我们将其写出.

证明. "充分性： " 由假设，我们有，作为一个余代数， $C = C_1 \oplus \cdots \oplus C_l$ 这里 $C_i \cong C_1$ 对所有的 $1 \leq i \leq l$ 且由定理 4.5.11, 我们知道 C_1 具有一个 Hopf 结构 H_1. 则 $H_1 \otimes kG$ 是 C 的一个 Hopf 结构这里 G 是一个任意阶为 l 的群. 我们证明了充分性.

"必要性： " 设 C 是一个 comonomial 余代数并假定其上具有 Hopf 结构. 因为一个有限维的 Hopf 代数是 coFrobenius 的, 所以从引理 4.5.6 我们知道作为余代数 C 具有形式 $C = C_1 \oplus \cdots \oplus C_l$ 这里每一个 C_i 作为余代数是不可分的，且 $C_i = k$ 或 $C_i = C_{d_i}(n_i)$ 对某个 n_i 和 $d_i \geq 2$.

我们宣称如果由一个 $C_i = k$, 则所有的 $C_j = k$. 事实上，否则的话，设 $C_j = C_d(n)$ 对某个 j. 设 α 是 C_j 从 x 到 y 的箭向. 设 h 是 $C_i = k$ 中的唯一的类群元. 因为 C 的类群元集是一个群，所以存在 $g \in G(C)$ 使得 $h = gx$. 则 $g\alpha$ 是 C 的 h, gy- 本原元. 但是根据余代数分解 $C = C_1 \oplus \cdots \oplus C_l$ ， C 没有 h, gy- 本原元. 这是一个矛盾. .

所以，由上面的宣称知如果 $C \neq k \oplus \cdots \oplus k$, 则 C 作为余代数具有下面的形式

$$C = C_{d_1}(n_1) \oplus \cdots \oplus C_{d_l}(n_l)$$

且每个 $d_i \geq 2$. 假定单位元包含在 $C_1 = C_{d_1}(n_1)$ 中. 从 Montgomery 的一个结果知道 ([56] 的定理 3.2) C_1 是 C 的一个子 Hopf 代数且

$$g_i^{-1} C_{d_i}(n_i) = C_{d_i}(n_i) g_i^{-1} = C_{d_1}(n_1)$$

对任意 $g_i \in G(C_{d_i}(n_i))$ 和每个 i. 通过比较 $C_{d_i}(n_i)$ 和 $C_{d_1}(n_1)$ 中的类群元的个数我们由 $n_i = n_1 = n$ 对每个 i. 在比较维数我们看到 $d_i = d_1 = d$ 对每个 i. 现在因为 $C_1 = C_d(n)$ 是一个 Hopf 代数，所有由定理 4.5.11 存在一个 d_0- 次本原单位根使得 $d_0|n$ 且 $d = p^r d_0 \geq 2$. □

定理 4.5.14. 设 H 是一个非半单的 *comonomial Hopf* 代数. 则存在一个 d_0- 次本原单位根使得 $d_0|n$ 且 $d = p^r d_0 \geq 2$. 还使得作为余代数

$$H \cong C_d(n) \oplus \cdots \oplus C_d(n)$$

且作为 *Hopf* 代数

$$H \cong C_d(n) \#_\sigma k(G/N)$$

这里 $G = G(H)$ *and* $N = G(C_d(n))$.

证明. 由 [56] 的定理 3.2 和引理 4.5.13，我们直接得到我们的结论. □

§4.5.3.4 分类

总结上面的结论，我们有下面的有限表示型基本 Hopf 代数的分类定理.

定理 4.5.15. (A) 设 H 是一个有限表示型的有限维基本 *Hopf* 代数. 则

(A.1) 如果 H 是半单的，则存在一个有限群 G 使得 $H \cong (kG)^*$;

(A.2) 如果 H 不是半单的且域 k 的特征为 *0* 的话，则存在一个群资料 $\alpha = (G, g, \chi, \mu)$ 使得 $H^* \cong A(\alpha)$. 这里 $A(\alpha)$ 的定义在注 *4.5.4* 中;

(A.3) 如果 H 不是半单的且域 k 的特征为 p 的话，则存在两个自然数 $d_0|n$ 、$r \geq 0$ 和一个 d_0 次的本原单位根 $q \in k$ 使得作为余代数

$$H^* \cong C_d(n) \oplus \cdots \oplus C_d(n)$$

这里 $d = p^r d_0 \geq 2$. 并且作为 *Hopf* 代数

$$H^* \cong C_d(n) \#_\sigma k(G/N)$$

这里 $G = G(H)$ 、 $N = G(C_d(n))$.

(B) 设 H 是一个有限维的 *Hopf* 代数. 如果

(B.1) 存在一个有限群 G 使得 $H \cong (kG)^*$ 或

(B.2) 存在一个群资料 $\alpha = (G, g, \chi, \mu)$ 使得 $H^* \cong A(\alpha)$ 或

(B.3) 作为余代数 $H^* \cong C_d(n) \oplus \cdots \oplus C_d(n)$

则 H 是一个有限表示型的有限维基本 *Hopf* 代数.

证明. (A.1) 已经在本节的第一段中解释过. 由引理 4.5.3 和定理 4.5.14, (A.2) 和 (A.3) 可以直接得到只要我们注意到 H^* 是一个 comonomial Hopf 代数.

因为 $(kG)^*$ 是半单的且是基本的, 所以 (B.1) 意味 H 是一个有限表示型的基本 Hopf 代数.

由引理 4.5.3 和注 4.5.4, 我们知道 $A(\alpha)$ 是一个 comonomial Hopf 代数从而 (B.2) 意味 H 是一个 monomial Hopf 代数. 故, 由推论 4.5.2, H 有限表示型的基本 Hopf 代数.

已经知道 $C_d(n)$ 是一个 comonomial 余代数 (见 [12]). 从此事实我们知道 (B.3) 意味 H^* 是一个 comonomial Hopf 代数从而 H 是一个 monomial Hopf 代数. 即, H 是一个有限表示型的基本 Hopf 代数. □

注 4.5.16. *(1) 为了不造成混淆, 我们引入了 comonomial Hopf 代数的概念. 注意到在 [12] 中, 我们定义的 comonomial Hopf 代数也被称为 monomial Hopf 代数.*

(2) *定理 4.5.15 的 (A) 部分给出的是有限维有限表示型基本 Hopf 代数的结构. 在某种意义下定理 4.5.15 的部分 (B) 是部分 (A) 的逆因为部分 (B) 是说 Part (A) 所给的 Hopf 代数恰是所有的有限维有限表示型的基本 Hopf 代数.*

第五章　Tame 型的基本 Hopf 代数

本章我们假定 k 是一个特征 0 的代数闭域. 本章的主要目的就是给出 tame 分次基本 Hopf 代数的结构定理.

§5.1　Tame 局部分次 Frobenius 代数的一个完整列表

本节的主要结论是下面的定理.

定理 5.1.1. *设 Λ 是一个 tame 局部分次的 Frobenius 代数. 则 $\Lambda \cong k<x,y>/I$ 这里 I 是下述形式之一:*

(1) $I=(x^2-y^2,\ yx-ax^2,\ xy)$　对 $0\neq a\in k$;

(2) $I=(x^2,\ y^2,\ (xy)^m-a(yx)^m)$　对 $0\neq a\in k$ 和 $m\geq 1$;

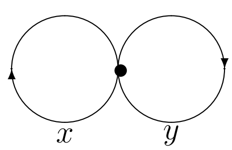
(3) $I=(x^n-y^n,\ xy,\ yx)$　对 $n\geq 2$;

(4) $I=(x^2,\ y^2,\ (xy)^m x-(yx)^m y)$　对 $m\geq 1$;

(5) $I=(yx-x^2,\ y^2)$

我们想证明定理 5.1.1. 当然我们必须先给出某些预备知识. 容易发现一个有限维的局部代数是 Frobenius 当且仅当它的 socle 的维数为 1. 本节中, Λ 总是表示一个有限维的局部 Frobenius 代数且 J_Λ 表示它的 Jacobson 根.

任意 tame 局部代数 A 必然是下述形式的 quiver :



我们记这个 quiver 为 Q. 由 Gabriel 定理 (见定理 2.1.1), 我们知道 $A\cong k<x,y>/I$ 对某个理想 $J^2\subseteq I\subseteq J^N$ 这里 J 是由 x,y 生成的 $k<x,y>$ 的理想且 $N\geq 2$. 因此, $dim_k A\geq 4$ 且这里有一个自然的滤子在 A 上. 对应这个滤子, 我们记相应的分次代数为 gr$A$. 我们说 A 是 *分次* 的如果 $A\cong$gr$A$.

为了方便, 我们记 x,y 在 A 的像仍为 x,y.

引理 5.1.2. *设 $\Lambda=kQ/I$ 是一个局部分次 Frobenius 代数使得 J_Λ^2 由 x^2 和 y^2 生成. 则 $xy=0$ 当且仅当 $I=(x^2-y^2,\ yx-ax^2,xy)$ 对 $0\neq a\in k$ 或 $xy=yx=0$.*

证明. 只需证必要性. 由假设, 我们有 Λ 由 $1,x,x^2,\cdots,y,y^2,\cdots$ 张成. 我们可以写 $yx=x^c w+y^d z$ 这里 w,z 是可逆的且 $w\in k[x],\ z\in k[y],\ c,d\geq 2$. 则 $0=xyx=x^{c+1}w$ 从而 $x^{c+1}=0$. 因为 $x^c y=0$, 所以 $x^c\in soc\Lambda$. 进一步的, $0=yxy=y^{d+1}z$

因而我们得到 $y^{d+1}=0$. 因为 $xy^d=0$, 所以 $y^d\in soc\Lambda$. 这说明 $yx\in soc\Lambda$ 因为 $soc\Lambda$ 是 Λ 的理想.

因为 $yx\neq 0$ ，所以 x^c 和 y^d 中至少有一个不为 0. 不失一般性，设 $y^d\neq 0$. 因为 Λ 是 Frobenius 的，所以 $dim_k soc\Lambda=1$. 从而 $x^c=by^d$ 对 $b\in k$. 如果 $b=0$, 则 $x^c=0$ 且 $x^{c-1}\in soc\Lambda$. 这意味存在一个正整数 i 使得 $0\neq x^i\in soc\Lambda$. 再次利用 $soc\Lambda$ 的维数为 1, 我们有 $x^i=b'y^d$ 对 $0\neq b'\in k$. 设 $y'=\sqrt[d]{b'}y$ ，则 $x^i=y'^d$. 因为 $y'x\neq 0$ 且 $dim_k soc\Lambda=1$, 所以 $y'x=ax^i$ 对 $0\neq a\in k$. 因为 Λ 是一个分次代数，我们知道 $i=2$ 且 $d=2$. 即，存在一个满射： $kQ/(x^2-y'^2,\ y'x-ax^2,xy')\twoheadrightarrow\Lambda$. 因为 $dim_k kQ/(x^2-y'^2,\ y'x-ax^2,xy')=4$, 所以 $\Lambda\cong kQ/(x^2-y'^2,\ y'x-ax^2,xy')$. □

引理 5.1.3. *假定 Λ 是一个 4 维的局部分次 Frobenius 代数. 则 Λ 同构于下面的某一个代数：*

(1) $kQ/(x^2-y^2,\ yx-ax^2,xy)$ 对 $0\neq a\in k$

(2) $kQ/(x^2,\ y^2,\ xy-ayx)$ 对 $0\neq a\in k$.

证明. 设 $x,\ y$ 是 J_Λ 的生成元. 因为 $dim_k\Lambda=4$ 且 Λ 是 Frobenius 的，所以 xy 和 yx 属于 Λ 的 socle.

(I): 假定 $xy=0$. 如果 $yx\neq 0$, 则 $y^2\neq 0$ 且 $x^2\neq 0$ 因为 $dim_k\Lambda=1$. 从而由引理 5.1.2, $\Lambda\cong kQ/(x^2-y^2,\ yx-ax^2,xy)$ 对 $0\neq a\in k$.

如果 $yx=0$. 在这种情形，我们知道 $x^2=ay^2$ 对 $0\neq a\in k$. 设 $u\in k$ 且 $u^2=-a$, 则 $X=x+uy$, $Y=x-uy$ 是生成元且 $X^2=Y^2=x^2+u^2y^2=x^2-ay^2=0$ 和 $XY=YX=x^2-u^2y^2=x^2+ay^2$. 从而，$\Lambda\cong k<X,Y>/(X^2,\ Y^2,\ XY-YX)$. 这是 (2) 的一个特例.

(II): 假定 $xy\neq 0\neq yx$. 则 $xy=cyx$ 对 $0\neq c\in k$. 由 $dim_k soc\Lambda=1$, 我们有 $x^2=axy$ 且 $y^2=bxy$. 如果 $a=b=0$, 则 $\Lambda\cong kQ/(x^2,\ y^2,\ xy-cyx)$. 否则，不失一般性，假定 $a\neq 0$. 设 $Y=x-ay$, 则 $xY=0$. 这样，我们又有情形 (I). □

引理 5.1.4. *设 Λ 是一个局部分次 Frobenius 代数. 则*

(i) 如果 Λ 是 tame 的则 $dim_k J_\Lambda^2/J_\Lambda^3\leq 2$.

(ii) 如果 $dim_k J_\Lambda^2/J_\Lambda^3\leq 1$ 则 $dim_k\Lambda=4$ 或 Λ 是一个定理 5.1.1 (3) 中的代数.

.

证明. (i) 如果 $dim_k J_\Lambda^2/J_\Lambda^3\geq 3$, 则存在一个同态像是 wild 的 (见 [69] 的 (2.1)). 这意味 Λ 是 wild 的，这与假设 Λ 是 tame 的矛盾.

(ii) 假定 $dim_k J_\Lambda^2/J_\Lambda^3\leq 1$. 则其维数必然为，因为否则 x,y 将位于 $soc\Lambda$ 中从而 $soc\Lambda$ 不再是单的. 所以 $x^2,\ y^2,\ xy,\ yx$ 它们不能同时为 0.

情形 (1): 或 $x^2\neq 0$ 或 $y^2\neq 0$. 不失一般性，假定 $x^2\neq 0$. 从而 $xy=ax^2$, $yx=bx^2$ 且 $y^2=cx^2$ 对 $a,b,c\in k$ 因为 Λ 是分次的且 $dim_k J_\Lambda^2/J_\Lambda^3=1$.

如果 $x^3 \neq 0$, 则 $xyx = ax^3 = bx^3$ 从而 $a = b$. 这意味 $xy = yx$. 即说 Λ 是交换的从而 Λ 是对称代数. 由 K.Erdmann 的一个结果 (见 [23] 的引理 III.4), 我们知 $dim_k\Lambda = 4$ 或 $\Lambda \cong kQ/(x^m - y^n,\ xy,\ yx)$. 因为 Λ 是分次的，所以 $m = n$.

如果 $x^3 = 0$, 则 $x^2y = ax^3 = xyx = 0$, $y^2x = cx^3 = xy^2 = 0$, $yx^2 = bx^3 = 0$, $yxy = bx^2y = bx(xy) = abx^3 = 0$, $y^3 = cx^2y = cax^3 = 0$. 即是说 $J_\Lambda^3 = 0$ 从而 $dim_kJ_\Lambda^2 = 1$. 故， $dim_k\Lambda = 4$.

情形 (2): 假定 $x^2 = 0 = y^2$. 我们宣称 $xy \neq 0 \neq yx$. 否则 x 或 y 将属于 $soc\Lambda$ 从而 $dim_k soc\Lambda > 1$. 这是不可能的因为 Λ 是 Frobenius 的. 故， $xy = ayx$ 对 $0 \neq a \in k$ 从而 $dim_k\Lambda = 4$. □

下面的引理由 K.Erdmann 在 [23] (84 页) 给出.

引理 5.1.5. *设 A 是一个维数为 5 的 tame 局部代数. 设其 quiver 为 Q. 则 $\Lambda \cong kQ/L$ 这里 L 是下述理想的某一个：*

(1) $(xy,\ yx)$

(2) $(yx - x^2,\ xy)$

(3) $(yx - x^2,\ xy - ay^2)$ *这里 $a \in k$ 且 $0 \neq a \neq 1$*

(4) $(x^2,\ y^2)$

(5) $(yx - x^2,\ y^2)$ □

引理 5.1.6. *设 Λ 是一个局部分次 Frobenius 代数使得 xy 和 yx 位于 J_Λ^3. 则 $\Lambda \cong kQ/(x^n - y^n,\ xy,\ yx)$ 对某个正整数 n.*

证明. 由假设， xy 和 yx 属于 J_Λ^3. 因为 Λ 是一个分次代数，所以 $xy = yx = 0$. 因为 Λ 是有限维代数，所以存在正整数 m_x 和 m_y 使得 $x^{m_x} = y^{m_y} = 0$ 和 $x^{m_x-1} \neq 0 \neq y^{m_y-1}$. 从而， $x^{m_x-1},\ y^{m_y-1} \in soc\Lambda$. 所以 $x^{m_x-1} = cy^{m_y-1}$ 对 $c \neq 0$. 设 $y' = \sqrt[m_y-1]{c}y$, 则 $x^{m_x-1} = y'^{m_y-1}$. 由 Λ 是一个分次代数，我们有 $m_x - 1 = m_y - 1$. 这意味我们得到了我们想要的. □

引理 5.1.7. *设 Λ 是一个局部分次 Frobenius 代数使得 $yx - x^2$ 和 xy 位于 J_Λ^3. 则 $\Lambda \cong kQ/(x^2 - y^2,\ yx - ax^2,\ xy)$ 对 $0 \neq a \in k$.*

证明. 宣称： J_Λ 没有生成元 x', y' 使得 $(x'y')$ 和 $(y'x')$ 位于 J_Λ^3 中. 这个宣称已经在 [23] (见 [23] 的引理 III.7) 被证明.

由假定， $yx - x^2,\ xy \in J_\Lambda^3$. 因为 Λ 是分次，我们有 $yx = x^2$ 和 $xy = 0$. 我们知道 $yx \neq 0$ 否则将与上面的宣称矛盾. 由引理 5.1.2, 我们得到我们想要的. □

引理 5.1.8. *设 Λ 是一个局部分次 Frobenius 代数使得 $yx - x^2$ 和 $xy - ay^2$ 位于 J_Λ^3 这里 $0 \neq a \neq 1$. 则 $dim_k\Lambda = 4$.*

证明. 由假定 Λ 是分次的，所以 $yx = x^2$ 和 $xy = ay^2$ 对 $0 \neq a \neq 1$. 从而，$x^3 = xyx = ay^2x = ayx^2 = ax^3$ 和 $x^2y = axy^2 = a^2y^3 = ayxy = ax^2y$. 因为 $a \neq 1$, 所以 $x^3 = 0 = x^2y$. 因为 $a \neq 0$, 所以 $xyx = y^2x = yx^2 = xy^2 = y^3 = yxy = 0$. 即 $J_\Lambda^3 = 0$ 且 $J_\Lambda^2 \subseteq soc\Lambda$. 这意味 $dim_k\Lambda = 4$. □

引理 5.1.9. *Λ 是一个局部分次 Frobenius 代数使得 x^2 和 y^2 位于 J_Λ^3. 则 $\Lambda \cong kQ/(x^2,\ y^2,\ (xy)^m - a(yx)^m)$ 或 $\Lambda \cong kQ/(x^2,\ y^2,\ (xy)^m x - (yx)^m y)$ 对某个正整数 m 和 $a \neq 0$.*

证明. 如上,假定意味 $x^2 = y^2 = 0$. 设 m, n 是这样的整数使得 $(xy)^m \neq 0$, $(xy)^{m+1} = 0$, $(yx)^n \neq 0$ 和 $(yx)^{n+1} = 0$. 从而， $(xy)^m x$, $(yx)^n y \in soc\Lambda$.

如果 $(xy)^m x \neq 0 \neq (yx)^n y$, 那么 $(yx)^n y = a(xy)^m x$. 这意味 $m = n$. 设 $y' = ay$ ，则 $(y'x)^m y' = (xy')^m x$. 即， $\Lambda \cong kQ/(x^2,\ y'^2,\ (xy')^m x - (y'x)^m y')$.

如果 $(xy)^m x \neq 0$ 但同时 $(yx)^n y = 0$ ，那么 $0 \neq (yx)^n \in soc\Lambda$. 我们得到 $(xy)^m x = a(yx)^n$ 对 $a \neq 0$. 这是不可能的因为 $(xy)^m x$ 和 $(yx)^n$ 具有不同的次. 类似的， $(xy)^m x = 0$ 但同时 $(yx)^n y \neq 0$ 也是不可能的.

唯一剩下的情形是 $(xy)^m x = (yx)^n y = 0$. 从而 $(xy)^m$, $(yx)^n$ 属于 Λ 的 socle 从而 $(xy)^m = a(yx)^n$ 对 $0 \neq a \in k$. 由 Λ 是分次的，我们有 $m = n$. 故得证. □

引理 5.1.10. *设 Λ 是一个局部分次 Frobenius 代数使得 $yx - x^2$ 和 y^2 位于 J_Λ^3 中. 则 $\Lambda \cong kQ/(yx - x^2,\ y^2)$ 或 $dim_k\Lambda = 4$.*

证明. 如前，我们有 $yx = x^2$ 和 $y^2 = 0$. 从而 $xyx = x^3 = yx^2 = y^2x = 0$. 因此 $J_\Lambda^3 = (yxy)$ 且 $J_\Lambda^4 = 0$. 故， $dim_k\Lambda \leq 6$.

如果 $dim_k\Lambda \neq 4$, 那么 $dim_k\Lambda = 5$ 或 6. 如果 $dim_k\Lambda = 6$, 则 $\Lambda \cong kQ/(yx - x^2,\ y^2)$.

宣称：$dim_k\Lambda \neq 5$. 否则, $dim_k J_\Lambda^2/J_\Lambda^3 = 1$ (如果 $dim_k J_\Lambda^2/J_\Lambda^3 = 2$, 则 $dim_k soc\Lambda = 2$). 由引理 5.1.4, 我们知道 $dim_k\Lambda = 4$ 或 $\Lambda \cong kQ/(x^n - y^n,\ xy,\ yx)$. 这些都与 $dim_k\Lambda = 5$ 矛盾. □

定理 5.1.1 的证明：因为 Λ 是 tame 得, 由引理 5.1.4, 我们有 $dim_k J_\Lambda^2/J_\Lambda^3 \leq 2$.

如果 $dim_k J_\Lambda^2/J_\Lambda^3 = 1$, 引理 5.1.4 意味 Λ 是定理 (1),(2),(3) 中的某个代数.

如果 $dim_k J_\Lambda^2/J_\Lambda^3 = 2$, 则 $dim_k \Lambda/J_\Lambda^3 = 5$. 这意味 Λ/J_Λ^3 满足引理 5.1.5 的条件. 从而，引理 5.1.6-5.1.10 给出我们想要的. □

§5.2 Tame 分次基本 Hopf 代数的结构定理

本节的主要结论就是下面的结果.

定理 5.2.1. 设 H 是一个基本 *Hopf* 代数．则 grH 是 *tame* 的当且仅当在一个有限群 G 和下述五种理想的某个理想 I 使得 $grH \cong k<x,y>/I\times(kG)^*$ ：

(1) $I=(x^2-y^2,\ yx-ax^2,\ xy)$ 这里 $0\neq a\in k$;

(2) $I=(x^2,\ y^2,\ (xy)^m-a(yx)^m)$ 这里 $0\neq a\in k$ 且 $m\geq 1$;

(3) $I=(x^n-y^n,\ xy,\ yx)$ 这里 $n\geq 2$;

(4) $I=(x^2,\ y^2,\ (xy)^mx-(yx)^my)$ 这里 $m\geq 1$;

(5) $I=(yx-x^2,\ y^2)$

证明. "必要性：" 首先我们注意到 gr$H$ 是一个 Hopf 代数 (见引理 4.4.1) 且 gr$H\cong R_H\times H/_{J_H}$ (见命题 4.4.3 前的讨论)．一方面，由命题 4.4.3 的 (i) 、 (ii) ，我们知道 R_H 是一个 tame 局部分次 Frobenius 代数．另一方面， H/J_H 是一个交换半单 Hopf 代数从而存在一个有限群 G 使得 $H/J_H\cong(kG)^*$．所以由定理 5.1.1 和 gr$H\cong R_H\times H/J_H$, 我们得到必要性.

"充分性：" 由定理 5.1.1, 我们知道 $k<x,y>/I$ 是一个 tame 代数．则结论可以直接由命题 4.4.3 的 (i) 得到. □

由 Radford 或 Majid 的一个结论 (见 [68][50]) 知如果 Λ 是 ${}^{(kG)^*}_{(kG)^*}\mathcal{YD}$ 里的一个辫子 Hopf 代数，则我们可以形成带化 $\Lambda\times(kG)^*$ ，这是一个 Hopf 代数 (见定理 2.2.2)．对于一个 tame 局部的分次 Frobenius 代数 A, 上面得定理并不能隐含有限群 G 的存在性使得 A 是 ${}^{(kG)^*}_{(kG)^*}\mathcal{YD}$ 中的一个辫子 Hopf 代数．事实上，我们目前还不知道这样的群是否存在.

问题 5.2.1. 对一个 tame 局部分次 Frobenius 代数 A ，给一个有效的方法来确定是否存在有限群 G 使得 A 是 ${}^{(kG)^*}_{(kG)^*}\mathcal{YD}$ 中的一个辫子 Hopf 代数．如果这样的群存在，将它们全找出.

下面的两个例子告诉我们对某些特殊的 tame 局部分次 Frobenius 代数，这样的群 G 是存在的．从而，确实存在 tame 分次基本 Hopf 代数.

例 5.2.1. 设 q 是一个 n- 次本原单位根．回顾 Taft 代数 $T_{n^2}(q)$ 是一个 Hopf 代数，它作为代数由 g 和 x 生成具有关系

$$g^n=1,\ x^n=0,\ xg=qgx$$

它的余乘法 Δ 、余单位 ε 和对极 S 分别为

$$\Delta(g)=g\otimes g,\quad \Delta(x)=1\otimes x+x\otimes g$$

$$\varepsilon(g)=1,\quad \varepsilon(x)=0$$

$$S(g)=g^{-1},\quad S(x)=-xg^{-1}$$

这是一个基本 Hopf 代数因为 $T_{n^2}(q)/J_{T_{n^2}(q)}$ 同构于循环群代数 kZ_n ，这当然是一个交换半单代数.

我们考虑 $H=T_{2^2}(-1)\otimes T_{2^2}(-1)$. 我们记第一个 Taft 代数的生成元为 $x,\ g$ 而第二个的为 $y,\ h$. 显然,作为线性空间 $H=span\{1\otimes 1,\ 1\otimes h,\ g\otimes 1,\ g\otimes h\}\oplus span\{1\otimes y,\ 1\otimes yh,\ g\otimes y,\ g\otimes yh,\ x\otimes 1,\ xg\otimes 1,\ x\otimes h,\ xg\otimes h\}\oplus span\{x\otimes y,\ x\otimes yh,\ xg\otimes y,\ xg\otimes yh\}$. 直接可以得到 $J_H=span\{1\otimes y,\ 1\otimes yh,\ g\otimes y,\ g\otimes yh,\ x\otimes 1,\ xg\otimes 1,\ x\otimes h,\ xg\otimes h\}\oplus span\{x\otimes y,\ x\otimes yh,\ xg\otimes y,\ xg\otimes yh\}$, $H/J_H=span\{1\otimes 1,\ 1\otimes h,\ g\otimes 1,\ g\otimes h\}$, $J_H/J_H^2=span\{1\otimes y,\ 1\otimes yh,\ g\otimes y,\ g\otimes yh,\ x\otimes 1,\ xg\otimes 1,\ x\otimes h,\ xg\otimes h\}$, $J_H^2=span\{x\otimes y,\ x\otimes yh,\ xg\otimes y,\ xg\otimes yh\}$. 从而 H 确实是一个根分次 Hopf 代数. 所以 $H\cong R_H\times H/J_H$. 故, $H/J_H\cong k(Z_2\times Z_2)$ 且 $dim_k(H/J_H)=4$. 这意味 $dim_k R_H=4$ 因为 $dim_k H=16$. 由 R_H 的定义,我们知道 $xg\otimes 1,\ 1\otimes yh\in R_H$. 但是显然 $dim_k(k<xg\otimes 1,1\otimes yh>/((xg\otimes 1)^2,\ (1\otimes yh)^2,\ (xg\otimes 1)(1\otimes yh)-(1\otimes yh)(xg\otimes 1)))=4$. 所以 $R_H\cong k<X,Y>/(X^2,Y^2,XY-YX)$ ，由定理 5.1.1, 它是 tame 的. 这意味 H 也是 tame 的.

例 5.2.2. (书代数) 设 q 是一个 n- 次本原单位根且 m 是一个正整数满足 $(m,n)=1$. 设 $H=\mathbf{h}(q,m)=k<y,x,g>/(x^n,y^n,g^n-1,gx-qxg,gy-q^m yg,xy-yx)$ 且其上的余乘法、对极和余单位分别为

$$\Delta(x)=x\otimes g+1\otimes x,\quad \Delta(y)=y\otimes 1+g^m\otimes y,\quad \Delta(g)=g\otimes g$$

$$S(x)=-xg^{-1},\ \ S(y)=-g^{-m}y,\ \ S(g)=g^{-1},\ \ \varepsilon(x)=\varepsilon(y)=0.\ \ \varepsilon(g)=1$$

这是一个 Hopf 代数并称为书代数. 它是一个基本代数因为 $\mathbf{h}(q,m)/J_{\mathbf{h}(q,m)}$ 是一个交换半单代数. 更多信息有关书代数，见 [6]. 直接验证知道 $R_H=k<x',y>/(x'^n,y^n,x'y-q^m yx')$ 这里 $x'=xg^{-1}$ (见 [3] 的 1.4.2). 特别的，如果 $n=2,q=-1,m=1$, 则 $R_H\cong k<X,Y>/(X^2,Y^2,XY+YX)$. 由定理 5.1.1 ，这是一个 tame 代数. 从而， $\mathbf{h}(-1,1)$ 是 tame 的.

第六章　Tame Hopf 代数的例子

本章，我们给一些 tame Hopf 代数的例子. 我们希望这些例子能有助我们去分类所有的 tame Hopf 代数.

§6.1　Quiver 的形式张量

本节，我们先给出 quiver 的 *形式张量* 的定义. 然后再给出 quiver 的形式张量和基本代数的张量积的关系.

定义 6.1.1. 设 Q, Γ 是两个 quiver. 则 Q, Γ 的 *形式张量* 记为 $Q\widetilde{\otimes}\Gamma$ 并定义为：

$$(Q\widetilde{\otimes}\Gamma)_0 := \{(i,a)|i \in Q_0,\ \ a \in \Gamma_0\}$$

$$(Q\widetilde{\otimes}\Gamma)_1 := \{(i,\alpha)|i \in Q_0,\ \alpha \in \Gamma_1\} \cup \{(\beta,a)|\beta \in Q_1,\ a \in \Gamma_0\}$$

和

$$s(i,\alpha) := (i, s(\alpha)), \quad s(\beta,a) := (s(\beta),a)$$

$$t(i,\alpha) := (i, t(\alpha)), \quad t(\beta,a) := (t(\beta),a)$$

例 6.1.1. 下面的 quiver 的形式张量可以直接画出.

$$\overset{1}{\bullet}\xrightarrow{\alpha}\overset{2}{\bullet}\,\widetilde{\otimes}\,\overset{1}{\bullet}\xrightarrow{\beta}\overset{2}{\bullet} \;=\; \begin{tikzcd} & \overset{(1,3)}{\bullet} \arrow[dl, "{(\alpha,3)}"'] \arrow[dr, "{(1,\beta)}"] & \\ (2,3)\bullet \arrow[dr, "{(2,\beta)}"'] & & \bullet(1,4) \arrow[dl, "{(\alpha,4)}"] \\ & \underset{(2,4)}{\bullet} & \end{tikzcd}$$

命题 6.1.1. *设 A, B 是两个基本代数. 记它们的 Ext-quiver 分别为 Q_A 和 Q_B. 则 $A \otimes B$ 的 Ext-quiver 为 $Q_A\widetilde{\otimes}Q_B$.*

为了证明这个命题，我们先给一下预备知识. 下面的引理看起来是简单的.

引理 6.1.2. *设 A, B 是两个基本代数. 则 $A \otimes B$ 也是一个基本代数.*

证明. 容易发现 $A \otimes B$ 的 Jacobson 根是 $J_A \otimes B + A \otimes J_B$. 从而， $A \otimes B/J_{A\otimes B} \cong A/J_A \otimes B/J_B = k^{(m)} \otimes k^{(n)} = k^{(mn)}$. 故 $A \otimes B$ 是基本的. □

由 Gabriel 定理，我们知道对任意基本代数 A, 这里存在唯一的 Q_A (即， A 的 Ext-quiver) 和一个 admissible 理想 I 使得 $kQ_A/I \cong A$.

域 k 上的 quiver Q 的一个 关 系 σ 是一个路 $\sigma = \Sigma_{i=1}^n a_i p_i$ 的 k- 线性组合 $\sigma = \Sigma_{i=1}^n a_i p_i$ 这里 $a_i \in k$ 且 $s(p_1) = \cdots = s(p_n), t(p_1) = \cdots = t(p_n)$. 我们假定每一个 p_i 的长度至少为 2. 显然对任意的 admissible 理想 I ，存在关系集 ρ 使得 $I =< \rho >$.

命题 6.1.1 的证明: 我们将记 Q_A 的顶点为 $i, j, \dots$ 而 Q_B 的顶点为 $a, b, \dots$. 我们只需证存在 $I_{A\otimes B}$ 使得

$$kQ_A \widetilde{\otimes} Q_B / I_{A\otimes B} \cong A \otimes B$$

由 Gabriel 定理，存在满射 $\pi_A:\ kQ_A \twoheadrightarrow A$ 、 $\pi_B:\ kQ_B \twoheadrightarrow B$ 且 $Ker(\pi_A) :=< \rho_A >$, $Ker\pi_B :=< \rho_B >$ 是 admissible 理想这里 ρ_A, ρ_B 是关系集.

定义 $\pi_{A\otimes B}$ 为

$$(Q_A \widetilde{\otimes} Q_B)_0 \to A \otimes B, \quad (i,a) \mapsto \pi_A(i) \otimes \pi_B(a)$$

$$(Q_A \widetilde{\otimes} Q_B)_1 \to A \otimes B, \quad (i,\alpha) \mapsto \pi_A(i) \otimes \pi_B(\alpha), \quad (\beta,a) \mapsto \pi_A(\beta) \otimes \pi_B(a)$$

因为 π_A and π_B 是代数同态,我们有 $\pi_{A\otimes B}|_{k(Q_A \widetilde{\otimes} Q_B)_0}$ 是一个代数同态且 $\pi_{A\otimes B}|_{k(Q_A \widetilde{\otimes} Q_B)_1}$ 是一个 $k(Q_A \widetilde{\otimes} Q_B)_0$- 双模同态. 由张量代数的泛性质，我们有代数同态

$$\pi_{A\otimes B}:\ k(Q_A \widetilde{\otimes} Q_B) \to A \otimes B$$

它显然是满射.

现在让我们来描述 $\pi_{A\otimes B}$ 的核. 设 σ_A 是 kQ_A 的关系. 不失一般性, 假定 $\sigma_A = \Sigma_{i=1}^m k_i p_i$ 且 $p_i = \alpha_{in} \cdots \alpha_{i1}$. 我们定义 $(\sigma_A, a) = \Sigma_{i=1}^m k_i (\alpha_{in}, a) \cdots (\alpha_{i1}, a)$ 对 $a \in (Q_B)_0$. 类似的，我们定义 (i, σ_B) 对 $i \in (Q_A)_0$ 和 kQ_B 中的关系 σ_B.

定义 $\rho_{A\otimes B} := \{(\sigma_A, a) | \sigma_A \in \rho_A,\ a \in (Q_B)_0\} \cup \{(i, \sigma_B) | \sigma_B \in \rho_B,\ i \in (Q_A)_0\} \cup \{(j,\beta)(\alpha,a) - (\alpha,b)(i,\beta) |$ 对任意 $\alpha:\ i \to j,\ \beta:\ a \to b)\}$. 由 $\pi_{A\otimes B}$ 的定义，我们看到 $Ker\pi_{A\otimes B} \supset < \rho_{A\otimes B} >$. 下面我们来证 $Ker\pi_{A\otimes B} =< \rho_{A\otimes B} >$.

显然，存在自然的从 kQ_A 到 $k(Q_A \widetilde{\otimes} Q_B) / < \rho_{A\otimes B} >$ 代数同态和自然的代数同态从 kQ_B 到 $k(Q_A \widetilde{\otimes} Q_B) / < \rho_{A\otimes B} >$. 由代数张量积的泛性质，存在一个代数满射 $\pi:\ kQ_A \otimes kQ_B \to k(Q_A \widetilde{\otimes} Q_B) / < \rho_{A\otimes B} >$ 通过

$$\pi(i \otimes a) = (i,a), \quad \pi(i \otimes \beta) = (i,\beta)$$

$$\pi(\alpha \otimes a) = (\alpha,a), \quad \pi(\alpha \otimes \beta) = (\alpha,\beta)$$

由直接的计算，我们知道 t $< \rho_A > \otimes kQ_B + kQ_A \otimes < \rho_B > \subset Ker\pi$.

从而，我们有下面的交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & kQ_A \otimes kQ_B/(<\rho_A> \otimes kQ_B + kQ_A \otimes <\rho_B>) \arrow[dl, "\overline{\pi}"'] \arrow[d, "\cong"] \\
k(Q_A \widetilde{\otimes} Q_B)/<\rho_{A\otimes B}> \arrow[r, "\overline{\pi_{A\otimes B}}"] & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

这里 $\overline{\pi}$ 和 $\overline{\pi_{A\otimes B}}$ 是通过 π 和 $\pi_{A\otimes B}$ 诱导的. 从而, $\overline{\pi_{A\otimes B}}$ 是一个同构且 $Ker\pi_{A\otimes B} =< \rho_{A\otimes B} >$ (它显然 admissible). 所以 $A\otimes B$ 的 Ext-quiver 是形式张量 $Q_A \widetilde{\otimes} Q_B$. □

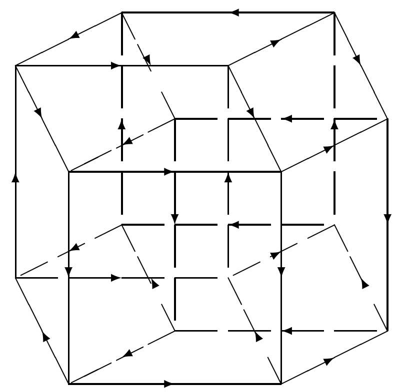
对一个基本 Hopf 代数, 回顾 n_H 表示它的表示型数.

推论 6.1.3. 设 H_1 和 H_2 是两个基本 *Hopf* 代数. 则 $n_{H_1\otimes H_2} = n_{H_1} + n_{H_2}$.

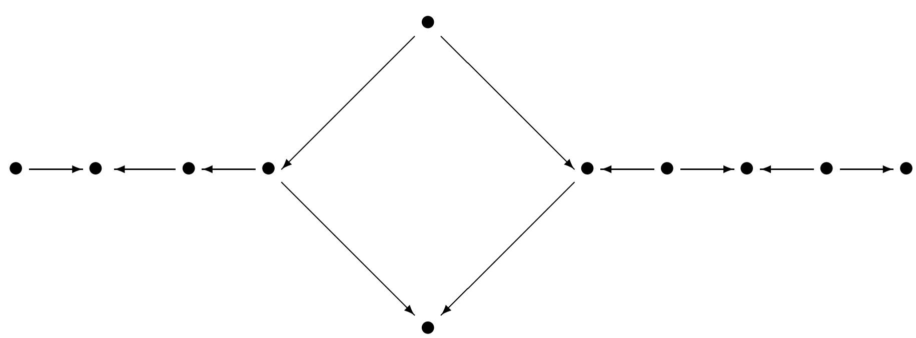
证明. 这是形式张量的定义和命题 6.1.1 的直接结论. □

例 1

$T_{4^2}(q)\otimes T_{4^2}(q')$ 的 **Ext-quiver** 为



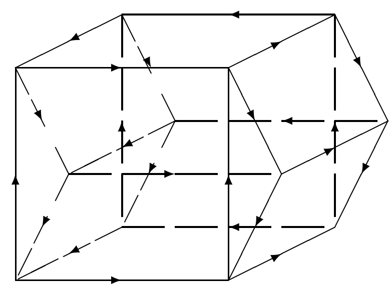
这里存在一个和定理 2.4.1 (i) 一样的子 quiver 并具有相同的关系



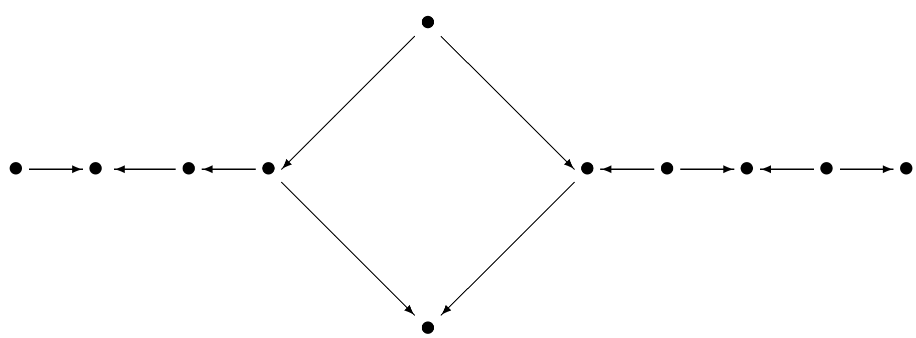
由定理 2.4.1， $T_{4^2}(q)\otimes T_{4^2}(q')$ 是一个 wild 代数

例 2

$T_{4^2}(q) \otimes T_{3^2}(q')$ 的 **Ext-quiver** 为



这里存在一个和定理 2.4.1 (i) 一样的子 quiver 并具有相同的关系



由定理 2.4.1， $T_{4^2}(q) \otimes T_{3^2}(q')$ 是一个 wild 代数

§6.2 张量积

给定两个 Hopf 代数 H_1 和 H_2. 什么时候 $H_1 \otimes H_2$ 是 tame 的？当 H_1 和 H_2 是基本代数的时候，我们对此给出一个答案.

本节的第一个主要结论就是下面的定理.

定理 6.2.1. 设 H_1 和 H_2 是两个基本的非半单 *Hopf* 代数. 如果 $H_1 \otimes H_2$ 是 *tame* 的，则 H_1 和 H_2 都是有限表示型的.

证明. 由推论 6.1.3, 我们知道 $n_{H_1\otimes H_2} = n_{H_1} + n_{H_2}$. 由表示型数定理， $n_{H_1\otimes H_2} = 2$ 从而 $n_{H_1} = 1$ 且 $n_{H_2} = 1$. 再次利用表示型数定理，我们有 H_1 和 H_2 是有限表示型的. □

这个定理事实上蕴含这下面的结论.

推论 6.2.2. 设 H_1, H_2 和 H_3 是三个基本的非半单 *Hopf* 代数. 则 $H_1 \otimes H_2 \otimes H_3$ 是 *wild* 的.

证明. 我们给一个独立于定理 6.2.1 的证明. 由假定， $n_{H_i} \geq 1$ 对 $i = 1, 2, 3$. 所以 $n_{H_1\otimes H_2\otimes H_3} \geq 3$ 从而由表示型数定理知 $H_1 \otimes H_2 \otimes H_3$ 是 wild 的. □

从这个定理我们知道，为了由张量积来构造 tame 基本 Hopf 代数，我们只需考虑有限表示型的基本 Hopf 代数的张量积. 由 [48], 我们知道最典型的有限表示型的基本 Hopf 代数就是 Taft 代数和 $A(n, d, \mu, q)$ 的对偶. 由定义， $A(n, d, \mu, q)$ 作为结合代数由 g 和 x 生成，其关系为

$$g^n = 1, \quad x^d = \mu(1 - g^d), \quad xg = qgx$$

它的余乘法 Δ 、余单位 ε 和对极 S 分别为 y

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes g$$

$$\varepsilon(g) = 1, \quad \varepsilon(x) = 0$$

$$S(g) = g^{-1}, \quad S(x) = -xg^{-1}$$

我们称这个 Hopf 代数为 Andruskiewitsch-Schneider 代数.

在本节的以下内容中，我们将决定什么时候两个 Taft 代数的张量积是 tame 的. 更一般的，我们将决定什么时候两个 $A(n, d, \mu, q)$ 的张量积是 tame 的.

在 6.1 节，我们已经证明 $T_{4^2}(q)\otimes T_{4^2}(q')$ 和 $T_{4^2}(q)\otimes T_{3^2}(q')$ 是 wild 代数. 下面结论将给我们一个更强的结果.

.

定理 6.2.3. *设 k 是一个特征 0 的代数闭域. $T_{m^2}(q)\otimes T_{n^2}(q')$ 是 tame 的当且仅当 $m=n=2$.*

证明. 在例 5.2.1 中，我们事实上已经证明 $T_{2^2}(q)\otimes T_{2^2}(q')$ 是一个分次基本 Hopf 代数. 事实上，利用同样的方法，我们可以证明 $H=T_{m^2}(q)\otimes T_{n^2}(q')$ 也是分次的. 由 Radford 的结果 (见 [68]，定理 3),

$$H\cong R_H\times H_0 \quad \text{as Hopf 代数 s}$$

直接计算的 $R_H\cong k<x,y>/(x^m,y^n,xy-yx)$. 由定理 5.1.1，它是 tame 当且仅当 $m=n=2$. 从而这个定理是命题 4.4.3 的直接结论. □

这个定理告诉我们例 5.2.1 中的 Tame 基本是唯一的情形使得 $T_{m^2}(q)\otimes T_{n^2}(q')$ 是 tame 的. 接下来，我们来讨论 $A(n,d,\mu,q)$ 的情形. 回顾 [12] 的一个结论 (见 [12]，定理 4.3).

引理 6.2.4. *设 $A=A(n,d,\mu,q)$ 和 $t=n/d-1$.*

(i) *如果 $\mu\neq 0$, 则 $A\cong kZ_d^a/J^d\oplus M_d(k)\oplus\cdots\oplus M_d(k)$ (t 个 $M_d(k)$ 的拷贝).*

(ii) *如果 $\mu=0$, 则 $A\cong kZ_d^a/J^d\oplus kZ_d^a/J^d\oplus\cdots\oplus kZ_d^a/J^d$ ($t+1$ 个 kZ_d^a/J^d 的拷贝).*

注意到 kZ_d^a/J^d 作为代数它同构于 Taft 代数 $T_{d^2}(q)$ (这个事实可以由下面的两个已知结论得到 1: Taft 代数是自对偶 Hopf 代数; 2: $(kZ_d^a/J^d)^*\cong C_d(d)\cong T_{d^2}(q)$. 细节，见 [12] 和 [14]).

定理 6.2.5. *设 k 是一个特征 0 的代数闭域. $A(n,d,\mu,q)\otimes A(n',d',\mu',q')$ 是 tame 的当且仅当 $d=d'=2$.*

证明. 记 $A=A(n,d,\mu,q)$. 首先，我们来说明什么时候 $A\otimes A$ 是 tame 的. 由引理 6.2.4, 如果 $\mu\neq 0$, 那么 $A\otimes A\cong (kZ_d^a/J^d\oplus M_d(k)\oplus\cdots\oplus M_d(k))\otimes(kZ_d^a/J^d\oplus M_d(k)\oplus\cdots\oplus M_d(k))\cong kZ_d^a/J^d\otimes kZ_d^a/J^d\oplus kZ_d^a/J^d\otimes M_d(k)\oplus\cdots kZ_d^a/J^d\otimes M_d(k)\oplus M_d(k)\otimes kZ_d^a/J^d\oplus\cdots\oplus M_d(k)\otimes kZ_d^a/J^d\oplus M_d(k)\otimes M_d(k)\oplus\cdots\oplus M_d(k)\otimes M_d(k)$. 显然， $M_d(k)\otimes M_d(k)\cong M_{d^2}(k)$ 是单代数. $kZ_d^a/J^d\otimes M_d(k)\cong M_d(kZ_d^a/J^d)$ 是 Morita 等价于 kZ_d^a/J^d. 类似的， $M_d(k)\otimes kZ_d^a/J^d$ 也是 Morita 等价于 kZ_d^a/J^d. 这意味 $M_d(k)\otimes M_d(k)$, $kZ_d^a/J^d\otimes M_d(k)$, $M_d(k)\otimes kZ_d^a/J^d$ 都是有限表示型的. 所以, $A\otimes A$ 是 tame 的当且仅当 $kZ_d^a/J^d\otimes kZ_d^a/J^d$ 是 tame 的. 由定理 6.2.3 和此定理

前的讨论， $A\otimes A$ 是 tame 当且仅当 $d=2$. 类似的，我们可以得到想要的结论当 $\mu=0$ 时.

记 $A'=A(n',d',\mu',q')$. 以类似的方法，我们知道 $A\otimes A'$ 是 tame 的当且仅当 $d=d'=2$. □

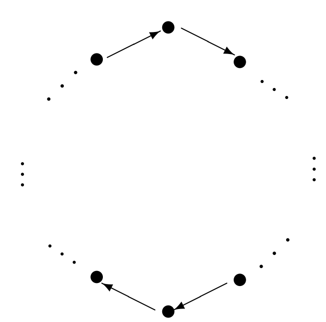
因为，对 Hopf 代数 $A(n,d,\mu,q)$ 总有 $d|n$, 所以我们有：

推论 6.2.6. *设 k 是一个特征 0 的代数闭域. $A(n,d,\mu,q)\otimes A(n',d',\mu',q')$ 是 wild 的如果 n 或 n' 是奇数.*

§6.3 Drinfeld 偶

本节我们将研究 Drinfeld 偶 $\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$. 它是 [24] 中 $(A(n,d,\mu,q))^{*cop}$ 的 Drinfeld 偶的推广. 我们的主要结果是给出 $\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$ 的投射模的结构. 由此，我们确定了 $\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$ 的 Ext-quiver 及关系. 并证明 $\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$ 是一个 tame 代数. 本节主要依赖于 [24] 并希望读者先看这篇文章.

代数 $\Gamma_{n,d}:=kZ_n/J^d$（这里 $d|n$ ）是通过 quiver 和关系来描述的. 这个 quiver 是：



其具有 n 个顶点 $e_0,\cdots,e_{n-1}$. 我们将记 γ_i^m 以 e_i 为起点长度为 m 的路. 关系是是所有的长度 $d\geq 2$ 的路.

我们给出 $\Gamma_{n,d}$ 的 Hopf 结构. 我们固定一个 d- 次本原单位根 q 和一个 $\mu\in k$.

$$\Delta(e_t)=\sum_{j+l=t}e_j\otimes e_l+\alpha_t^0-\beta_t^0,\quad \Delta(\gamma_t^1)=\sum_{j+l=t}e_j\otimes\gamma_l^1+q^l\gamma_j^1\otimes e_l+\alpha_t^1-\beta_t^1$$

$$\varepsilon(e_t)=\delta_{t0},\ \ \varepsilon(\gamma_t^1)=0,\ \ S(e_t)=e_{-t},\ \ S(\gamma_t^1)=-q^{t+1}\gamma_{-t-1}^1$$

这里

$$\alpha_t^s = \mu \sum_{l=s+1}^{d-1} \sum_{i+j=t} \frac{q^{jl}(s)!_q}{l!_q(d-l+s)!_q} \gamma_i^l \otimes \gamma_j^{d+s-l}$$

$$\beta_t^s = \mu \sum_{l=s+1}^{d-1} \sum_{i+j+d=t} \frac{q^{jl}(s)!_q}{l!_q(d-l+s)!_q} \gamma_i^l \otimes \gamma_j^{d+s-l}$$

命题 6.3.1. 在上面的余乘法、余单位和对极的定义下， $\Gamma_{n,d}$ 是一个 *Hopf* 代数.

证明. 我们只证明 Δ 是一个代数同态因为其他的有关 Hopf 代数的公理是容易验证的. 为此，我们只需证对 $s,t \in \{0,\cdots,n-1\}$, 我们有

$$\Delta(e_s)\Delta(e_t) = \Delta(\delta_{st}e_t), \quad \Delta(\gamma_s^1 e_t) = \Delta(\gamma_s^1)\Delta(e_t), \quad \Delta(e_t\gamma_s^1) = \Delta(e_t)\Delta(\gamma_s^1)$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}
\Delta(e_s)\Delta(e_t) &= (\sum_{j+l=s} e_j \otimes e_l + \alpha_s^0 - \beta_s^0)(\sum_{j+l=t} e_j \otimes e_l + \alpha_t^0 - \beta_t^0) \\
&= (\sum_{j+l=s} e_j \otimes e_l)(\sum_{j+l=t} e_j \otimes e_l) + (\sum_{j+l=s} e_j \otimes e_l)\alpha_t^0 - (\sum_{j+l=s} e_j \otimes e_l)\beta_t^0 \\
&\quad + \alpha_s^0(\sum_{j+l=t} e_j \otimes e_l) - \beta_s^0(\sum_{j+l=t} e_j \otimes e_l) + r
\end{aligned}$$

这里 $r = \alpha_s^0\alpha_t^0 - \alpha_s^0\beta_t^0 - \beta_s^0\alpha_t^0 + \beta_s^0\beta_t^0$ 且显然的 $r \in J^d \otimes k\mathrm{Z}_n + k\mathrm{Z}_n \otimes J^d$. 所以 $r = 0$. 注意到在 $\alpha_t^0 = \mu \sum_{l=1}^{d-1} \sum_{i+j=t} \frac{q^{jl}}{l!_q(d-l)!_q} \gamma_i^l \otimes \gamma_j^{d-l}$ 中，每一个分支比方说 $\gamma_i^l \otimes \gamma_j^{d-l}$，$\gamma_i^l$ 的终点是 e_{i+l} 而 γ_j^{d-l} 的终点是 e_{j+d-l}. 所以

$$(e_m \otimes e_n)(\gamma_i^l \otimes \gamma_j^{d-l}) \neq 0$$

意味 $m+n = i+l+j+d-l = t+d$. 类似的，$(\gamma_i^l \otimes \gamma_j^{d-l})(e_m \otimes e_n) \neq 0$ 意味 $m+n=t$. 从而如果 $s \neq t+p$,

$$(\sum_{j+l=s} e_j \otimes e_l)\alpha_t^0 = 0, \quad \beta_s^0(\sum_{j+l=t} e_j \otimes e_l) = 0$$

而如果 $s \neq t$

$$(\sum_{j+l=s} e_j \otimes e_l)\beta_t^0 = 0, \quad \alpha_s^0(\sum_{j+l=t} e_j \otimes e_l) = 0$$

因此如果 $s \neq t+p$ 且 $s \neq t$, 则 $\Delta(e_s)\Delta(e_t) = 0$.

如果 $s=t+p$,

$$\begin{aligned}\Delta(e_s)\Delta(e_t) &= (\sum_{j+l=s} e_j\otimes e_l)\alpha_t^0-\beta_s^0(\sum_{j+l=t} e_j\otimes e_l)=\alpha_t^0-\beta_s^0\\ &= \mu\sum_{l=1}^{d-1}\sum_{i+j=t}\frac{q^{jl}}{l!_q(d-l)!_q}\gamma_i^l\otimes\gamma_j^{d-l}-\mu\sum_{l=1}^{d-1}\sum_{i+j+d=t+d}\frac{q^{jl}}{l!_q(d-l)!_q}\gamma_i^l\otimes\gamma_j^{d-l}\\ &= 0\end{aligned}$$

如果 $s=t$, $\Delta(e_s)\Delta(e_t)=\sum_{j+l=s}e_j\otimes e_l-(\sum_{j+l=s}e_j\otimes e_l)\beta_t^0+\alpha_t^0(\sum_{j+l=t}e_j\otimes e_l)=\sum_{j+l=s}e_j\otimes e_l-\beta_t^0+\alpha_t^0=\Delta(e_t)$.

总之， $\Delta(e_s)\Delta(e_t)=\Delta(\delta_{st}e_t)$.

接下来，我们来证 $\Delta(\gamma_s^1e_t)=\Delta(\gamma_s^1)\Delta(e_t)$.

$$\begin{aligned}\Delta(\gamma_s^1)\Delta(e_t) &= (\sum_{j+l=s}(e_j\otimes\gamma_l^1+q^l\gamma_j^1\otimes e_l)+\alpha_s^1-\beta_s^1)(\sum_{j+l=t}e_j\otimes e_l+\alpha_t^0-\beta_t^0)\\ &= (\sum_{j+l=s}e_j\otimes\gamma_l^1+q^l\gamma_j^1\otimes e_l)(\sum_{j+l=t}e_j\otimes e_l)+(\sum_{j+l=s}e_j\otimes\gamma_l^1+q^l\gamma_j^1\otimes e_l)\alpha_t^0\\ &\quad -(\sum_{j+l=s}e_j\otimes\gamma_l^1+q^l\gamma_j^1\otimes e_l)\beta_t^0+\alpha_s^1(\sum_{j+l=t}e_j\otimes e_l)-\beta_s^1(\sum_{j+l=t}e_j\otimes e_l)\end{aligned}$$

类似于 $\Delta(e_s)\Delta(e_t)=\Delta(\delta_{st}e_t)$ 的证明，我们有如果 $s\neq t$,

$$(\sum_{j+l=s}e_j\otimes\gamma_l^1+q^l\gamma_j^1\otimes e_l)\beta_t^0=0,\quad \alpha_s^1(\sum_{j+l=t}e_j\otimes e_l)=0$$

而如果 $s\neq t+p$,

$$(\sum_{j+l=s}e_j\otimes\gamma_l^1+q^l\gamma_j^1\otimes e_l)\alpha_t^0=0,\quad \beta_s^1(\sum_{j+l=t}e_j\otimes e_l)=0$$

从而如果 $s\neq t$ 且 $s\neq t+p$, 则 $\Delta(\gamma_s^1)\Delta(e_t)=0$.

如果 $s=t+p$,

$$\begin{aligned}
\Delta(\gamma_s^1)\Delta(e_t) &= (\sum_{j+l=s} e_j\otimes\gamma_l^1+q^l\gamma_j^1\otimes e_l)\alpha_t^0-\beta_s^1(\sum_{j+l=t} e_j\otimes e_l)\\
&= \sum_{j+l=s}(e_j\otimes\gamma_l^1+q^l\gamma_j^1\otimes e_l)(\mu\sum_{l=1}^{d-1}\sum_{i+j=t}\frac{q^{jl}}{l!_q(d-l)!_q}\gamma_i^l\otimes\gamma_j^{d-l})-\beta_s^1\\
&= \mu\sum_{l=1}^{d-1}\sum_{i+j=t}\frac{q^{jl}}{l!_q(d-l)!_q}(\gamma_i^l\otimes\gamma_j^{d-l+1}+q^{j+d-l}\gamma_i^{l+1}\otimes\gamma_j^{d-l})-\beta_s^1\\
&= \mu\sum_{l=2}^{d-1}\sum_{i+j=t}(\frac{q^{jl}}{l!_q(d-l)!_q}+q^{j(l-1)}q^{j+d-l+1}\frac{1}{(l-1)!_q(d-l+1)!_q})\gamma_i^l\otimes\gamma_j^{d-l+1}-\beta_s^1\\
&= \mu\sum_{l=2}^{d-1}\sum_{i+j=t}\frac{q^{jl}}{l!_q(d-l+1)!_q}\gamma_i^l\otimes\gamma_j^{d-l+1}-\beta_s^1\\
&= 0
\end{aligned}$$

如果 $s=t$,

$$\begin{aligned}
\Delta(\gamma_s^1)\Delta(e_t) &= (\sum_{j+l=s} e_j\otimes\gamma_l^1+q^l\gamma_j^1\otimes e_l)-(\sum_{j+l=s} e_j\otimes\gamma_l^1+q^l\gamma_j^1\otimes e_l)\beta_t^0+\alpha_t^1(\sum_{j+l=t} e_j\otimes e_l)\\
&= (\sum_{j+l=s} e_j\otimes\gamma_l^1+q^l\gamma_j^1\otimes e_l)-\beta_t^1+\alpha_t^1=\Delta(\gamma_t^1)
\end{aligned}$$

这里第二个等式可以由类似于情形 $s=t+p$ 的计算得到.

从而，我们有 $\Delta(\gamma_s^1 e_t)=\Delta(\gamma_s^1)\Delta(e_t)$. 等式 $\Delta(e_t\gamma_s^1)=\Delta(e_t)\Delta(\gamma_s^1)$ 可以类似的得到. $\square$

引理 6.3.2. 作为一个 *Hopf* 代数，$(\Gamma_{n,d})^{*cop}\cong A(n,d,\mu,q)$ 通过 $\widehat{\gamma_1^0}\mapsto G$, $\widehat{\gamma_0^1}\mapsto X$. 另外，我们有

$$\Delta(\gamma_i^m)=(\sum_{s+t=i,v+l=m}\begin{pmatrix} m\\ v\end{pmatrix}_q q^{vt}\gamma_s^v\otimes\gamma_t^l)+\alpha_i^m-\beta_i^m$$

证明. 直接计算得到.

$\square$

我们常记 $\sum_{s+t=i,v+l=m}\begin{pmatrix} m\\ v\end{pmatrix}_q q^{vt}\gamma_s^v\otimes\gamma_t^l$ 为 M_i^m. 直接计算得,

引理 6.3.3.

$$(id\otimes\Delta)M_l^m=\sum_{m_1+m_2+m_3=m,l_1+l_2+l_3=l}\frac{q^{m_1(l_2+l_3)+m_2l_3}m!_q}{(m_1)!_q(m_2)!_q(m_3)!_q}\gamma_{l_1}^{m_1}\otimes\gamma_{l_2}^{m_2}\otimes\gamma_{l_3}^{m_3}$$

$$(id\otimes\Delta)\alpha_l^m=\mu\sum_{m_1+m_2+m_3=d+m,l_1+l_2+l_3=l}\frac{q^{m_1(l_2+l_3)+m_2l_3}m!_q}{(m_1)!_q(m_2)!_q(m_3)!_q}\gamma_{l_1}^{m_1}\otimes\gamma_{l_2}^{m_2}\otimes\gamma_{l_3}^{m_3}$$

$$(id\otimes\Delta)\beta_l^m=\mu\sum_{m_1+m_2+m_3=d+m,l_1+l_2+l_3+d=l}\frac{q^{m_1(l_2+l_3)+m_2l_3}m!_q}{(m_1)!_q(m_2)!_q(m_3)!_q}\gamma_{l_1}^{m_1}\otimes\gamma_{l_2}^{m_2}\otimes\gamma_{l_3}^{m_3}$$

命题 6.3.4. $\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$ 的 *Drinfeld* 偶可以以下述方式描述：作为一个余代数，它就是 $(\Gamma_{n,d})^{*cop}\otimes\Gamma_{n,d}$. 我们记基元为 $G^iX^j\gamma_l^m$ ，这里 $i,l\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, $0\le j,m\le d-1$. 下面的关系完全决定了它的代数结构：

$$G^n=1,\ \ X^d=\mu(1-G^d),\ \ GX=q^{-1}XG$$

γ_l^m 的乘积就是通常路代数的乘法且

$$\gamma_l^mG=q^{-m}G\gamma_l^m \qquad (*1)$$

和

$$(*2)\quad \gamma_l^mX=\begin{cases} q^{-m}X\gamma_{l+1}^m-q^{-m}(m)_q\gamma_{l+1}^{m-1}+q^{l+1-m}(m)_qG\gamma_{l+1}^{m-1} & \text{如果 } m\ge 1\\ X\gamma_{l+1}^0-\frac{\mu}{(d-1)!_q}(\gamma_{l+1}^{d-1}-\gamma_{l+1-d}^{d-1})+\frac{\mu q^{l+1}}{(d-1)!_q}G(\gamma_{l+1}^{d-1}-\gamma_{l+1-d}^{d-1}) & \text{如果 } m=0\end{cases}$$

证明. 我们只证明等式 $(*1)$, $(*2)$. 对于等式 $(*1)$, 由 Drinfeld 偶的定义知，

$$\begin{aligned}\gamma_l^mG &= (1\otimes\gamma_l^m)(\widehat{\gamma_1^0}\otimes 1)\\ &= \sum_{m_1+m_2+m_3=m,l_1+l_2+l_3=l}C_{l_1,l_2,l_3}^{m_1,m_2,m_3}\widehat{\gamma_1^0}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\otimes\gamma_{l_2}^{m_2} && (I)\\ &\quad+\mu\sum_{m_1+m_2+m_3=d+m,l_1+l_2+l_3=l}C_{l_1,l_2,l_3}^{m_1,m_2,m_3}\widehat{\gamma_1^0}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\otimes\gamma_{l_2}^{m_2} && (II)\\ &\quad-\mu\sum_{m_1+m_2+m_3=d+m,l_1+l_2+l_3+d=l}C_{l_1,l_2,l_3}^{m_1,m_2,m_3}\widehat{\gamma_1^0}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\otimes\gamma_{l_2}^{m_2} && (III)\end{aligned}$$

这里 $C_{l_1,l_2,l_3}^{m_1,m_2,m_3}=\frac{q^{m_1(l_2+l_3)+m_2l_3}m!_q}{(m_1)!_q(m_2)!_q(m_3)!_q}$. 通过观察，我们可以发现下面的结果.

对于项 (I), $\widehat{\gamma_1^0}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\ne 0$ 只有 $l_1=1,l_3=n-1,l_2=l,m_1=0,m_3=0,m_2=m$. 在这种情形， $C_{l_1,l_2,l_3}^{m_1,m_2,m_3}=q^{-m}$. 所以， $(I)=q^{-m}\widehat{\gamma_1^0}\otimes\gamma_l^m=q^{-m}G\gamma_l^m$. 类似的，我们可以发现 $(II)=0$ 和 $(III)=0$. 故 $(*1)$ 得证.

对于 $(*2)$,

$$\begin{aligned}
\gamma_l^m X &= (1\otimes\gamma_l^m)(\widehat{\gamma_0^1}\otimes 1)\\
&= \sum_{m_1+m_2+m_3=m,l_1+l_2+l_3=l} C_{l_1,l_2,l_3}^{m_1,m_2,m_3}\widehat{\gamma_0^1}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\otimes\gamma_{l_2}^{m_2} \qquad (I)\\
&\quad +\mu\sum_{m_1+m_2+m_3=d+m,l_1+l_2+l_3=l} C_{l_1,l_2,l_3}^{m_1,m_2,m_3}\widehat{\gamma_0^1}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\otimes\gamma_{l_2}^{m_2} \qquad (II)\\
&\quad -\mu\sum_{m_1+m_2+m_3=d+m,l_1+l_2+l_3+d=l} C_{l_1,l_2,l_3}^{m_1,m_2,m_3}\widehat{\gamma_0^1}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\otimes\gamma_{l_2}^{m_2} \qquad (III)
\end{aligned}$$

对于项 (I), 容易发现只有三种情形使得 $\widehat{\gamma_0^1}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\neq 0$. 他们分别是

(1) $l_1=0,\ l_2=l+1,\ l_3=n-1,\ m_1=0,\ m_2=m-1,\ m_3=1$

(2) $l_1=0,\ l_2=l+1,\ l_3=n-1,\ m_1=0,\ m_2=m,\ m_3=0$

(3) $l_1=0,\ l_2=l+1,\ l_3=n-1,\ m_1=1,\ m_2=m-1,\ m_3=0$

对于情形 (1), 直接验证知

$$C_{l_1,l_2,l_3}^{m_1,m_2,m_3}\widehat{\gamma_0^1}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\otimes\gamma_{l_2}^{m_2}=-q^{-m}(m)_q 1\otimes\gamma_{l+1}^{m-1}$$

对于情形 (2), 我们有

$$C_{l_1,l_2,l_3}^{m_1,m_2,m_3}\widehat{\gamma_0^1}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\otimes\gamma_{l_2}^{m_2}=-q^{-m}\widehat{\gamma_0^1}\otimes\gamma_{l+1}^{m}=-q^{-m}X\gamma_{l+1}^{m}$$

对于情形 (3), 我们有

$$C_{l_1,l_2,l_3}^{m_1,m_2,m_3}\widehat{\gamma_0^1}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\otimes\gamma_{l_2}^{m_2}=-q^{l+1-m}(m)_q\widehat{\gamma_1^0}\otimes\gamma_{l+1}^{m-1}=-q^{l+1-m}(m)_q G\gamma_{l+1}^{m-1}$$

对于项 (II), 同样存在三种情形使得 $\widehat{\gamma_0^1}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\neq 0$. 它们是

(1) $l_1=0,\ l_2=l+1,\ l_3=n-1,\ m_1=0,\ m_2=d+m-1,\ m_3=1$

(2) $l_1=0,\ l_2=l+1,\ l_3=n-1,\ m_1=0,\ m_2=d+m,\ m_3=0$

(3) $l_1=0,\ l_2=l+1,\ l_3=n-1,\ m_1=1,\ m_2=d+m-1,\ m_3=0$

所以如果 $m\geq 1$, 我们有 $\gamma_{l_2}^{m_2}\in J^d$. 由 $\Gamma_{n,d}$ 的定义知，它是非 0 的. 从而 $\widehat{\gamma_0^1}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\otimes\gamma_{l_2}^{m_2}\neq 0$ 意味 $m=0$.

假定 $m=0$. 对于情形 (1),

$$\mu C_{l_1,l_2,l_3}^{m_1,m_2,m_3}\widehat{\gamma_0^1}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\otimes\gamma_{l_2}^{m_2}=\frac{-\mu}{(d-1)!_q}\gamma_{l+1}^{d-1}$$

对于情形 (2),

$$\mu C_{l_1,l_2,l_3}^{m_1,m_2,m_3}\widehat{\gamma_0^1}(S^{-1}(\gamma_{l_3}^{m_3})?\gamma_{l_1}^{m_1})\otimes\gamma_{l_2}^{m_2}=0$$

对于情形 (3),

$$\mu C^{m_1,m_2,m_3}_{l_1,l_2,l_3}\widehat{\gamma}^1_0(S^{-1}(\gamma^{m_3}_{l_3})?\gamma^{m_1}_{l_1})\otimes\gamma^{m_2}_{l_2}=\frac{\mu q^{l+1}}{(d-1)!_q}G\gamma^{d-1}_{l+1}$$

对于项 (III), 同样存在三种情形我们需考虑.

(1) $l_1=0,\ l_2=l+1-d,\ l_3=n-1,\ m_1=0,\ m_2=d+m-1,\ m_3=1$

(2) $l_1=0,\ l_2=l+1-d,\ l_3=n-1,\ m_1=0,\ m_2=d+m,\ m_3=0$

(3) $l_1=0,\ l_2=l+1-d,\ l_3=n-1,\ m_1=1,\ m_2=d+m-1,\ m_3=0$

如果 $m\geq 1$, 我们同样有项 $(III)=0$. 假定 $m=0$. 对于情形 (1),

$$\mu C^{m_1,m_2,m_3}_{l_1,l_2,l_3}\widehat{\gamma}^1_0(S^{-1}(\gamma^{m_3}_{l_3})?\gamma^{m_1}_{l_1})\otimes\gamma^{m_2}_{l_2}=\frac{-\mu}{(d-1)!_q}\gamma^{d-1}_{l+1-d}$$

对于情形 (2),

$$\mu C^{m_1,m_2,m_3}_{l_1,l_2,l_3}\widehat{\gamma}^1_0(S^{-1}(\gamma^{m_3}_{l_3})?\gamma^{m_1}_{l_1})\otimes\gamma^{m_2}_{l_2}=0$$

对于情形 (3),

$$\mu C^{m_1,m_2,m_3}_{l_1,l_2,l_3}\widehat{\gamma}^1_0(S^{-1}(\gamma^{m_3}_{l_3})?\gamma^{m_1}_{l_1})\otimes\gamma^{m_2}_{l_2}=\frac{\mu q^{l+1}}{(d-1)!_q}G\gamma^{d-1}_{l+1-d}$$

□

为了研究 $\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$ 的投射模的结构,我们首先将 $\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$ 分解为代数 $\Gamma_0,\cdots,\Gamma_{n-1}$ 的直和. 然后分别研究这些代数. 我们的方法来自 [24]. 这种方法同样被一些作者使用过, 如 [75][78].

命题 6.3.5. 元素 $E_u:=\frac{1}{n}\sum_{i,j\in Z_n}q^{-i(u+j)}G^ie_j$ 对 $u\in Z_n$ 是中心正交幂等元且 $\sum_{u\in Z_n}E_u=1$. 从而,

$$\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})\cong\bigoplus_{u\in Z_n}\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})E_u$$

证明. 我们只证明 t $E_uX=XE_u$, 其余的是容易的.

$$\begin{aligned}E_uX &= \frac{1}{n}\sum_{i,j\in Z_n}q^{-i(u+j)}G^ie_jX\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i,j\in Z_n}q^{-i(u+j)}G^i[Xe_{j+1}-\frac{\mu}{(d-1)!_q}(\gamma^{d-1}_{j+1}-\gamma^{d-1}_{j+1-d})+\frac{\mu q^{j+1}}{(d-1)!_q}G(\gamma^{d-1}_{j+1}-\gamma^{d-1}_{j+1-d})]\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\sum_{j\in Z_n}\frac{q^{-i(u+j)}\mu}{(d-1)!_q}(\gamma_{j+1}^{d-1}-\gamma_{j+1-d}^{d-1}) &= \sum_{j\in Z_n}q^{-i(u+j)}\frac{\mu}{(d-1)!_q}\gamma_{j+1}^{d-1}-\sum_{j\in Z_n}q^{-i(u+j)}\frac{\mu}{(d-1)!_q}\gamma_{j+1-d}^{d-1}\\ &= \sum_{j\in Z_n}q^{-i(u+j)}\frac{\mu}{(d-1)!_q}\gamma_{j+1}^{d-1}-\sum_{l\in Z_n}q^{-i(u+l+d)}\frac{\mu}{(d-1)!_q}\gamma_{l+1}^{d-1}\\ &= \frac{\mu}{(d-1)!_q}\sum_{j\in Z_n}(q^{-i(u+j)}-q^{-i(u+j+d)})\gamma_{j+1}^{d-1}\\ &= 0\end{aligned}$$

类似的,

$$\sum_{j\in Z_n}\frac{q^{-i(u+j)}\mu q^{j+1}}{(d-1)!_q}G(\gamma_{j+1}^{d-1}-\gamma_{j+1-d}^{d-1})=0$$

故,

$$\begin{aligned}E_uX &= \frac{1}{n}\sum_{i,j\in Z_n}q^{-i(u+j)}G^iXe_{j+1}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i,j\in Z_n}q^{-i(u+j)}q^{-i}XG^ie_{j+1}\\ &= X\frac{1}{n}\sum_{i,j\in Z_n}q^{-i(u+j+1)}G^ie_{j+1}\\ &= XE_u\end{aligned}$$

□

定义 $\Gamma_u:=\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})E_u$. 上面的命题告诉我们需研究 Γ_u. 我们现在定义一些 Γ_u 的幂等元. 它们未必是中心元，但我们却可以用它们去描述 Γ_u 的基.

命题 6.3.6. 设 $E_{u,j}=\sum_{v=0}^{\frac{n}{d}-1}e_{j+vd}E_u$ 对 $j\in Z_d$. 则 $E_{u,j}E_{u,l}=\delta_{jl}E_{u,j}$ 且 $\sum_{j=0}^{d-1}E_{u,j}=E_u$. 我们还有 $E_{u,j}=E_{u,j'}$ 当且仅当 $j\equiv j'$ *(mod d)*.

进一步的，Γ_u 具有下面的关系：

$$GE_{u,j}=q^{u+j}E_{u,j}=E_{u,j}G,\quad XE_{u,j}=E_{u,j-1}X$$

$$\gamma_l^mE_{u,j}=\begin{cases}E_{u,j+m}\gamma_l^m & \text{如果 } l\equiv j\ \ (mod\ d)\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

证明. 我们只证 $XE_{u,j}=E_{u,j-1}X$. 其余的证明同 [24] 的命题 2.7 的证明是一样的.

$$
\begin{aligned}
E_{u,j-1}X &= \sum_{v=0}^{\frac{n}{d}-1}(e_{j-1+vd}X)E_u \\
&= \sum_{v=0}^{\frac{n}{d}-1}[Xe_{j+vd} - \frac{\mu}{(d-1)!_q}(\gamma_{j+vd}^{d-1} - \gamma_{j+(v-1)d}^{d-1}) + \frac{\mu q^{j+vd}}{(d-1)!_q}G(\gamma_{j+vd}^{d-1} - \gamma_{j+(v-1)d}^{d-1})]E_u \\
&= \sum_{v=0}^{\frac{n}{d}-1}Xe_{j+vd}E_u = XE_{u,j}
\end{aligned}
$$

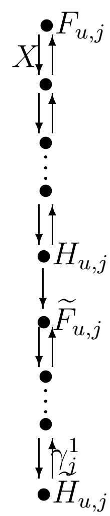
□

我们能刻画 Γ_u 的一组基和一个分次： $\Gamma_u = \bigoplus_{s=1-d}^{d-1}(\Gamma_u)_s$ 这里 $(\Gamma_u)_s = span\{X^t\gamma_j^m E_{u,j}|j \in Z_n, 0 \leq m, t \leq d-1, m-t = s\}$. 这是 G 的特征空间的和：如果 $yE_{u,j}$ 是 $(\Gamma_u)_s$ 的元，我们有

$$G \cdot yE_{u,j} = q^{s+j+u}yE_{u,j}, \quad yE_{u,j} \cdot G = q^{j+u}yE_{u,j}$$

现在设 $F_{u,j} := \gamma_j^{d-1}E_{u,j}$ 对 $j \in Z_n$. 如果 j 是 Z_n 的一个元，我们将其在 $\{1, \ldots, d\}$ 的代表记为 $< j >$ 而我们将其在 $\{0, \ldots, d-1\}$ 中的代表记为 $< j >^-$.

命题 6.3.7. 模 $\Gamma_u F_{u,j}$ 具有下面的形式：



这里 $H_{u,j} := X^{<2j+u-1>-1}F_{u,j}$, $\widetilde{F}_{u,j} := X^{<2j+u-1>^-}F_{u,j}$ 和 $\widetilde{H}_{u,j} := X^{d-1}F_{u,j}$. 在此图中，$\downarrow$ 表示 X 的作用而 $\uparrow$ 表示一个适当的忽略一个常数的箭向的作用，基向量都是 G 的特征向量.

注意到当 n $2j+u-1 \equiv 0(mod\ d)$ 时，单个的那个箭向不会出现，所以此模是单的且我们有 $H_{u,j} = \widetilde{H}_{u,j} = X^{d-1}F_{u,j}$ 及 $\widetilde{F}_{u,j} = F_{u,j}$.

为了证明此命题，我们需要下面的引理：

引理 6.3.8. (1) $X^m F_{u,j}=0$ 如果 $m\geq d$;

(2) 假定 $m<d$, 则元素 $\gamma^b_{d+j-m-1}X^m F_{u,j}$ 等于

$$q^{-\frac{b(2m-b+1)}{2}}\frac{(m)!_q}{(m-b)!_q}\prod(q^{2j+u-1-(m-t+1)-1})X^{m-b}F_{u,j}$$

如果 $b<m$ 否则为 0.

证明. (1): 只需证明 $X^d F_{u,j}=0$. 事实上， $X^d F_{u,j}=\mu(1-G^d)F_{u,j}=\mu(F_{u,j}-(q^{d-1+u+j})^d F_{u,j})=\mu(F_{u,j}-F_{u,j})=0$.

(2): 通过归纳 b 来证此. 当 $b=1$, 我们让一个箭向从左边通过 X. 利用命题 6.3.4 中的关系，我们有

$$\begin{aligned}\gamma^1_{j+d-1-m}X^m\gamma^{d-1}_j E_{u,j} &= (q^{-1}X\gamma^1_{j-m+d}-q^{-1}\gamma^0_{j-m+d}+q^{j-m-1+d}G\gamma^0_{j-m+d})X^{m-1}\gamma^{d-1}_j E_{u,j}\\ &= (q^{-1}X\gamma^1_{j-m+d}-q^{-1}(1-q^{2(j-m+d)+u})\gamma^0_{j-m+d})X^{m-1}\gamma^{d-1}_j E_{u,j} \quad (*)\end{aligned}$$

我们想计算 $\gamma^0_{j-m+d}X^{m-1}\gamma^{d-1}_j$ 是什么.

如果 $m=1$, 显然 $\gamma^0_{j-m+d}X^{m-1}\gamma^{d-1}_j=X^{m-1}\gamma^{d-1}_j$

如果 $m>1$, $\gamma^0_{j-m+d}X^{m-1}\gamma^{d-1}_j$

$$=[X\gamma^0_{j-m+d+1}-\frac{\mu}{(d-1)!_q}(\gamma^{d-1}_{j-m+d+1}-\gamma^{d-1}_{j-m+1})+\frac{\mu q^{j-m+d+1}}{(d-1)!_q}G(\gamma^{d-1}_{j-m+d+1}-\gamma^{d-1}_{j-m+1})]X^{m-2}\gamma^{d-1}_j$$

因为 $m-2<d-1$, 由在路的长度上的归纳知,

$$\gamma^{d-1}_l X^{m-2}\gamma^{d-1}_j=0 \quad 对 \ l\in Z_n$$

所以,

$$\begin{aligned}\gamma^0_{j-m+d}X^{m-1}\gamma^{d-1}_j &= X\gamma^0_{j-m+d+1}X^{m-2}\gamma^{d-1}_j\\ &= \cdots = X^{m-1}\gamma^0_{j+d-1}\gamma^{d-1}_j\\ &= X^{m-1}\gamma^{d-1}_j\end{aligned}$$

从而,

$$
\begin{aligned}
(*) &= q^{-1}X\gamma^1_{j-m+d}X^{m-1}\gamma^{d-1}_jE_{u,j}-q^{-1}(1-q^{2(j-m+d)+u})X^{m-1}\gamma^{d-1}_jE_{u,j}\\
&= q^{-1}X(q^{-1}X\gamma^1_{j-m+d+1}-q^{-1}(1-q^{2(j-m+d)+u+2})\gamma^0_{j-m+d-1})X^{m-2}\gamma^{d-1}_jE_{u,j}\\
&\quad -q^{-1}(1-q^{2(j-m+d)+u})X^{m-1}\gamma^{d-1}_jE_{u,j}\\
&= q^{-2}X^2\gamma^1_{j-m+d+1}X^{m-2}\gamma^{d-1}_jE_{u,j}+(-q^{-2}-q^{-1}+q^{2j-2m+u-1}+q^{2j-2m+u})X^{m-1}\gamma^{d-1}_jE_{u,j}\\
&= \cdots\\
&= q^{-m}X^m\gamma^1_{j+d-1}\gamma^{d-1}_jE_{u,j}+\sum_{p=1}^{m}(-q^{-p}+q^{2j-2m+u+p-2})X^{m-1}\gamma^{d-1}_jE_{u,j}\\
&= q^{-m}(m)_q(q^{2j-m+u-1}-1)X^{m-1}\gamma^{d-1}_jE_{u,j}
\end{aligned}
$$

□

命题 6.3.7 的证明: 这里我们应用引理 6.3.8 在 $b=1$ 时的情形,我们看到 $\gamma_{d+j-m-1}X^mF_{u,j}$ 等于 0 如果 $m\equiv 2j+u-1\ (mod\ d)$ 且否则是 $X^{m-1}F_{u,j}$ 的非 0 数乘. □

定义 6.3.1. 我们定义 Z_n 中的一个置换为 $\sigma_u(j):=d+j-<2j+u-1>$. 注意到在命题 6.3.7 的图中从 $H_{u,j}$ 而上的箭向就是 $\gamma^1_{\sigma_u(j)}$.

注 6.3.9. 容易看到 $\sigma_u(j)=j$ 当且仅当 $<2j+u-1>=d$, 且如果 $<2j+u-1>\neq d$, 则 $\sigma_u^2(j)=j+d$ 从而 σ_u 的阶为 $\frac{2n}{d}$.

我们现在一些大的模 (我们将看到它们是不可分投射模的完全集).

引理 6.3.10. *如果 $<2j+u-1>\neq d$, 则存在次为 $d-<2j+u-1>^- -1$ 的元 $K_{u,j}$ 使得 $H_{u,j}=\gamma^1_{\sigma_u(j)-1}K_{u,j}$.*

证明. 考虑 $H_{u,j}=X^{<2j+u-1>-1}\gamma^{d-1}_jE_{u,j}$. 我们首先让一个箭向通过 X. 则存在一个常数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2j+u-2}$ 使得

$$
\begin{aligned}
H_{u,j} &= X^{<2j+u-1>-1}\gamma^{d-1}_jE_{u,j}\\
&= qX^{<2j+u-1>-2}\gamma^1_{j+d-3}X\gamma^{d-2}_jE_{u,j}+\alpha_1X^{<2j+u-1>-2}\gamma^{d-2}_jE_{u,j}\\
&= q^2X^{<2j+u-1>-3}\gamma^1_{j+d-4}X^2\gamma^{d-2}_jE_{u,j}+(\alpha_1+\alpha_2)X^{<2j+u-1>-2}\gamma^{d-2}_jE_{u,j}
\end{aligned}
$$

这里第三个等式由下面的计算得到：

$$\begin{aligned}
\gamma^1_{j+d-4}X^2 &= (q^{-1}X\gamma^1_{j+d-3} - q^{-1}\gamma^0_{j+d-3} + q^{j+d-4}G\gamma^0_{j+d-3})X \\
&= q^{-1}X(q^{-1}X\gamma^1_{j+d-2} - q^{-1}\gamma^0_{j+d-2} + q^{j+d-3}G\gamma^0_{j+d-3}) \\
&\quad -q^{-1}[X\gamma^0_{j+d-2} - \frac{\mu}{(d-1)!_q}(\gamma^{d-1}_{j+d-2} - \gamma^{d-1}_{j-2}) + \frac{\mu q^{j+d-1}}{(d-1)!_q}G(\gamma^{d-1}_{j+d-2} - \gamma^{d-1}_{j-2})] \\
&\quad +q^{j+d-4}G[X\gamma^0_{j+d-2} - \frac{\mu}{(d-1)!_q}(\gamma^{d-1}_{j+d-2} - \gamma^{d-1}_{j-2}) + \frac{\mu q^{j+d-1}}{(d-1)!_q}G(\gamma^{d-1}_{j+d-2} - \gamma^{d-1}_{j-2})]
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
X^{<2j+u-1>-3}\gamma^1_{j+d-4}X^2\gamma^{d-2}_j E_{u,j} &= X^{<2j+u-1>-3}(q^{-2}X^2\gamma^1_{j+d-2} - q^{-1}X\gamma^0_{j+d-2} \\
&\quad +q^{j+d-4}GX\gamma^0_{j+d-2} - q^{-2}X\gamma^0_{j+d-2} \\
&\quad +q^{j+d-4}XG\gamma^0_{j+d-2})\gamma^{d-2}_j E_{u,j}
\end{aligned}$$

重复上面的过程，我们有

$$\begin{aligned}
H_{u,j} &= \cdots \\
&= q^{2j+u-2}\gamma^1_{\sigma_u(j)-1}X^{<2j+u-1>-1}\gamma^{d-2}_j E_{u,j} \\
&\quad +(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2j+u-2})X^{<2j+u-1>-2}\gamma^{d-2}_j E_{u,j}
\end{aligned}$$

我们现在在最后一个等式的第二项重复上面的过程直到有一个箭向位于所有项的前面. 所以，存在常数 β'_i, β''_i 和 β_i 使得下面的等式成立：

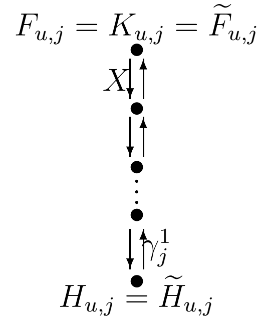
$$\begin{aligned}
H_{u,j} &= q^{2j+u-2}\gamma^1_{\sigma_u(j)-1}X^{<2j+u-1>-1}\gamma^{d-2}_j E_{u,j} + \beta'_1 X^{<2j+u-1>-2}\gamma^{d-2}_j E_{u,j} \\
&= q^{2j+u-2}\gamma^1_{\sigma_u(j)-1}X^{<2j+u-1>-1}\gamma^{d-2}_j E_{u,j} \\
&\quad +\beta'_1(q^{2j+u-3}\gamma^1_{\sigma_u(j)-1}X^{<2j+u-1>-2}\gamma^{d-3}_j E_{u,j} + \beta''_2 X^{<2j+u-1>-3}\gamma^{d-3}_j E_{u,j}) \\
&= q^{2j+u-2}\gamma^1_{\sigma_u(j)-1}X^{<2j+u-1>-1}\gamma^{d-2}_j E_{u,j} + \beta_1\gamma^1_{\sigma_u(j)-1}X^{<2j+u-1>-2}\gamma^{d-3}_j E_{u,j} \\
&\quad +\beta'_2 X^{<2j+u-1>-3}\gamma^{d-3}_j E_{u,j} \\
&= \cdots \\
&= q^{2j+u-2}\gamma^1_{\sigma_u(j)-1}X^{<2j+u-1>-1}\gamma^{d-2}_j E_{u,j} + \gamma^1_{\sigma_u(j)-1}\sum_{p=2}^{<2j+u-1>}\beta_{p-1}X^{<2j+u-1>-p}\gamma^{d-p-1}_j E_{u,j} \\
&= \gamma^1_{\sigma_u(j)-1}K_{u,j}
\end{aligned}$$

这里 $K_{u,j}$ 是次为 $d- < 2j+u-1 > -1 = d- < 2j+u-1 >^- -1$ 的非 0 元. $\square$

定义 6.3.2. 如果 $< 2j+u-1 >= d$, 设 $K_{u,j} = F_{u,j}$. 注意它的次为 $d-1$.

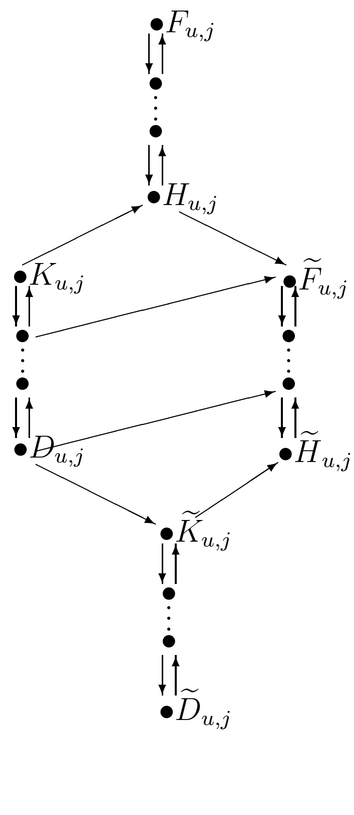
现在我们考虑 $\Gamma_u K_{u,j}$. 下面的结论是直接的.

命题 6.3.11. 假定 $<2j+u-1>=d$. 定义 $L(u,j):=\Gamma_u K_{u,j}$. 则 $L(u,j)$ 具有下面的结构:



当 $<2j+u-1>\neq d$ 时，我们有下面的结构:

命题 6.3.12. 假定 $<2j+u-1>\neq d$. 则模 $\Gamma_u K_{u,j}$ 具有下面的结构:



这里 $D_{u,j}:=X^{d-<2j+u-1>^{-}-1}K_{u,j}$, $\widetilde{K}_{u,j}=X^{d-<2j-u+1>}$ 且 $\widetilde{D}_{u,j}:=X^{d-1}K_{u,j}$. 如前, $\downarrow$ 表示 X 的作用而 $\uparrow$ 表示一个适当的忽略一个常数的箭向的作用. $\nearrow$ 同

样表示一个适当的忽略一个常数的箭向的作用.

为证此，我们需要一些准备.

引理 6.3.13. 对 $s < d$, 我们有

$$\gamma^0_{\sigma_u(j)-s} X^{s-1} K_{u,j} = X^{s-1} \gamma^0_{\sigma_u(j)-1} K_{u,j}$$

证明.

$$\begin{aligned}\gamma^0_{\sigma_u(j)-s} X^{s-1} K_{u,j} &= [X\gamma^0_{\sigma_u(j)-s+1} - \frac{\mu}{(d-1)!_q}(\gamma^{d-1}_{\sigma_u(j)-s+1} - \gamma^{d-1}_{\sigma_u(j)-s+1-d}) \\ &\quad + \frac{\mu q^{\sigma_u(j)-s+1}}{(d-1)!_q} G(\gamma^{d-1}_{\sigma_u(j)-s+1} - \gamma^{d-1}_{\sigma_u(j)-s+1-d})] X^{s-2} K_{u,j}\end{aligned}$$

不断的利用命题 6.3.4 的 $(*2)$ ，容易发现对任意长度为 $d-1$ 的路，我们有

$$\gamma^{d-1}_i X^{s-2} K_{u,j} = \sum c_{jl} X^j \gamma^l_m K_{u,j}$$

这里 $l \geq 2$. 都是由引理 6.3.9 和命题 6.3.7 ， $\gamma^l_m K_{u,j} = 0$ 对 $l \geq 2$. 从而

$$\gamma^0_{\sigma_u(j)-s} X^{s-1} K_{u,j} = X\gamma^0_{\sigma_u(j)-s+1} X^{s-2} K_{u,j}$$

重复这个过程，我们得到我们想要的. □

引理 6.3.14. 我们有 $\gamma^t_{\sigma_u(j)-s-1} X^s K_{u,j} = \sum_{b=s-t+1}^{s} q^{-b} c_{b,s} \gamma^{b-s+t-1}_{\sigma_u(j)-b} X^b H_{u,j} + c_{s-t,s} X^{s-t} K_{u,j}$ 这里 $c_{s,s} = 1$, $c_{b,s} = 0$ 如果 $b < 0$, 而 $c_{b,s} = \zeta_s \cdots \zeta_{b+1}$ 这里 $\zeta_s = (s)_q q^{-s}(q^{-(2j+u-1)-s} - 1)$ 如果 $0 \leq b \leq s-1$.

证明. 证明是通过在 t 上的归纳得到，我们写出 $t=1$ 的情形：

$$\begin{aligned}
\gamma^1_{\sigma_u(j)-s-1}X^sK_{u,j} &= q^{-1}X\gamma^1_{\sigma_u(j)-s}X^{s-1}K_{u,j}+(-q^{-1}+q^{\sigma_u(j)-s-1}G)\gamma^0_{\sigma_u(j)-s}X^{s-1}K_{u,j}\\
&= q^{-1}X\gamma^1_{\sigma_u(j)-s}X^{s-1}K_{u,j}+(-q^{-1}+q^{\sigma_u(j)-s-1}G)X^{s-1}\gamma^0_{\sigma_u(j)-1}K_{u,j}\\
&= q^{-1}X\gamma^1_{\sigma_u(j)-s}X^{s-1}K_{u,j}+(-q^{-1}+q^{\sigma_u(j)-s-1}G)X^{s-1}K_{u,j}\\
&= q^{-1}X\gamma^1_{\sigma_u(j)-s}X^{s-1}K_{u,j}-(q^{-1}-q^{-2j-u+1-2s})X^{s-1}K_{u,j}\\
&= q^{-1}X(q^{-1}X\gamma^1_{\sigma_u(j)-s+1}-q^{-1}\gamma^0_{\sigma_u(j)-s+1}+q^{\sigma_u(j)-s}G\gamma^0_{\sigma_u(j)-s+1})X^{s-2}K_{u,j}\\
&\quad -(q^{-1}-q^{-2j-u+1-2s})X^{s-1}K_{u,j}\\
&= q^{-2}X^2\gamma^1_{\sigma_u(j)-s+1}X^{s-2}K_{u,j}-q^{-1}X(q^{-1}-q^{-2j-u+1-2s+2})X^{s-2}K_{u,j}\\
&\quad -(q^{-1}-q^{-2j-u+1-2s})X^{s-1}K_{u,j}\\
&= q^{-2}X^2\gamma^1_{\sigma_u(j)-s+1}X^{s-2}K_{u,j}\\
&\quad -(q^{-1}+q^{-2}-q^{-2j-u+1-2s}-q^{-2j-u+1-2s+1})X^{s-1}K_{u,j}\\
&= \cdots\\
&= q^{-s}X^s\gamma^1_{\sigma_u(j)-1}K_{u,j}+\zeta_sX^{s-1}K_{u,j}
\end{aligned}$$

□

引理 6.3.15. 对 $0\le s\le d-<2j+u-1>^- -1$, 元素 $X^sK_{u,j}$ 和 $X^s\widetilde{F}_{u,j}$ 是线性无关的.

证明. 本引理的证明同 [24] 中的引理 2.18 的证明是一样的. 为了完整，我们将其写出.

假定 $\alpha X^sK_{u,j}+\beta X^s\widetilde{F}_{u,j}=0$ 这里 $0\le s\le d-<2j+u-1>^- -1$. 乘以 $\gamma^{s+1}_{\sigma_u(j)-1-s}$ 并利用引理 5.8，我们有 $\gamma^{s+1}_{\sigma_u(j)-1-s}X^s\widetilde{F}_{u,j}$ 是 $(q^{2j+u-1-(s+<2j+u-1>-(s+1)+1)}-1)X^{<2j+u-1>}F_{u,j}$（它不是 0）的非 0 数乘.

另外，由引理 6.3.13， $\gamma^{s+1}_{\sigma_u(j)-1-s}X^sK_{u,j}$ 等于 $\sum_{b=0}^{s}q^{-b}c_{b,s}\gamma^b_{\sigma_u(j)-b}X^bH_{u,j}$. 现在 $\zeta_p=0$ 当且仅当 $p\equiv-2j-u+1\ (mod\ d)$. 但是如果 $0\le b+1\le p\le s\le d-<2j+u-1>^- -1$, 我们有 $\zeta_p\neq0$ 从而 $c_{b,s}\neq0$ 对所有的 b,s 和 $0\le b+1\le p\le s\le d-<2j+u-1>^- -1$.

所以在等式 $\alpha X^sK_{u,j}+\beta X^s\widetilde{F}_{u,j}=0$ 两边乘上 $\gamma^{s+1}_{\sigma_u(j)-1-s}$ 得到 $\alpha\gamma^{s+1}_{\sigma_u(j)-1-s}X^sK_{u,j}$ 的非 0 数乘而 $\gamma^{s+1}_{\sigma_u(j)-1-s}X^sK_{u,j}$ 不是 0，所以 $\alpha=0$ 从而 $\beta=0$. □

命题 6.3.11 的证明： 应用引理 6.3.13 在 $t=d-1=s$ 的情形，我们看到 $\gamma^{d-1}_{\sigma_u(j)-d}X^{d-1}K_{u,j}$ 是 $\widetilde{F}_{u,j}$ 的非 0 数乘：

如果 $b\le d-<2j+u-1>^- -1$, 则 $c_{b,d-1}=0$;

如果 $b\ge d-<2j+u-1>^- +1$, 则 $\gamma^{b-1}_{\sigma_u(j)-b}X^bH_{u,j}=0$;

最后，如果 $b=d-<2j+u-1>^-$, 则 $\gamma^{d-1}_{\sigma_u(j)-d}X^{d-1}K_{u,j}$ 是 $X^{<2j+u-1>}\gamma^{d-1}_jE_{u,j}$ 的非 0 数乘.

所以，特别的， $X^sK_{u,j}\neq 0$ 对所有的 $s=0,\ldots,d-1$. 剩余的结构都可由此和引理 6.3.14 得到. $\square$

由命题 6.3.11, 容易发现所有可能的 $\Gamma_uK_{u,j}$ 的子模.

推论 6.3.16. 当 $<2j+u-1>\neq d$, 模 $\Gamma_uK_{u,j}$ 恰有两个合成序列：

$$\Gamma_uK_{u,j}\supset\Gamma_uF_{u,j}+\Gamma_u\widetilde{D}_{u,j}\supset\Gamma_uF_{u,j}\supset\Gamma_u\widetilde{F}_{u,j}\supset 0$$

和

$$\Gamma_uK_{u,j}\supset\Gamma_uF_{u,j}+\Gamma_u\widetilde{D}_{u,j}\supset\Gamma_u\widetilde{D}_{u,j}\supset\Gamma_u\widetilde{F}_{u,j}\supset 0\quad\square$$

当 $<2j+u-1>\neq d$ 时，我们定义 $L(u,j):=\Gamma_uK_{u,j}/(\Gamma_uF_{u,j}+\Gamma_u\widetilde{D}_{u,j})$. 由此推论，它是一个维数为 $d-<2j+u-1>^-$ 的单模，其在此推论的合成序列的合成因子为 $L(u,j)$, $L(u,\sigma_u(j))$, $L(u,\sigma_u^{-1}(j))$ 和 $L(u,j)$.

为了分解 Γ_u 为不可分模的直和，我们先发现与 $\Gamma_uK_{u,j}$ 同构的且位于 Γ_u 中的模.

引理 6.3.17. 如果 $0\le h\le d-<2j+u-1>^- -1$, 则右乘 X^h 得到 Γ_u －模的同构： $\Gamma_uK_{u,j}\overset{\cong}{\to}\Gamma_uK_{u,j}X^h$.

证明. 其证明与 [24] 的引理 2.22 的证明是类似的.

为证此引理，我们必须先证右乘 X^h 将 $\Gamma_uK_{u,j}$ 嵌入到 $\Gamma_uK_{u,j}X^h$ 中去. 所以只要证 h 是极大的情形. 为此，我们只需证 $\widetilde{H}_{u,j}X^h\neq 0$ 和 $\widetilde{D}_{u,j}X^h\neq 0$. 因为，由命题 6.3.11, $\widetilde{H}_{u,j}$ 等于 $\widetilde{D}_{u,j}$ 和某些箭向的乘积，所以 $\widetilde{H}_{u,j}X^h\neq 0$ 隐含 $\widetilde{D}_{u,j}X^h\neq 0$. 从而，我们只需考虑 $\widetilde{H}_{u,j}X^{d-<2j+u-1>^- -1}$.

为了计算此项，我们需要一个类似与引理 6.3.8 中的关系：

$$X^{d-1}\gamma_j^{d-1}E_{u,j}X^b=q^{-\frac{b(2(d-1)-b+1)}{2}}\frac{(d-1)!_q}{(d-1-b)!_q}\prod_{t=1}^{b}(q^{2j+(d-1)+u+t}-1)X^{d-1}\gamma_{j+b}^{d-1-b}E_{u,j+b}$$

此公式在 [24] 中已经给出 (见它的引理 2.22 的证明). 容易看到对我们的情形，它也是对的. 利用此公式, 我们看到 $\widetilde{H}_{u,j}X^{d-<2j+u-1>^- -1}$ 是 $\prod_{t=1}^{d-<2j+u-1>^- -1}(q^{2j-1+u+t}-1)X^{d-1}\gamma_{j+d-<2j+u-1>^- -1}^{<2j+u-1>^-}E_{u,-j-u}$ （它不是 0 ）的非 0 数乘. $\square$

我们现在来分解 Γ_u. 注意到如果 $<2j+u-1>\neq d$, 模 $\Gamma_uK_{u,j}$ 的维数为 $2d$ 但如果 $<2j+u-1>=d$, 它的维数为 d.

定理 6.3.18. Γ_u 以下述的方式分解为不可分模的直和：

$$\Gamma_u=\bigoplus_{j\in Z_n}\bigoplus_{h=0}^{d-<2j+u-1>^{-}-1}\Gamma_uK_{u,j}X^h$$

证明. 我们首先证明此和是直和. 在 h 的和是直和是因为不同的项都位于不同的右 G- 特征空间中. 外面的和也是直和是因为它们有不同的 socle: $\bigoplus_{h=0}^{d-<2j+u-1>^{-}-1}\Gamma_uK_{u,j}X^h$ 的 socle 是 $\bigoplus_{h=0}^{d-<2j+u-1>^{-}-1}L(u,j)X^h$ 这里 $L(u,j)X^h\cong L(u,j)$.

等号由维数的计算得到. 例如, 当 d 是奇数, $dim_k\bigoplus_{j\in Z_n}\bigoplus_{h=0}^{d-<2j+u-1>^{-}-1}\Gamma_uK_{u,j}X^h=\frac{n}{d}(d\cdot d+2d\frac{d(d-1)}{2})=nd+nd(d-1)=nd^2$ 从而 $ndim_k\bigoplus_{j\in Z_n}\bigoplus_{h=0}^{d-<2j+u-1>^{-}-1}\Gamma_uK_{u,j}X^h=n^2d^2=dim_k\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$. 所以 $\Gamma_u=\bigoplus_{j\in Z_n}\bigoplus_{h=0}^{d-<2j+u-1>^{-}-1}\Gamma_uK_{u,j}X^h$. □

推论 6.3.19. 设 $P(u,j)=\Gamma_uK_{u,j}$ 对所有的 l u,j. 模 $P(u,j)$ 是投射的并且它们代表了不同的投射 $\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$- 模的同构类, 这里 u 和 j 取自 Z_n.

当 $<2j+u-1>\neq d$ 时, 它的结构为:

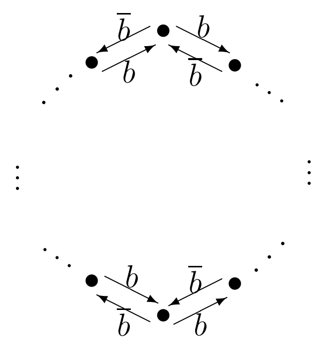
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & L(u,j) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ L(u,\sigma_u^{-1}(j)) \arrow[dr, dash] & & L(u,\sigma_u(j)) \arrow[dl, dash] \\ & L(u,j) & \end{tikzcd}$$

当 $<2j+u-1>=d$ 时, $P(u,j)=L(u,j)$ 是单的.

进一步的, $L(u,j)$ 代表代表了不同的单 $\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$- 模的同构类, 这里 u 和 j 取自 Z_n. 那些维数为 d 的还是投射的且有 $\frac{n^2}{d}$ 个投射单模.

有了这些准备, 我们可以给出 $\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$ 的 quiver 和关系.

定理 6.3.20. $\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$ 的 *Ext-quiver* 有 $\frac{n^2}{d}$ 个孤立的顶点（它们对应单的投射模）和 $\frac{n(d-1)}{2}$ 下述 *quiver* 的拷贝：



此 *quiver* 有 $\frac{2n}{d}$ 个顶点和 $\frac{4n}{d}$ 箭向. 此 *quiver* 上的关系为 bb, $\overline{b}\overline{b}$ 和 $b\overline{b}-\overline{b}b$. 此 *quiver* 的顶点对应这单模 $L(u,j), L(u,\sigma_u(j)),\cdots, L(u,\sigma_u^{\frac{2n}{d}-1}(j))$.

证明. 此定理的证明同 [24] 的定理 2.25 的证明是一样的. $\square$

定义 6.3.3. 一个代数 A 称为特殊 *biserial* 的如果它的基本代数 kQ/I 满足:

(1) Q 的任意顶点至多是两个箭向的起点.

(1)' Q 的任意顶点至多是两个箭向的终点.

(2) 给定一个箭向 β, 存在至多一个箭向 γ 满足 $s(\beta)=e(\gamma)$ 使得 $\beta\gamma\notin I$.

(2)' 给定一个箭向 β, 存在至多一个箭向 γ 满足 $e(\beta)=s(\gamma)$ 使得 $\gamma\beta\notin I$.

下面的结论已经在 [23] 中得到 (见 [23] 的 II.3.1).

引理 6.3.21. 任意特殊 *biserial* 代数是 *tame* 或有限表示型的. $\square$

定理 6.3.22. $\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$ 是一个 *tame* 代数.

证明. 由定理 6.3.19, 我们知道 $\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$ 是一个特殊 biserial 代数且其 quiver 是 covering quiver 的并. 从而，由引理 6.3.20，它是 tame 或有限表示型的. 再由表示型数定理，我们知道 $\mathcal{D}(\Gamma_{n,d})$ 是 tame 的. □

第七章 广义路（余）代数

本章可以看成是为了解决我们分类有限维 Hopf 代数的分类步骤（ 4 ）的一种尝试. 我们推广了通常的路代数 (路余代数) 的概念从而得到所谓的广义路代数 (广义路余代数). 我们讨论了一些有关于广义路 (余) 代数的的性质.

§7.1 广义路余代数

本节给出了广义路余代数的定义和它的一些基本结论.

设 $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ 是一个 quiver 且 $\mathcal{C} = \{S_i | i \in \Delta_0\}$ 是一组 k- 余代数. S_i 的余乘法记为 $\triangle_i$ 、余单位记为 ε_i. $\bigcup_{i\in\Delta_0} S_i$ 中的元素称为 $\mathcal{C}$ - 长度 *0* 的路 , 且对每一个 $n \geq 1$, 一个 $\mathcal{C}$-长度 n 的路 定义为 $a_1\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}$, 这里 e $(s(\beta_1)|\beta_1\cdots\beta_n|e(\beta_n))$ 是 Δ 中的长度 n 的路，对每一个 $i = 1, \cdots, n$, $a_i \in S_{s(\beta_i)}$ 和 $a_{n+1} \in S_{e(\beta_n)}$. 现在考虑以所有的 $\mathcal{C}$- 路为基的 k- 线性空间模掉形如下面元的商 R

$$a_1\beta_1\cdots\beta_{j-1}(\sum_{l=1}^{m} k_la_j^l)\beta_ja_{j+1}\cdots a_n\beta_na_{n+1} - \sum_{l=1}^{m} k_la_1\beta_1\cdots\beta_{j-1}a_j^l\beta_ja_{j+1}\cdots a_n\beta_na_{n+1}$$

这里 $(s(\beta_1)|\beta_1\cdots\beta_n|e(\beta_n))$ 是 Δ 的长度 n 的路对每一个 $i = 1, \cdots, n$, $a_i \in S_{s(\beta_i)}$, $a_{n+1} \in S_{e(\beta_n)}$, 和 $k_l \in k$, $a_j^l \in S_{s(\beta_j)}$ 对 $l = 1, \cdots, m$. 在 R 上定义下面的余乘法和余单位：给定 $a_1\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}$, 我们定义

$$\triangle(a_1\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} a_1\beta_1\cdots a_{i-1}\beta_{i-1}a_i' \otimes a_i''\beta_ia_{i+1}\cdots a_n\beta_na_{n+1}$$

特别的， $\triangle(a_i) = \triangle_i(a) = a_i' \otimes a_i''$ 对 $a_i \in S_i$, $i \in \Delta_0$. 余单位 ε 定义为

$$\varepsilon(p) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } p \text{ 的长度 是 } n > 0 \\ \varepsilon_i(p), & \text{如果 } p \in S_i \text{ 对某个 } i \in \Delta_0 \end{cases}$$

容易证明在上面的余乘法和余单位的定义下 R 是一个 k- 余代数. 这个余代数称为 Δ 的 $\mathcal{C}$-路余代数. 并记为 $R = k(\Delta, \mathcal{C})$. 一般的，我们称这种类型的余代数为 广义路余代数 当我们知道 Δ 和 $\mathcal{C}$ 时. 显然， $k(\Delta, \mathcal{C})$ 是一个以长度分次的分次余代数. 即,

$$k(\Delta, \mathcal{C}) = k(\Delta_0, \mathcal{C}) \oplus k(\Delta_1, \mathcal{C}) \oplus k(\Delta_2, \mathcal{C}) \oplus \cdots \oplus k(\Delta_i, \mathcal{C}) \oplus \cdots$$

这里 $k(\Delta_i, \mathcal{C})$ 表示由所有 $k(\Delta, \mathcal{C})$ 中长度 i 的 $\mathcal{C}$- 路生成的空间且 $\triangle(k(\Delta_n, \mathcal{C})) \subseteq \sum_{i=0}^{n} k(\Delta_i, \mathcal{C}) \otimes k(\Delta_{n-i}, \mathcal{C})$.

注 7.1.1. *(i)* 注意到如果 $S_i = k$ 对每一个 $i \in \Delta_0$, 则上面定义的余代数 $k(\Delta, \mathcal{C})$ 就是通常的路余代数 $k\Delta$ *of* Δ.

(ii) 任意余代数 C 可以 实现 为一个 $\mathcal{C}$- 路余代数 $k(\Delta, \mathcal{C})$. 事实上，只需取 Δ 为只有一个顶点的 *quiver* 和 $\mathcal{C} = \{C\}$ 即可. 另外，容易发现将一个 k- 余代数实现为 $\mathcal{C}$- 路余代数一般是不唯一的. 例如， Δ 是一个顶点的 *quiver,* Δ' 是两个顶点无箭向的 *quiver.* 则 $S_1 \oplus S_2 \cong k(\Delta, S_1 \oplus S_2) \cong k(\Delta', \mathcal{C} = \{S_1, S_2\})$ 对任意两个余代数 S_1, S_2. 我们将在第三节中讨论这个问题.

我们可以给 $\mathcal{C}$- 路余代数一个等价的定义. 为此，我们先描述一下所谓的余张量余代数. 给定一个余代数 C 和 C- 双余模 $M \in {}^C\mathcal{M}^C$. 左（右）余模结构映射记为 δ_L (δ_R). 设

$$\mathrm{CoT}_C(M) = C \oplus M \oplus M^{\Box 2} \oplus \cdots \oplus M^{\Box n} \oplus \cdots$$

定义一个余单位 ε on $\mathrm{CoT}_C(M)$ by

$$\varepsilon|_{M^{\Box i}} = 0 \text{ 对 } i \geq 1, \text{ 和 } \varepsilon|_C = \varepsilon_C$$

定义 $\triangle|_C = \triangle_C$, $\triangle|_M = \delta_L + \delta_R$. 一般的，对 $m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \in M^{\Box n}$, 我们定义

$$\begin{aligned} \triangle(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) &= \delta_L(m_1) \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_n + m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \\ &\quad + m_1 \otimes \cdots \otimes m_n + \cdots + m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \\ &\quad + m_1 \otimes \cdots \otimes \delta_R(m_n) \\ &\quad \in C \otimes M^{\Box n} \oplus M \otimes M^{\Box n-1} \oplus M^{\Box 2} \otimes M^{\Box n-2} \\ &\quad \oplus \cdots \oplus M^{\Box n-1} \otimes M \oplus M^{\Box n} \otimes C \end{aligned}$$

在这样 $\triangle$ 和 ε 的定义下， $\mathrm{CoT}_C(M)$ 是一个余代数 (见 [60]) 并称为 C 上双余模 M 的余张量余代数.

设 $R = k(\Delta, \mathcal{C})$ 是一个 $\mathcal{C}$- 路余代数. 对任意的 $x \in k(\Delta, \mathcal{C})$, 记 $(x')_i \otimes x''$ 为 $\triangle(x)$ 中使得 $x' \in k(\Delta_i, \mathcal{C})$ 的项的和. 例如，如果 $x = a + b\beta c$ 这里 $a \in k(\Delta_0, \mathcal{C}), b\beta c \in k(\Delta_1, \mathcal{C})$, 则 $(x')_0 \otimes x'' = a' \otimes a'' + b' \otimes b''\beta c$. 类似的，我们定义为 $\triangle(x)$ 中使得 $x'' \in k(\Delta_i, \mathcal{C})$ 的项的和. 显然， $\triangle(x) = \sum_{i \geq 0}(x')_i \otimes x'' = \sum_{i \geq 0} x' \otimes (x'')_i$.

命题 7.1.2. *(1):* 对任意 $\mathcal{C}$- 路余代数 $k(\Delta, \mathcal{C})$, $k(\Delta_n, \mathcal{C})$ 是一个 $k(\Delta_0, \mathcal{C})$- 双余模对任意的 $n \geq 0$. 双余模结构映射定义为：对任意的 $x \in k(\Delta_n, \mathcal{C})$,

$$\delta_L(x) := (x')_0 \otimes x'' \text{ 和 } \delta_R(x) := x' \otimes (x'')_0$$

(2): 我们有余代数同构 $k(\Delta, \mathcal{C}) \cong CoT_{k(\Delta_0, \mathcal{C})}(k(\Delta_1, \mathcal{C}))$.

证明. (1) 首先注意到 $k(\Delta_0,\mathcal{C})$ 总是 $k(\Delta,\mathcal{C})$ 的一个子余代数. 事实上，容易看到 $k(\Delta_0,\mathcal{C})=\oplus_{i\in\Delta_0}S_i$ 如果 $\mathcal{C}=\{S_i|i\in\Delta_0\}$. 对 $\sum a_1\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}\in k(\Delta_n,\mathcal{C})$, 我们有

$$\begin{aligned}(id\otimes\delta_L)\delta_L(\sum a_1\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}) &= \sum(id\otimes\delta_L)(a_1'\otimes a_1''\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1})\\ &= \sum a_1'\otimes a_1''\otimes a_1'''\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}\\ &= (\triangle\otimes id)\delta_L(\sum a_1\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varepsilon\otimes id)\delta_L(\sum a_1\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}) &= \sum(\varepsilon\otimes id)(a_1'\otimes a_1''\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1})\\ &= \sum \varepsilon(a_1')\otimes a_1''\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}\\ &= \sum a_1\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}\end{aligned}$$

从而 $k(\Delta_n,\mathcal{C})$ 是一个左 $k(\Delta_0,\mathcal{C})$- 余模通过 δ_L. 类似的，我们可以证明 $k(\Delta_n,\mathcal{C})$ 是一个右 $k(\Delta_0,\mathcal{C})$- 余模通过结构映射 δ_R. $(id\otimes\delta_R)\delta_L=(\delta_L\otimes id)\delta_R$ 可以直接得到. 从而， $k(\Delta_n,\mathcal{C})$ 是一个 $k(\Delta_0,\mathcal{C})$- 双余模.

(2) 由 (1), $k(\Delta_1,\mathcal{C})$ 是一个 $k(\Delta_0,\mathcal{C})$- 双余模. 从而余张量余代数 $\mathrm{CoT}_{k(\Delta_0,\mathcal{C})}(k(\Delta_1,\mathcal{C}))$ 可以构造的出来. 假定 $a_1\beta_1a_2\otimes a_3\beta_2a_4\in k(\Delta_1,\mathcal{C})^{\Box 2}$. 即，$(id\otimes\delta_L-\delta_R\otimes id)(a_1\beta_1a_2\otimes a_3\beta_2a_4)=0$. 但是容易看到 $(id\otimes\delta_L-\delta_R\otimes id)(a_1\beta_1a_2\otimes a_3\beta_2a_4)=0$ 当且仅当 $(\triangle\otimes id)(a_2\otimes a_3)=(id\otimes\triangle)(a_2\otimes a_3)$. 类似的，我们有 $a_1\beta_1a_2\otimes\cdots\otimes a_{2n-1}\beta_na_{2n}\in k(\Delta_1,\mathcal{C})^{\Box n}$ 当且仅当 $(\triangle\otimes id)(a_i\otimes a_{i+1})=(id\otimes\triangle)(a_i\otimes a_{i+1})$ 对 $i=2,4,\cdots,2n-2$.

定义 $F:\ k(\Delta,\mathcal{C})\to\mathrm{CoT}_{k(\Delta_0,\mathcal{C})}(k(\Delta_1,\mathcal{C}))$ 通过

$$F|_{k(\Delta_0,\mathcal{C})\oplus k(\Delta_1,\mathcal{C})}:=id,\ \ F(a_1\beta_1a_2\beta_2a_3\cdots a_n\beta_na_{n+1}):=a_1\beta_1\triangle(a_2)\beta_2\triangle(a_3)\cdots\triangle(a_n)\beta_na_{n+1}$$

这里 $a_1\beta_1a_2\beta_2a_3\cdots a_n\beta_na_{n+1}\in k(\Delta_n,\mathcal{C})$ 对 $n\geq 2$. 由 $k(\Delta,\mathcal{C})$ 的余结合性，我们总有 $(\triangle\otimes id)(a_i'\otimes a_i'')=(id\otimes\triangle)(a_i'\otimes a_i'')$ for $i=2,3,\cdots,n$. 这意味 $a_1\beta_1\triangle(a_2)\beta_2\triangle(a_3)\cdots\triangle(a_n)\beta_na_{n+1}\in k(\Delta_1,\mathcal{C})^{\Box n}$ 对 $n\geq 2$. 所以 F 是良定义的. 我们留给读者去验证 F 是一个余代数同态.

为了证明 F 是双射, 我们给出 F 的逆. 定义 $G:\ \mathrm{CoT}_{k(\Delta_0,\mathcal{C})}(k(\Delta_1,\mathcal{C}))\to k(\Delta,\mathcal{C})$ 通过

$$G|_{k(\Delta_0,\mathcal{C})\oplus k(\Delta_1,\mathcal{C})}:=id$$

且对 $a_1\beta_1a_2\otimes a_3\beta_2a_4\otimes\cdots\otimes a_{2n-1}\beta_na_{2n}\in k(\Delta_1,\mathcal{C})^{\Box n}$,

$$G(a_1\beta_1a_2\otimes a_3\beta_2a_4\otimes\cdots\otimes a_{2n-1}\beta_na_{2n}):=a_1\beta_1\varepsilon(a_2)a_3\beta_2\cdots\varepsilon(a_{2n-2})a_{2n-1}\beta_na_{2n}$$

直接证明得 $FG=id$ 和 $GF=id$. $\Box$

下述的引理是余张量余代数 “泛性质 ”. 这在后面经常用到.

引理 7.1.3. (见 [60] 的定理 3.8) 设 $X \xrightarrow{\psi} CoT_C(M)$ 是一个余代数同态. 设 $\psi_n := p_n\psi : X \to M^{\square n}$ 对 $n \geq 0$, 这里 $p_n: CoT_C(M) \to M^{\square n}$ 是投射. 则 n

(1) $\psi_0: X \to C$ 是一个余代数同态.

(2) $\psi_1: X \to M$ 是一个 C- 双余模同态, 这里 X 是通过 ψ_0 自然诱导的 C-双余模.

(3) 对 $n \geq 2$, ψ_n 是一个 C- 双余模同态通过

$$\psi_n: X \stackrel{\triangle^{(n-1)}}{\to} X \otimes X \otimes \cdots \otimes X \stackrel{\psi_1^{\otimes n}}{\to} M^{\otimes n}$$

这里 $\triangle^{(n)} := (\triangle_X^{(n-1)} \otimes id_X)\triangle_X$ 对 $n \geq 2$ 且 $\triangle^{(1)} = \triangle_X$.

(4) $\psi = \psi_0 \oplus \psi_1 \oplus \cdots \oplus \psi_n \oplus \cdots$. 从而, ψ 由 ψ_0 和 ψ_1 唯一确定.

引理 7.1.4. (见 [60] 的定理 3.9) 设 $\psi_0: X \to C$ 是一个余代数同态和 $\psi_1\ X \to M$ 为一个 C- 双余模同态. 设 $\psi_n: X \to M^{\otimes n}$ 是下面同态的合成

$$\psi_n: X \stackrel{\triangle^{(n-1)}}{\to} X \otimes X \otimes \cdots \otimes X \stackrel{\psi_1^{\otimes n}}{\to} M^{\otimes n}, \ \ n \geq 2$$

则 ψ_n 是一个 C- 双余模同态且 $Im(\psi_n) \subseteq M^{\square n}$.

如果对每一个 $x \in X$, 只有有限多个 i 使得 $\psi_i(x) \neq 0$, 则 $\psi: X \to CoT_C(M)$ 是一个余代数同态, 这里 $\psi = \sum_{i \geq 0} \psi_i$.

回顾余代数 C 的余根滤子 $\{C_n\}$ 定义为:

$$C_0 := C \text{ 的单子余代数的和}$$

$$C_n := \triangle^{-1}(C \otimes C_{n-1} + C_0 \otimes C) \ \ \text{for} \ \ n \geq 1$$

这里 C_0 称为 C 的余根. 则我们有

$$C_n \subseteq C_{n+1}, \ n \geq 0; \ \ C = \cup_{n \geq 0} C_n; \ \ \triangle(C_n) \subseteq \sum_{i=0}^{n} C_i \otimes C_{n-i}$$

见 [54] 的 60 页.

命题 7.1.5. 如果 C 是一个余半单余代数, 则 $CoT_C(M)$ 的余根 $(CoT_C(M))_0$ 就是 C.

证明. 显然, $C \subseteq (\mathrm{CoT}_C(M))_0$. 另外, 直接计算知 t $\wedge^n_{\mathrm{CoT}_C(M)} C = C \oplus M \oplus \cdots \oplus M^{\square n-1}$ 且

$$\triangle(\wedge^n_{\mathrm{CoT}_C(M)} C) \subseteq \sum_{i=0}^{n} \wedge^i_{\mathrm{CoT}_C(M)} C \otimes \wedge^{n-i}_{\mathrm{CoT}_C(M)} C$$

对 $n \geq 1$. 从而 $\{\wedge^n_{\mathrm{CoT}_C(M)} C\}$ 是 $\mathrm{CoT}_C(M)$ 的一个 余代数滤子 (见 [54] 的 61 页). 由 [54] 的引理 5.3.4 ，我们有 $C \supseteq (\mathrm{CoT}_C(M))_0$. 因此， $C = (\mathrm{CoT}_C(M))_0$. $\square$

设 $\mathcal{C} = \{单余代数 S_i | i \in \Delta_0\}$ 对某个 quiver $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$. 则 $k(\Delta_0, \mathcal{C}) = \oplus_{i\in\Delta_0} S_i$ 是一个余半单余代数. 从而，由命题 7.1.2 和 7.1.5, 我们有：

推论 7.1.6. 设 $\mathcal{C}$ 为上面所定义的. 则 $k(\Delta, \mathcal{C})$ 的余根为 $\oplus_{i\in\Delta_0} S_i$.

§7.2 同构问题

如在注 7.1.1 所见，我们知道一般来讲两个广义路余代数同构未必隐含着它们 quiver 的同构. 但是，我们将发现如果广义路余代数定义在单余代数上，则广义路余代数同构蕴含它们 quiver 的同构. 为此，我们称 $k(\Delta, \mathcal{C})$ 是一个 正规 $\mathcal{C}$- 路余代数 如果在代数 $\mathcal{C} = \{S_i | i \in \Delta_0\}$ 中每一个 S_i 都是单的. 另外，在第三节中，我们证明对偶 Gabriel 定理可以推广到一些余代数通过正规 $\mathcal{C}$- 路余代数.

本节的主要结果就是：

定理 7.2.1. *设 $k(\Delta, \mathcal{C})$ 和 $k(\Delta', \mathcal{D})$ 是两个正规广义路余代数, 这里 $\mathcal{C} = \{S_i | i \in \Delta_0\}$ 和 $\mathcal{D} = \{T_j | j \in \Delta'_0\}$. 则作为余代数， $k(\Delta, \mathcal{C}) \cong k(\Delta', \mathcal{D})$ 当且仅当存在 quiver 的同构 φ : $\Delta \to \Delta'$ 使得 $S_i \cong T_{\varphi(i)}$ 作为余代数对 $i \in \Delta_0$.*

为了完成此定理的证明，我们需要一些预备知识. 设 $D, E \subseteq C$ 是 C 的两个子余代数. 对一个左 C- 余模 M 且令结构映射为 δ_L, 记

$$^D M := \{m \in M | \delta_L(m) \in D \otimes M\}$$

对一个右 C- 余模 M 和结构映射 δ_R, 记

$$M^D := \{m \in M | \delta_R(m) \in M \otimes D\}$$

对一个 C- 双余模 M, 记

$$^D M^E := \{m \in M | \delta_L(m) \in D \otimes M, \ \ \delta_R(m) \in M \otimes E\}$$

引理 7.2.2. *如果 $C = \oplus_{i\in I} C_i$ 和 $M \in \mathcal{M}^C$, 则 $M = \oplus_{i\in I} M^{C_i}$.*

证明. 记右 C- 余模结构映射为 δ_R 且设 $\delta_R(m) = \sum m_0 \otimes m_1$ 对 $m \in M$. 显然, $\delta_R(m) = \sum m_0 \otimes m_1 = \sum \sum_{i\in I} m_{0i} \otimes m_{1i}$ 这里 $m_{0i} \otimes m_{1i}$ 等于所有使得 $m_1 \in C_i$ 的 $\delta_R(m)$ 的项的和. 由等式 $(\delta_R \otimes id)\delta_R = (id \otimes \triangle)\delta_R$ ，我们观察到 $m_{0i} \in M^{C_i}$ 对

每一个 $m_{0i} \in m_{0i} \otimes m_{1i}$. 通过使用 $(id \otimes \varepsilon)\delta_R = id$ ，我们得到 $m = \sum m_{0i}\varepsilon(m_{1i})$ 从而 $m \in \sum_{i\in I} M^{C_i}$. 所以 $M = \sum_{i\in I} M^{C_i}$. 但是，显然的是 t $\sum_{i\in I} M^{C_i} = \oplus_{i\in I} M^{C_i}$. 所以 $M = \oplus_{i\in I} M^{C_i}$. □

类似的，我们有：

引理 7.2.3. *如果 $C = \oplus_{i\in I} C_i$ 和 $M \in {}^C\mathcal{M}$, 则 $M = \oplus_{i\in I}\, {}^{C_i}M$.*

命题 7.2.4. *如果 $C = \oplus_{i\in I} C_i$ 和 $M \in {}^C\mathcal{M}^C$, 则 $M = \oplus_{i,j\in I}\, {}^{C_j}M^{C_i}$.*

证明. 由引理 7.2.2, $M = \oplus_{i\in I} M^{C_i}$. 我们宣称 M^{C_i} 是一个左 C- 余模，从而引理 7.2.3 可得结论.

对任意 $m \in M^{C_i}$, 设 $\delta_L(m) = \sum m_{-1} \otimes m_0 \in C \otimes M$. 只需证 $m_0 \in M^{C_i}$. 事实上，由 $(id \otimes \delta_R)\delta_L(m) = (\delta_L \otimes id)\delta_R(m)$ ，我们有 $m_0 \in M^{C_i}$. □

设 $C = \oplus_{i\in I} C_i$ 和 ${}^CM^C$, ${}^CN^C \in {}^C\mathcal{M}^C$. 显然, 一个 C- 双余模同态 $f: M \to N$ 是同构当且仅当 $f|_{{}^{C_i}M^{C_j}} : {}^{C_i}M^{C_j} \to {}^{C_i}N^{C_j}$ 作为 C_i-C_j- 双余模是同构对 $i, j \in I$. 回顾下面的结论 (见 [54] 的引理 5.3.6):

引理 7.2.5. *设 $f: C \to D$ 是一个满余代数同态且令 W_1, W_2 是 C 的子空间使得 $ker(f) \subseteq W_1 \cap W_2$. 则*

$$f(W_1 \wedge W_2) = f(W_1) \wedge f(W_2)$$

命题 7.2.6. *设 $k(\Delta, \mathcal{C})$ 和 $k(\Delta', \mathcal{D})$ 是出现在定理 7.2.1 中的正规广义路余代数. 如果 $k(\Delta, \mathcal{C}) \overset{\psi}{\cong} k(\Delta', \mathcal{D})$ ，则*

(1) 存在一个双射 $\varphi: \Delta_0 \to \Delta_0'$ 使得 $S_i \cong T_{\varphi(i)}$ 对 $i \in \Delta_0$

(2) $\psi(k(\Delta_0, \mathcal{C}) \oplus k(\Delta_1, \mathcal{C})) = k(\Delta_0', \mathcal{D}) \oplus k(\Delta_1', \mathcal{D})$.

证明. 由推论 7.1.6, $k(\Delta, \mathcal{C})$ 和 $k(\Delta', \mathcal{D})$ 的余根为 $\oplus_{i\in\Delta_0} S_i$ 和 $\oplus_{j\in\Delta_0'} T_j$. 显然，$\psi(S_i)$ 是 $k(\Delta', \mathcal{D})$ 的一个非 0 单子余代数因为 ψ 是一个余代数的单射. 从而存在唯一的 $\varphi(i) \in \Delta_0'$ 使得 $S_i \overset{\psi|_{S_i}}{\cong} T_{\varphi(i)}$. 类似的，对所有的 $j \in \Delta_0'$, $\psi^{-1}(T_j)$ 是同构于某个 $k(\Delta, \mathcal{C})$ 的 S_i. 因此， $\varphi: \Delta_0 \to \Delta_0'$ 是一个双射且 $S_i \cong T_{\varphi(i)}$. 这证明了 (1).

由推论 7.1.6 和引理 7.2.5 的证明知,

$$\psi(k(\Delta_0, \mathcal{C}) \oplus k(\Delta_1, \mathcal{C})) = \psi(k(\Delta_0, \mathcal{C}) \wedge k(\Delta_0, \mathcal{C})) = \psi(k(\Delta_0, \mathcal{C})) \wedge \psi(k(\Delta_0, \mathcal{C})) = k(\Delta_0', \mathcal{D}) \oplus k(\Delta_1', \mathcal{D})$$

所以 (2) 得证. □

定理 7.2.1 的证明:

"充分性： " 显然.

"必要性：" 根据命题 7.2.6, 我们只需证在 Δ 中从 i 到 j 的箭向个数 t_{ij} 等于从 $\varphi(i)$ 到 $\varphi(j)$ 的箭向个数 $l_{\varphi(i)\varphi(j)}$. 由命题 7.1.2,

$$k(\Delta,\mathcal{C})\cong \mathrm{CoT}_{k(\Delta_0,\mathcal{C})}(k(\Delta_1,\mathcal{C}))\quad k(\Delta',\mathcal{D})\cong \mathrm{CoT}_{k(\Delta'_0,\mathcal{D})}(k(\Delta'_1,\mathcal{D}))$$

记 ${}^{i}(k(\Delta_1,\mathcal{C}))^{j} := {}^{S_i}(k(\Delta_1,\mathcal{C}))^{S_j}$. 显然，这是一个自由 S_i-S_j- 双余模，即，${}^{i}(k(\Delta_1,\mathcal{C}))^{j}\cong S_i\otimes(V_{ij})\otimes S_j$ 对某个 k- 空间 V_{ij} (见第三节), 且 $t_{ij}=\dim(V_{ij})$ 对 $i,j\in\Delta_0$. 类似的，$l_{\varphi(i)\varphi(j)}=\dim(W_{\varphi(i)\varphi(j)})$ 这里 $T_{\varphi(i)}\otimes(W_{\varphi(i)\varphi(j)})\otimes T_{\varphi(j)}\cong {}^{\varphi(i)}(k(\Delta'_1,\mathcal{D}))^{\varphi(j)}$ 作为 $T_{\varphi(i)}$-$T_{\varphi(j)}$- 双余模对 $i,j\in\Delta_0$. 由 $S_i\overset{\psi}{\cong}T_{\varphi(i)}$, $S_j\overset{\psi}{\cong}T_{\varphi(j)}$, 通过 ψ ${}^{i}(k(\Delta_1,\mathcal{C}))^{j}$ 成为一个 $T_{\varphi(i)}$-$T_{\varphi(j)}$- 双余模对 $i,j\in\Delta_0$. 从而，由上面的讨论，如果我们能证明 ${}^{T_{\varphi(i)}}(k(\Delta_1,\mathcal{C}))^{T_{\varphi(j)}}\cong {}^{T_{\varphi(i)}}(k(\Delta'_1,\mathcal{D}))^{T_{\varphi(j)}}$ 作为 $T_{\varphi(i)}$-$T_{\varphi(j)}$- 双余模的话，则 $t_{ij}=l_{\varphi(i)\varphi(j)}$.

设 $C=\oplus_{i\in\Delta_0}S_i$ 及 $D=\oplus_{j\in\Delta'_0}T_j$. 我们具体的给出 $k(\Delta_1,\mathcal{C})$ 上的 D- 双余模结构. 即左 (右) D －余模结构为 ρ_L (ρ_R). 对任意 $a\beta b\in k(\Delta_1,\mathcal{C})$,

$$\rho_L(a\beta b)=\psi(a')\otimes a''\beta b,\qquad \rho_R(a\beta b)=a\beta b'\otimes\psi(b'')$$

记 $\overline{a\beta b}$ 为 $a\beta b$ 在 $(k(\Delta_0,\mathcal{C})\oplus k(\Delta_1,\mathcal{C}))/k(\Delta_0,\mathcal{C})$ 通过自然同态下的像. 而 $\overline{\psi(a\beta b)}$ 表示 $\psi(a\beta b)$ 在 $(k(\Delta'_0,\mathcal{D})\oplus k(\Delta'_1,\mathcal{D}))/k(\Delta'_0,\mathcal{D})$ 中通过自然同态下的像.

定义 $(k(\Delta_0,\mathcal{C})\oplus k(\Delta_1,\mathcal{C}))/k(\Delta_0,\mathcal{C})$ 上的 D- 双余模结构通过 (我们还使用记号 ρ_L, ρ_R):

$$\rho_L(\overline{a\beta b})=\psi(a')\otimes\overline{a''\beta b},\qquad \rho_R(\overline{a\beta b})=\overline{a\beta b'}\otimes\psi(b'')$$

直接验证知它们是良定义的并给出 $(k(\Delta_0,\mathcal{C})\oplus k(\Delta_1,\mathcal{C}))/k(\Delta_0,\mathcal{C})$ 上的一个 D- 双余模结构. 利用 $k(\Delta_1,\mathcal{C})$ and $(k(\Delta_0,\mathcal{C})\oplus k(\Delta_1,\mathcal{C}))/k(\Delta_0,\mathcal{C})$ 上的 D- 双余模结构，容易看到下面的同构

$$(k(\Delta_0,\mathcal{C})\oplus k(\Delta_1,\mathcal{C}))/k(\Delta_0,\mathcal{C})\overset{\pi_{\mathcal{C}}}{\to}k(\Delta_1,\mathcal{C})$$

是一个 D- 双余模同态. 类似的，自然同构

$$(k(\Delta'_0,\mathcal{D})\oplus k(\Delta'_1,\mathcal{D}))/k(\Delta'_0,\mathcal{D})\overset{\pi_{\mathcal{D}}}{\to}k(\Delta'_1,\mathcal{D})$$

是一个 D- 双余模同态，这里 $(k(\Delta'_0,\mathcal{D})\oplus k(\Delta'_1,\mathcal{D}))/k(\Delta'_0,\mathcal{D})$ 上的 D- 双余模结构为：

$$\delta_L(\overline{c\beta d})=c'\otimes\overline{c''\beta b},\qquad \delta_R(\overline{c\beta d})=\overline{c\beta d'}\otimes d''$$

对 $c,d\in D$, $\beta\in\Delta'_1$.

定义 ϕ: $k(\Delta_1,\mathcal{C})\to k(\Delta'_1,\mathcal{D})$ 是下列映射的合成：

$$k(\Delta_1,\mathcal{C})\overset{\pi_{\mathcal{C}}^{-1}}{\to}(k(\Delta_0,\mathcal{C})\oplus k(\Delta_1,\mathcal{C}))/k(\Delta_0,\mathcal{C})\overset{\overline{\psi}}{\to}(k(\Delta'_0,\mathcal{D})\oplus k(\Delta'_1,\mathcal{D}))/k(\Delta'_0,\mathcal{D})\overset{\pi_{\mathcal{D}}}{\to}k(\Delta'_1,\mathcal{D})$$

这里 $\overline{\psi}$ 定义为：对任意 $\overline{a\beta b} \in (k(\Delta_0,\mathcal{C}) \oplus k(\Delta_1,\mathcal{C}))/k(\Delta_0,\mathcal{C})$, $\overline{\psi}(\overline{a\beta b}) := \overline{\psi(a\beta b)}$. 显然，$\overline{\psi}$ 是一个线性同构因为 $\psi(k(\Delta_0,\mathcal{C})) = k(\Delta_0',\mathcal{D})$ 和由命题 7.2.6， $\psi(k(\Delta_0,\mathcal{C}) \oplus k(\Delta_1,\mathcal{C})) = k(\Delta_0',\mathcal{D}) \oplus k(\Delta_1',\mathcal{D})$. 我们宣称 $\overline{\psi}$ 也是一个 D- 双余模同态. 事实上，对任意的 $\overline{a\beta b} \in (k(\Delta_0,\mathcal{C}) \oplus k(\Delta_1,\mathcal{C}))/k(\Delta_0,\mathcal{C})$, 假定 $\psi(a\beta b) = \sum d_i + \sum d_j\beta_j e_j$ 对 $d_i \in T_i$ $(i \in \Delta_0')$, $d_j\beta_j e_j \in k(\Delta_1',\mathcal{D})$. 由 ψ 是一个余代数同态，我们有 $(\psi \otimes \psi)\triangle(a\beta b) = \triangle\psi(a\beta b)$. 即,

$$\psi(a')\otimes\psi(a''\beta b)+\psi(a\beta b')\otimes\psi(b'') = \sum d_i'\otimes d_i''+\sum d_j'\otimes d_j''\beta_j e_j+\sum d_j\beta_j e_j'\otimes e_j'' \qquad (*)$$

记典型投射 $k(\Delta_0',\mathcal{D}) \oplus k(\Delta_1',\mathcal{D}) \to (k(\Delta_0',\mathcal{D}) \oplus k(\Delta_1',\mathcal{D}))/k(\Delta_0',\mathcal{D})$ 为 π. 让 $id \otimes \pi$ 作用在 $(*)$ 的两侧，我们得到

$$\psi(a') \otimes \overline{\psi(a''\beta b)} = \sum d_j' \otimes \overline{d_j''\beta_j e_j}$$

另外,

$$(id \otimes \overline{\psi})\rho_L(\overline{a\beta b}) = (id \otimes \overline{\psi})(\psi(a') \otimes \overline{a''\beta b}) = \psi(a') \otimes \overline{\psi(a''\beta b)}$$

和

$$\delta_L\overline{\psi}(\overline{a\beta b}) = \delta_L(\overline{\psi(a\beta b)}) = \delta_L(\overline{\sum d_j\beta_j e_j}) = \sum d_j' \otimes \overline{d_j''\beta_j e_j}$$

从而,

$$(id \otimes \overline{\psi})\rho_L(\overline{a\beta b}) = \delta_L\overline{\psi}(\overline{a\beta b})$$

这意味 $\overline{\psi}$ 是一个左 D- 余模同态. 类似的, 我们有它还是一个右 D- 余模同态. 故, $\overline{\psi}$ 是一个 D- 双余模同构. 因此， $\phi = \pi_D\overline{\psi}\pi_C^{-1} : k(\Delta_1,\mathcal{C}) \to k(\Delta_1',\mathcal{D})$ 是一个 D- 双余模同构. 所以,

$${}^{T_{\varphi(i)}}k(\Delta_1,\mathcal{C})^{T_{\varphi(j)}} \overset{\phi}{\cong} {}^{T_{\varphi(i)}}k(\Delta_1',\mathcal{D})^{T_{\varphi(j)}}$$

对任意的 $i, j \in \Delta_0$. 我们完成了证明. □

注 7.2.7. *(1) 作为定理 7.2.1 的特例, 对通常的路余代数 $k\Delta$, $k\Delta'$, 我们有 $k\Delta \cong k\Delta'$ 当且仅当 $\Delta \cong \Delta'$ 因为 k 是一个平凡的单余代数.*

(2) 进一步的问题是，为了得到定理 7.2.1， S_i, T_j 是单余代数的条件是否是必需的. 回顾注 7.1.1 (ii) 中的例子告诉我们只有其中任何一个 S_i 能分解成两个真子余代数的和，则定理不真.

§7.3 广义对偶 Gabriel 定理

此节，总是令 $\mathcal{C} = \{单余代数 S_i | i \in \Delta_0\}$ 对某个 quiver $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$.

设 V 是一个 k- 空间，则 $V\otimes C$ 是一个右 C- 余模通过结构映射 $id\otimes\triangle_C$. 我们记此余模为 $(V)\otimes C$. 类似的，我们可以定义 $C\otimes(V)$, $C\otimes(V)\otimes D$ 这里 D 是另外一个余代数. 一个右 (左) C- 余模 M (N) 称为 自由的 如果存在一个 k- 空间 V (W) 使得 $M\cong(V)\otimes C$ $(N\cong C\otimes(W))$. 类似的，一个 C-D- 双余模 ${}^CM^D$ 称为 自由的 如果 ${}^CM^D\cong C\otimes(U)\otimes D$ 对某个空间 U.

容易发现每一个右余模可以嵌入到一个自由余模 (见 [20] 的推论 2). 事实上，对任意右 C- 余模 M, 他的 δ_R 是一个从 M 到 $(M)\otimes C$ 的 C- 余模同态. 由于 $(id\otimes\varepsilon)\delta_R=id$, δ_R 是一个单射. 即， $M\overset{\delta_R}{\hookrightarrow}(M)\otimes C$. 类似的，我们有 ${}^CM\hookrightarrow C\otimes(M)$, ${}^CM^D\hookrightarrow C\otimes(M)\otimes D$.

引理 7.3.1. 设 $M^C\in\mathcal{M}^C$. 则存在一个 k- 空间 V 满足:

(1) M 可以嵌入到 $(V)\otimes C$ 中,

(2) 对任意的 k- 空间 W 满足 $dim(W)<dim(V)$, M 不能嵌入到 $(W)\otimes C$.

满足（ 1 ）（ 2 ）的 k- 空间 V 称为 M 作为自由右 C- 余模的一个 极小实现.

证明. 定义 $\mathcal{F}=\{V|M\hookrightarrow(V)\otimes C,\ \dim(V)\le\dim(M)\}$. 显然， $\mathcal{F}$ 是一个非空集因为 $M\hookrightarrow(M)\otimes C$. 我们定义 $\mathcal{F}$ 上的一个偏序通过 $V\le W$ 当且仅当 $(V)\otimes C\supseteq(W)\otimes C$. 如果 $\{V_i|i\in I\}$ 是一个 $\mathcal{F}$ 的链, 则 $\cap_{i\in I}(V_i\otimes C)=(\cap_{i\in I}V_i)\otimes C$ 是 $\{V_i|i\in I\}$ 的上界. 由 Zorn's 引理， $\mathcal{F}$ 包含一个极大元 V 此为我们所求. □

类似的，对任意的 ${}^CM^D\in{}^C\mathcal{M}^D$ $({}^CN\in{}^C\mathcal{M})$, 我们可以发现 ${}^CM^D$ $({}^CN)$ 作为自由 C-D- 双余模 (左 C- 余模) 的极小实现.

假定 $M\in{}^C\mathcal{M}^C$ 和作为余代数 $C=\oplus_{i\in I}C_i$. 从而由命题 7.2.4， $M=\oplus_{i,j\in I}{}^{C_i}M^{C_j}=\oplus_{i,j\in I}{}^iM^j$，这里 ${}^iM^j:={}^{C_i}M^{C_j}$. 因此，存在一个 ${}^iM^j$ 作为自由 C_i-C_j- 双余模的极小实现 V_{ij} 对 $i,j\in I$. 我们现在可以定义一个 quiver. 设顶点集为 $\Delta_0=I$. 对 $i,j\in I$, 设从 i 到 j 的箭向个数为 V_{ij} 的维数. 显然，如果 ${}^iM^j=0$, 则这里没有从 i 到 j 的箭向. 从而，我们得到一个 quiver $\Delta=(\Delta_0,\Delta_1)$ 并称之为 $\mathrm{CoT}_C(M)$ 的 quiver.

回顾 Heyneman-Radford (见 [34]) 的一个结论:

引理 7.3.2. 如果 $f:\ D\to E$ 是一个余代数同态，则 f 是单的当且仅当 $f|_{D_1}$ 是单的.

命题 7.3.3. 记 $\mathcal{C}=\{S_i|S_i$ 是单余代数, $i\in I\}$. 设 $C=\oplus_{i\in I}S_i$, $M\in{}^C\mathcal{M}^C$ 和 $\Delta=(\Delta_0,\Delta_1)$ 是 $CoT_C(M)$ 的 *quiver*. 则存在余代数嵌入 $\psi:\ CoT_C(M)\hookrightarrow k(\Delta,\mathcal{C})$

使得 $\psi(M)\subseteq k(\Delta_1,\mathcal{C})$.

证明. 由命题 7.1.2, $k(\Delta,\mathcal{C})\cong \mathrm{CoT}_{k(\Delta_0,\mathcal{C})}(k(\Delta_1,\mathcal{C}))$. 所以只需证存在一个余代数嵌入 $\psi:\ \mathrm{CoT}_C(M)\hookrightarrow \mathrm{CoT}_{k(\Delta_0,\mathcal{C})}(k(\Delta_1,\mathcal{C}))$. 显然, ${}^ik(\Delta_1,\mathcal{C})^j\cong S_i\otimes(V_{ij})\otimes S_j$ 对 $i,j\in\Delta_0$ 这里 V_{ij} 是一个 ${}^iM^j$ 作为自由 C_i-C_j- 双余模的极小实现. 从而, ${}^iM^j\overset{f_{ij}}{\hookrightarrow}{}^ik(\Delta_1,\mathcal{C})^j$ 作为 S_i-S_j- 双余模对 $i,j\in\Delta_0$.

记 $p_n:\ \mathrm{CoT}_C(M)\to M^{\Box n}$ 是典型投射对 $n\geq 0$. 因为 $id:\ \mathrm{CoT}_C(M)\to \mathrm{CoT}_C(M)$ 是一个余代数同态, 由引理 7.1.3 , 我们有 p_0, p_1 分别是余代数同态和 C- 双余模同态. 定义 $\psi_0:\ \mathrm{CoT}_C(M)\to k(\Delta_0,\mathcal{C})$ 为 p_0 和单位同态 $id_C:\ C\to k(\Delta_0,\mathcal{C})=\oplus_{i\in\Delta_0}S_i=C$ 的合成. 显然, ψ_0 是一个余代数同态. 对任意 $x\in \mathrm{CoT}_C(M)$, 记 $p_1(x)=\sum_{i,j\in\Delta_0}{}^im_x^j$ 对 ${}^im_x^j\in{}^iM^j$. 定义 $\psi_1:\ \mathrm{CoT}_C(M)\to k(\Delta_1,\mathcal{C})$ 通过 $\psi_1(x):=\sum_{i,j\in\Delta_0}f_{ij}({}^im_x^j)$. ψ_1 是一个 C- 双余模同态因为 p_1,f_{ij} 对 $i,j\in\Delta_0$ 是这样的.

对比引理 7.1.4, 如果我们能证明只存在有限多个 i 使得 $\psi_i(x)\neq 0$, 则 $\psi=\sum_{i\geq 0}\psi_i$ 是一个余代数同态, 这里 $\psi_i=\psi_1^{\otimes i}\circ\triangle^{(i-1)}$. 但这是显然的. 从而, $\psi=\sum_{i\geq 0}\psi_i$ 是一个从 $\mathrm{CoT}_C(M)$ 到 $\mathrm{CoT}_{k(\Delta_0,\mathcal{C})}(k(\Delta_1,\mathcal{C}))$ 余代数同态. 由命题 7.1.5 及其证明, 我们知道 $\mathrm{CoT}_C(M)$ 的余根是 C 且 $\wedge^2_{\mathrm{CoT}_C(M)}C=C\oplus M$. 另外, 由 ψ 的定义, $\psi|_{C\oplus M}$ 是单的. 所以由引理 7.3.2 , $\psi:\ \mathrm{CoT}_C(M)\hookrightarrow \mathrm{CoT}_{k(\Delta_0,\mathcal{C})}(k(\Delta_1,\mathcal{C}))$ 是单的. 显然, $\psi(M)\subseteq k(\Delta_1,\mathcal{C})$. □

回顾一个余代数 C 被称为有 *分离余根* (见 [54]) 如果每一个单子余代数 D 其对偶代数 D^* 是一个分离代数, 或称 C 的余根 C_0 是一个余分离余代数 (见 [20]).

引理 7.3.4. (见 [54] 的定理 5.4.2) *设 C 是一个余代数具有分离余根, 则存在 C 的一个余理想 I 使得 $C=I\oplus C_0$ 作为 k- 空间, 即, 存在一个余代数投射从 C 到 C_0.*

设 $\{C_n\}$ 是 C 的余根滤子. 记 $\pi:\ C\to C/C_0$ 是典型的投射. 因为 $\triangle(C_0)\subseteq C_0\otimes C_0$ 和 $\triangle(C_1)\subseteq C_0\otimes C_1+C_1\otimes C_0$, 我们有两个映射 $\delta_L:\ C_1/C_0\to C_0\otimes C_1/C_0$ 和 $\delta_R:\ C_1/C_0\to C_1/C_0\otimes C_0$, 这里 $\delta_L(\pi(x)):=(id\otimes\pi)\triangle(x)$, $\delta_R(\pi(x)):=(\pi\otimes id)\triangle(x)$ 对 $x\in C_1$. 显然, C_1/C_0 是一个 C_0- 双余模通过 δ_L,δ_R.

在 [67], 一个 k- 代数 A 的维数 $\mathrm{Dim}A$ 定义为 $\mathrm{Dim}A=sup\{n: H_k^n(A,M)\neq 0$ 对某个 A- 双模 $M\}$ 这里 $H_k^n(A,M)$ 意味是第 n 个系数在 M 中的 Hochschild 上同调. 特别的, $\mathrm{Dim}A=0$ 当且仅当 A 是一个分离 k- 代数. 由 [67] 的推论 10.7b , 当 k 是一个是一个完美域 (例如 $\mathrm{char}k=0$ 或 k 是一个有限域) 时, A 是分离的当且仅当 A 有限维且半单的. $\mathrm{Dim}A=1$ 当且仅当每一个 A 值在任意 A-A- 双模 M 的因子集是可裂的. 根据著名的 Wedderburn-Malcev 定理 (见 [67]), 对一个有限维 k- 代数 A 和它的根 r , 如果 $\mathrm{Dim}A/r\leq 1$, 则 A/r 是可提升的. 进一步的, 对于

一个余代数 C, 我们定义 $\mathrm{Codim}C = sup\{\mathrm{Dim}D^*|D$ 是任意 C 的有限维子余代数$\}$. 记 $\mathrm{p.dim}({}_AM)$ 为 $M \in {}_A\mathcal{M}$ 作为左 A- 模的投射维数. 类似的, $\mathrm{p.dim}(M_A)$ 和 $\mathrm{p.dim}({}_AM_A)$ 为 M 作为右 A 和 A- 双模的投射维数. 下面的引理是需要的:

引理 7.3.5. *(i) 设 $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s$ 这里 A, A_i 是代数 $(i = 1, \cdots, s)$, 则 $\mathrm{Dim}A = max\{\mathrm{Dim}A_i : i = 1, \cdots, s\}$;*

(ii) 如果 $C = D_1 \oplus \cdots \oplus D_s$ 对余代数 C, D_i $(i = 1, \cdots, s)$, 则 $\mathrm{Codim}C \geq max\{\mathrm{Codim}D_i : i = 1, \cdots, s\}$.

证明. (i) 我们知道一个代数 B 的上述定义的维数就是 B 作为 B- 双模的投射维数 (见 [49] 的第 X 章的第三节), 即, $\mathrm{Dim}B = \mathrm{p.dim}_B B_B$. 记 $S = \{1, \ldots, s\}$. 显然, 对 $i \in S$, 通过自然的方式, A_i 是一个 A- 双模. 记这个 A- 双模为 ${}_A(A_i)_A$. 则 ${}_AA_A = \oplus_{i=1}^s {}_A(A_i)_A$ 作为 A- 双模. 所以, $\mathrm{p.dim}({}_AA_A) = max\{\mathrm{p.dim}({}_A(A_i)_A)|i \in S\}$. 因为 $\mathrm{Dim}A_i = \mathrm{p.dim}_{A_i}(A_i)_{A_i}$, 为了证明 (i), 只需证 $\mathrm{p.dim}({}_A(A_i)_A) = \mathrm{p.dim}({}_{A_i}(A_i)_{A_i})$ 对每个 $i \in S$. 为了证此, 我们先证下面的宣称:

宣称 *1:* 对任意 $M \in {}_A\mathcal{M}_A$, $M = \oplus_{i,j\in S}\, {}_iM_j$, 这里 ${}_iM_j := A_iMA_j$.

宣称 *2:* 设 $f : {}_AM_A \to {}_AN_A$ 是一个 A- 双模同态且令 $f_{ij} := f|_{{}_iM_j}$ 对 $i, j \in S$. 则 $f_{ij}({}_iM_j) \subseteq {}_iN_j$ 且 $f = \oplus_{i,j\in S} f_{ij}$.

宣称 *3:* 对 $i, j \in S$, f_{ij} 是一个 A_i-A_j- 双模同态和一个 A- 双模同态, 这里我们考虑 A- 双模 ${}_iM_j$ 以自然的方式成为 A_i-A_j- 双模.

宣称 *4:* 给定一个 A- 双模复形

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

则它是正合的当且仅当下面的复形是正合的:

$$0 \longrightarrow {}_iM_j \xrightarrow{f_{ij}} {}_iN_j \xrightarrow{g_{ij}} {}_iL_j \longrightarrow 0$$

对 $i, j \in S$.

宣称 *5:* 如果 P 是一个投射 A- 双模, 则 ${}_iP_i$ 是一个投射 A_i- 双模对 $i \in S$.

宣称 *6:* 设 ${}_{A_i}P_{A_i}$ 是一个投射 A_i- 双模, 则 ${}_{A_i}P_{A_i}$ 是一个投射 A- 模这里 ${}_{A_i}P_{A_i}$ 上的 A- 双模结构由典型代数同态 $\pi_i : A \to A_i$ 所诱导.

宣称 1,2,3,4 的证明留给读者. 我们现在来证宣称 5 和 6. 给定下面的 A_i- 双模图

$$\begin{tikzcd} & {}_iP_i \arrow[d, "h"] \\ M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

这 M,N 是 A_i- 双模， $g:\ M\to N$ 是一个 A_i- 双模满射且 $h:\ {}_iP_i\to N$ 是一个 A_i- 双模同态. 设 $p_i: P\to\ {}_iP_i$ 是典型的 A- 双模投射对 $i\in S$. 显然，通过典型的代数投射 $\pi_i:\ A\to A_i$, ${}_iP_i$, M, N 成为 A- 双模且 h,g 可以认为是 A- 双模同态. 从而我们有下面的 A- 双模图：

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "p_i"] \\
& {}_iP_i \arrow[d, "h"] \\
M \arrow[r, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

当 P 是一个投射 A- 双模，存在一个 A- 双模同态 $\overline{h}:\ P\to M$ 使得下面的图交换：

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[d, "p_i"] \arrow[ddl, "\overline{h}"'] \\
& {}_iP_i \arrow[d, "h"] \\
M \arrow[r, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

设 $\iota_i:\ {}_iP_i\to P$ 是典型的 A- 双模内射. 定义 $\widetilde{h}:\ {}_iP_i\to M$ 为 $\widetilde{h}:=\overline{h}\iota_i$. 从而 $\widetilde{h}$ 是一个 A- 双模同态，且显然是一个 A_i- 双模同态. 另外， $g\widetilde{h}=g\overline{h}\iota_i=hp_i\iota_i=h$ 这意味我们有下面的交换图：

$$\begin{tikzcd}
& {}_iP_i \arrow[d, "h"] \arrow[dl, "\widetilde{h}"'] \\
M \arrow[r, "g"] & N
\end{tikzcd}$$

因此， ${}_iP_i$ 是一个投射 A_i- 双模. 这意味宣称 5 是对的. 接下来，我们来证宣称 6. 设 ${}_{A_i}P_{A_i}$ 是一个投射 A_i- 双模，则它是一个自由左 $A_i\otimes A_i^{op}$- 模 M 的直和项 (这里我们考虑一个 A_i- 双模就是一个左 $A_i\otimes A_i^{op}$- 模). 所以 M 是一个一些 $A_i\otimes A_i^{op}$ 的拷贝的直和. 通过典型的代数投射 $\pi_i:\ A\to A_i$, ${}_{A_i}P_{A_i}$ 和 M 成为 A- 双模且 ${}_{A_i}P_{A_i}$ 是一个 M 作为 A- 双模的直和项. 但是显然， $A_i\otimes A_i^{op}$ 是一个 $A\otimes A^{op}$ 作为 $A\otimes A^{op}$-模的直和项. 因此， M 是一个投射 A- 双模从而 ${}_{A_i}P_{A_i}$ 是一个投射 A- 双模.

给定 A_i 作为 A- 双模一个投射分解：

$$\cdots\to P_n\to\cdots\to P_1\to P_0\to A_i\to 0$$

则由宣称 4 和宣称 5, 我们有 A_i 作为 A_i- 双模的投射分解:

$$\cdots \to {}_i(P_n)_i \to \cdots \to {}_i(P_1)_i \to {}_i(P_0)_i \to A_i \to 0$$

这意味 $\mathrm{p.dim}({}_{A_i}(A_i)_{A_i}) \leq \mathrm{p.dim}({}_A(A_i)_A)$. 反之，给定一个 A_i 作为 A_i- 双模的投射

$$\cdots \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to A_i \to 0$$

则由宣称 6, 它同样是 A_i 作为 A- 双模的投射分解. 所以， $\mathrm{p.dim}({}_A(A_i)_A)$ $\leq \mathrm{p.dim}({}_{A_i}(A_i)_{A_i})$. 故， $\mathrm{p.dim}({}_A(A_i)_A) = \mathrm{p.dim}({}_{A_i}(A_i)_{A_i})$.

(ii) 因为每一个 D_i 的有限维子余代数对 $i = 1, \ldots, s$ 同样是 C 的子余代数, $CodimC \geq max\{CodimD_i : i = 1, \cdots, s\}$. □

引理 7.3.6. 对一个余代数 C, $\mathrm{Codim}C_0 = 0$ 当且仅当 C 有分离余根.

证明. "充分性: " 任意 C_0 的有限维子余代数 D 是余半单余代数. 由 C 是一个有分离余根的余代数和引理 7.3.5, 我们有 $\mathrm{Dim}D^* = 0$. 这意味 $\mathrm{Codim}C_0 = 0$.

"必要性: " 这个方向可以由引理 7.3.5 和下述事实直接得到: 一个代数 A 是分离代数当且仅当 $\mathrm{Dim}A = 0$. □

本节的主要结论是:

定理 7.3.7. 设 C 是一个满足 $CodimC_0 \leq 1$ 的余代数. 记 $C_0 = \oplus_{i\in\Lambda} S_i$ 这里 S_i 是单余代数对所有 $i \in \Lambda$. 则

(a) (余代数的 Wedderburn-Malcev 定理) 存在 C 的一个余理想 I 使得作为线性空间 $C = I \oplus C_0$. 也就是说，存在一个从 C 到 C_0 的余代数投射.

(b) 假定 C_1/C_0 作为 C_0 - 双模是 C/C_0 的直和项. 则

(i) 存在一个余代数的嵌入 ψ: $C \hookrightarrow CoT_{C_0}(C_1/C_0)$.

(ii) (广义对偶 Gabriel 定理) 设 $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ 是 $CoT_{C_0}(C_1/C_0)$ 的 *quiver*, $\mathcal{C} = \{S_i | i \in \Lambda\}$. 则存在一个余代数的嵌入 φ: $C \hookrightarrow k(\Delta, \mathcal{C})$ 使得 $\varphi(I_1) \subseteq k(\Delta_1, \mathcal{C})$ 这里 $I_1 = I \cap C_1$.

证明. (a): 我们首先证明如果 C 是有限维且 D 是一个子代数,则从 D 到 $D_0 = D \cap C_0$ 的投射 π 可以延拓成为从 C 到 C_0 的投射. 设 $\alpha = \pi' \circ i$ 是下面嵌入 i: $C_0 \to C$ 和满射 π': $C \to C/Ker\pi = E$ 的合成. 则 $Ker\alpha = \{0\}$ 且 $Im\alpha \subseteq E_0$. 由 [54] 的推论 5.3.5, $E_0 \subseteq Im\alpha$, 从而 $E_0 = Im\alpha$. 所以 α^*: $E^* \to (C_0)^*$ 是一个满代数同态.

现在我们可以宣称存在一个 E^* 的子代数 B 使得 $E^* = B \oplus \mathrm{Jac}(E^*)$ 且 $B \cong (C_0)^*$. 根据著名的 Wedderburn-Malcev 定理，我们只需证 $(C_0)^* \cong E^*/\mathrm{Jac}(E^*)$ 且 $\mathrm{Dim}(C_0)^* \leq 1$,其中后面的是定理的假设条件. 所以我们只需证 $(C_0)^* \cong E^*/\mathrm{Jac}(E^*)$. 因为 α^*: $E^* \to (C_0)^*$ 是一个满代数同态且 $(C_0)^*$ 是半单的, 所以 $Ker\alpha^* \supseteq \mathrm{Jac}(E^*)$

这意味存在一个自然的满射 $E^*/\mathrm{Jac}(E^*) \twoheadrightarrow E^*/Ker\alpha^* \cong (C_0)^*$. 则容易发现 $(C_0)^*$ 是 $E^*/\mathrm{Jac}(E^*)$ 的一个直和项. 即, $E^*/\mathrm{Jac}(E^*) = (C_0)^* \oplus A$ 对某个有限维半单代数 A. 从而得到存在一个代数满射 $\pi: E^* \twoheadrightarrow (C_0)^* \oplus A$. 则 $\pi^*: C_0 \oplus A^* = (C_0)^{**} \oplus A^* \hookrightarrow E = E^{**}$ 作为余代数. 但是, A^* 是余半单的. 所以, $\pi^*: C_0 \oplus A^* \hookrightarrow E_0$. 由事实 E 的余根 E_0 等于 $Im\alpha \cong C_0$, 我们得到 $A^* = 0$ 从而 $(C_0)^* \cong E^*/\mathrm{Jac}(E^*)$.

因此, $E^* = B \oplus \mathrm{Jac}(E^*)$ 这里 $B \cong (C_0)^*$ 作为代数. 则存在一个代数投射 $\phi: (C_0)^* \to E^*$ 使得 $\alpha^* \circ \phi = \mathrm{id}_{(C_0)^*}$. 现设 $\widetilde{\pi} = \phi^* \circ \pi'$, 这是一个从 C 到 C_0 的投射且延拓了 π.

现设 $\mathcal{F}$ 为所有的对 (F, π), 这里 F 是 C 的子余代数且 $\pi: F \to F_0$ 是投射. 因为 (C_0, id) 是这样的一个对，所以 $\mathcal{F} \neq \emptyset$. 进一步的， $\mathcal{F}$ 是一个偏序集通过

$$(F', \pi') \leq (F, \pi) \quad \text{当且仅当} \quad F' \subset F \text{ 且 } \pi|_{F'} = \pi'$$

我们应用 Zorn 引理得到极大元 (F, π). 我们宣称 $F = C$.

假定 $F \neq C$. 则存在 $c \in C$, $c \notin F$. 设 D 是由 c 生成的子余代数. 则 $Im(\pi|_{F \cap D}) = (F \cap D)_0$. 因为 D 是有限维的, 将本证明开始时的说明应用到 $F \cap D \subset D$ 我们有存在一个投射 $\pi_1: D \to D_0$ 它延拓了 $\pi|_{F \cap D}$. 因为 (D, π_1) 和 (F, π) 有在 $F \cap D$ 上相同的投射，所以它们延拓为一个投射 $\pi_2: F + D \to (F + D)_0$. 这同 F 的极大性矛盾. 所以 $F = C$.

(b): (i): 由 (a), 存在一个余代数投射 $p: C \to C_0$. 记 $I = ker(p)$. 则 $C = C_0 \oplus I$. 定义 ψ_0 为 p 和恒等同态 $id: C_0 \to C_0$ 的合成. 显然， $\psi_0: C \to C_0$ 是一个余代数同态.

显然， C 和 I 都是 C_0- 双余模通过左和右的 C_0- 余模结构映射 $\rho_L := (p \otimes id)\triangle$, $\rho_R := (id \otimes p)\triangle$, 且 $I \cong C/C_0$ 作为 C_0- 双余模. 记 $I_1 = I \cap C_1$, 则 $C_1 = I_1 \oplus C_0$. 因为 $\triangle(I_1) \subseteq (I \otimes C + C \otimes I) \cap (C_0 \otimes C_1 + C_1 \otimes C_0) \subseteq I_1 \otimes C_0 + C_0 \otimes I_1$, I_1 是一个 C_0- 双余模. 显然, $I_1 \overset{\phi}{\cong} C_1/C_0$. 由定理的假设, 存在一个从 C/C_0 到 C_1/C_0 的 C_0- 双余模投射. 从而我们得到一个 C_0- 双余模投射 $p'': I \to I_1$ 因为 $I \cong C/C_0$ 和 $I_1 \cong C_1/C_0$. 记典型的从 C 到 I 的 C_0- 双余模投射为 p' 且定义 $\psi_1 = \phi \circ p'' \circ p': C \to C_1/C_0$. 因此， ψ_1 是一个 C_0- 双余模同态.

为了应用引理 7.1.4, 我们需证只有有限多个 $\psi_i(x) \neq 0$ 对 $x \in C$, 这里 $\psi_i = \psi_1^{\otimes i} \circ \triangle^{i-1}$ 对 $i \geq 1$. 对任意的 $x \in C$, 存在 n 使得 $x \in C_n$ 因为 $\{C_i\}_{i \geq 0}$ 是 C 的一个余代数滤子. 注意到 $\triangle^{(j-1)}(C_n) \subseteq \sum_{n1+\cdots+nj=n} C_{n1} \otimes \cdots \otimes C_{nj}$ 对 $j \geq 1$ 和 $\psi_1(C_0) = 0$ ，从而 $\psi_m(x) = 0$ 对 $m > n$. 所以只有有限多个 $\psi_i(x) \neq 0$ 对每一个 $x \in C$.

应用引理 7.1.4, 我们有一个余代数同态 $\psi = \sum_{i \geq 0} \psi_i : C \to \mathrm{CoT}_{C_0}(C_1/C_0)$. 为了证明 ψ 是单的，我们只需证 $\psi|_{C_1}$ 是单的 (由引理 7.3.2). 但这是 ψ 的定义的一个简单结果.

(ii): 由命题 7.3.3, 存在一个余代数嵌入 ψ' : $\mathrm{CoT}_{C_0}(C_1/C_0)\hookrightarrow k(\Delta,\mathcal{C})$ 使得 $\psi'(C_1/C_0)\subseteq k(\Delta_1,\mathcal{C})$. 设 φ: $C\to k(\Delta,\mathcal{C})$ 是下面映射的合成

$$C\overset{\psi}{\hookrightarrow}\mathrm{CoT}_{C_0}(C_1/C_0)\overset{\psi'}{\hookrightarrow}k(\Delta,\mathcal{C})$$

容易看到 φ 就是我们想要的映射. □

推论 7.3.8. *设 C 是一个余代数满足 $CodimC_0=0$. 记 $C_0=\oplus_{i\in I}S_i$ 这里 S_i 是单余代数对 $i\in\Lambda$. 则*

(i) 存在一个单代数同态 ψ: $C\hookrightarrow CoT_{C_0}(C_1/C_0)$.

(ii) 设 $\Delta=(\Delta_0,\Delta_1)$ 是 $CoT_{C_0}(C_1/C_0)$ 的 quiver, 则 $\mathcal{C}=\{S_i|i\in I\}$. 存在一个余代数嵌入 φ: $C\hookrightarrow k(\Delta,\mathcal{C})$ 使得 $\varphi(I_1)\subseteq k(\Delta_1,\mathcal{C})$ 这里 $I_1=I\cap C_1$.

证明. 由定理 7.3.7, 我们只需证 C_1/C_0 作为 C_0- 双余模是 C/C_0 的直和项. 但由假设和引理 7.3.6, C 的余根 C_0 是分离余代数 (见 [20]). 所以, $C_0\otimes C_0^{cop}$ 是一个余半单余代数 ([20] 的命题 12). 所以每一个 C_0- 双余模是余半单的 (这里我们将 C_0-双余模看成左 $C_0\otimes C_0^{cop}$- 余模). 因此, 存在一个从 C/C_0 到 C_1/C_0 的 C_0- 双余模投射. □

注意到 (1): 定理 7.3.7 (a) 的结果是 Wedderburn-Malcev 定理一个推广.

(2): [11] 中的主要结果, 即所谓的余 - 分离型余代数的对偶 Gabriel 定理就是推论 7.3.8 的 (i).

(3): 比较定理 7.3.7 中的 (ii) 和 (i) , 我们可以看到我们与 [11] 和其他一些文章中对对偶 Gabriel 定理的不同理解. 我们这里的对偶 Gabriel 定理着重是利用广义路余代数去对偶 Gabriel 定理.

注 7.3.9. *推论 7.3.8 在下面任一简单条件下都是成立的因为它们的任一一条都隐含着余根 C_0 是分离的:*

(1) C 是一个点的余代数;

(2) k 是代数闭域;

(3) $chark=0$.

我们称 $\mathrm{CoT}_{C_0}(C_1/C_0)$ 的 quiver 为 C 的 *quiver*. 记之为 $\Delta_C=((\Delta_C)_0,(\Delta_C)_1)$. 给定两个 quiver $\Delta=(\Delta_0,\Delta_1)$, $\Delta'=(\Delta_0',\Delta_1')$, 我们说 $\iota:\Delta\hookrightarrow\Delta'$ 如果 ι 是一个从 Δ_0 到 Δ_0' 的单射且从 i 到 j 的箭向个数不大于从 $\iota(i)$ 到 $\iota(j)$ 的箭向个数对所有的 Δ 的顶点 i,j. 下面的定理给出了 Δ_C 的唯一性.

定理 7.3.10. *假定 C 是一个余代数满足 $CodimC_0\le 1$ 且 C_1/C_0 是一个作为 C_0-双余模 C/C_0 的直和项. 是 I 是 C 的余理想使得 $C=I\oplus C_0$ 作为 k- 空间且令*

$I_1 = I \cap C_1$. 如果存在一个 *quiver* $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ 和正规广义路余代数 $k(\Delta, \mathcal{D})$（这里假定 $\mathcal{D} = \{T_i | i \in \Delta_0\}$）满足 $C \overset{\psi}{\hookrightarrow} k(\Delta, \mathcal{D})$ 及 $\psi(I_1) \subseteq k(\Delta_1, \mathcal{D})$, 则 $\iota: \Delta_C \hookrightarrow \Delta$ 且 $S_i \cong T_{\iota(i)}$ 对 $i \in \Delta_0$.

证明. 注意由定理 7.3.7 (a), 这样的 I 总是存在的.

显然， $\psi|_{S_i}$ 的像是 $k(\Delta, \mathcal{D})$ 一个单的子余代数对 $i \in (\Delta_C)_0$. 由推论 7.1.6, $D := \oplus_{j \in \Delta_0} T_j$ 是 $k(\Delta, \mathcal{D})$ 的余根. 从而 $Im(\psi|_{S_i}) = T_{\iota(i)}$ 对唯一的 $\iota(j) \in \Delta_0$. 显然， $S_i \overset{\psi}{\cong} T_{\iota(j)}$. 因此，存在单射 $\iota: (\Delta_C)_0 \to \Delta_0$ 通过 $i \mapsto \iota(i)$ 且作为余代数 $S_i \cong T_{\iota(i)}$.

接下来，我们只需证 i 到 j 的箭向个数不大于从 $\iota(i)$ 到 $\iota(j)$ 的箭向个数. 记 $p_i: k(\Delta, \mathcal{D}) = \mathrm{CoT}_{k(\Delta_0, \mathcal{D})}(k(\Delta_1, \mathcal{D})) \to k(\Delta_i, \mathcal{D})$ 为典型投射对 $i \geq 0$. 则由引理 7.1.3, $\psi_1 = p_1\psi : C \to k(\Delta_1, \mathcal{D})$ 是一个 D- 双余模同态这里 C 是一个 D- 双余模通过 $p_0\psi$. 从而 $\psi_1|_{C_1} : C_1 \to k(\Delta_1, \mathcal{D})$ 也是一个 D- 双余模同态因为 C_1 是一个是一个子余代数. 显然， $C_1 = C_0 \oplus I_1$.

我们宣称 $\psi_1|_{I_1}$ 还是一个 D- 双余模同态. 事实上，只需证 I_1 也是一个 D- 双余模. 我们只证它是一个左 D- 余模因为我们可以类似的证明右的情形. 由左 D- 余模结构映射的定义 $\rho_L(c) = p_0\psi(c') \otimes c''$ 对 $c \in C$. 我们在定理 7.3.7 的证明中已经知道 $\triangle(I_1) \subseteq I_1 \otimes C_0 + C_0 \otimes I_1$. 所以，$\rho_L(I_1) \subseteq p_0\psi(I_1) \otimes C_0 + p_0\psi(C_0) \otimes I_1 = p_0\psi(C_0) \otimes I_1$ 因为 $\psi(I_1) \subseteq k(\Delta_1, \mathcal{D})$ 从而 $p_0\psi(I_1) = 0$. 这意味 $\rho_L(I_1) \subseteq D \otimes I_1$ 且 I_1 是一个左 D- 余模.

但是 $\psi_1|_{I_1} = \psi|_{I_1}$ 因为 $\psi(I_1) \subseteq k(\Delta_1, \mathcal{D})$, 这意味 $C_1/C_0 = I_1$ 作为 D- 双余模可以嵌入到 $k(\Delta_1, \mathcal{D})$. 因此， ${}^{S_i}(C_1/C_0)^{S_j} \hookrightarrow {}^{T_{\iota(i)}}k(\Delta_1, \mathcal{D})^{T_{\iota(j)}}$ 作为 $T_{\iota(i)}$-$T_{\iota(j)}$- 双余模. 设 V_{ij} 是作为自由 $T_{\iota(i)}$-$T_{\iota(j)}$- 双余模 ${}^{S_i}(C_1/C_0)^{S_j}$ 的一个极小实现. 由 $k(\Delta, \mathcal{D})$ 的定义，存在一个 k- 空间 W_{ij} 使得 ${}^{T_{\iota(i)}}k(\Delta_1, \mathcal{D})^{T_{\iota(j)}} \cong T_{\iota(i)} \otimes (W_{ij}) \otimes T_{\iota(j)}$. 注意到从 i 到 j 在 Δ_C 中的箭向个数为 $\dim(V_{ij})$ 且从 $\iota(i)$ 到 $\iota(j)$ 的箭向个数是 $\dim(W_{ij})$, 我们得到想要的因为 $\dim(V_{ij}) \leq \dim(W_{ij})$. □

在 [56] 中，作者一下面的方式定义了 C 的 quiver $\Gamma(C)$ ：顶点集 $\Gamma(C) = (\Gamma(C)_0, \Gamma(C)_1)$ 为 C 的单子余代数;对任意两个单子余代数 S_1 和 S_2, 存在 $\dim((S_1 \wedge_C S_2)/(S_1 + S_2))$ 个从 S_1 到 S_2 的箭向. 给定两个 quiver $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1)$, 我们说 Δ 是 Δ' 的一个 *广子 quiver* 如果 Δ 是 Δ' 的子 quiver 且 $\Delta_0 = \Delta'_0$. 名称 "广" 来源于 groupoid 理论. 一个子 groupoid $G \subseteq G'$ 称为广子 groupoid 如果 $G_0 = G'_0$ (见 [73] 的 88 页). Δ_C 和 $\Gamma(C)$ 的关系由下面的定理给出：

定理 7.3.11. 假定 C 是一个余代数满足 $CodimC_0 \leq 1$. 则 Δ_C 是 $\Gamma(C)$ 的一个广子 *quiver*.

证明. 显然, $(\Delta_C)_0=\Gamma(C)_0$. 为了证明 Δ_C 是 $\Gamma(C)$ 的一个子 quiver, 我们只需证从 i 到 j 在 Δ_C 中的箭向个数不大于对应 $\Gamma(C)$ 中的箭向个数对所有 $i,j\in(\Delta_C)_0$.

我们宣称为 S_i-S_j- 双余模, $(S_i\wedge_C S_j)/(S_i+S_j)\cong {}^i(C_1/C_0)^j$ 作对 $i,j\in(\Delta_C)_0$. 这个宣称已经在 [11] 中得到. 为了完整, 我们再证. 首先, 我们证明 $(S_i\wedge_C S_j)\cap C_0=S_i+S_j$. 显然, $S_i+S_j\subseteq(S_i\wedge_C S_j)\cap C_0$. 另外, 如果存在一个单子余代数 $S_l\subseteq(S_i\wedge_C S_j)\cap C_0$ 且 $l\neq i,j$, 则 $\triangle(S_l)\subseteq S_l\otimes S_l$. 从而 S_l 不会属于 $S_i\wedge_C S_j$. 因此 $S_i+S_j\supseteq(S_i\wedge_C S_j)\cap C_0$.

我们定义一个映射 $\xi: (S_i\wedge_C S_j)/(S_i+S_j)\to C_1/C_0$ 为 $x+(S_i+S_j)\mapsto x+C_0$ 对 $x\in S_i\wedge_C S_j$. 显然, ξ 是良定义的. 如果 $x+C_0=y+C_0$ 对 $x,y\in S_i\wedge_C S_j$, 则 $x-y\in C_0\cap(S_i\wedge_C S_j)=S_i+S_j$ 从而 $x+(S_i+S_j)=y+(S_i+S_j)$. 这意味 ξ 是一个单射. 设 $\pi: S_i\wedge_C S_j\to(S_i\wedge_C S_j)/(S_i+S_j)$ 是典型的投射. 定义 $\delta_L: (S_i\wedge_C S_j)/(S_i+S_j)\to S_i\otimes(S_i\wedge_C S_j)/(S_i+S_j)$ 和 $\delta_R: (S_i\wedge_C S_j)/(S_i+S_j)\to(S_i\wedge_C S_j)/(S_i+S_j)\otimes S_j$ 通过 $\delta_L(\pi(x)):=(id\otimes\pi)\triangle(x)$, $\delta_R(\pi(x)):=(\pi\otimes id)\triangle(x)$ 对 $x\in S_i\wedge_C S_j$. 容易看到 $(S_i\wedge_C S_j)/(S_i+S_j)$ 是一个 S_i-S_j- 双余模且其结构映射为 δ_L, δ_R. 从而 ξ 是一个 S_i-S_j- 双余模嵌入从 $(S_i\wedge_C S_j)/(S_i+S_j)$ 到 ${}^i(C_1/C_0)^j$. 因此, 宣称将得到如果我们能证明 ξ 还是一个满射. 为此, 我们首先证明 $\sum_{i.j\in(\Delta_C)_0}S_i\wedge_C S_j=C_1$. 事实上, 由定理 4.7 , 记 $C=C_0\oplus I$. 对每一个 $i\in\Delta_0$, 以下面的方式定义 $\varepsilon_i\in C^*$: $\varepsilon_i|_{S_i}=\varepsilon|_{S_i}$, $\varepsilon_i|_{S_j+I}=0$ 对 $j\neq i$. 对任意 C_1 中的元 x , 我们看到 $x=\sum_{i,j\in\Delta_0}\varepsilon_i\rightharpoonup x\leftharpoonup\varepsilon_j$ 且 $\varepsilon_i\rightharpoonup x\leftharpoonup\varepsilon_j\in S_i\wedge_C S_j$. 因此, $C_1=\sum_{i.j\in(\Delta_C)_0}S_i\wedge_C S_j$ 从而 $C_1/C_0=\sum_{i.j\in(\Delta_C)_0}(S_i\wedge_C S_j+C_0)/C_0\subseteq\sum_{i.j\in(\Delta_C)_0}{}^i(C_1/C_0)^j=\oplus_{i.j\in(\Delta_C)_0}{}^i(C_1/C_0)^j=C_1/C_0$, 这里 $(S_i\wedge_C S_j+C_0)/C_0\subseteq{}^i(C_1/C_0)^j$ 从 ξ 是一个单射得到. 这意味 ξ 是一个满射.

记 $t_{ij}=\dim((S_i\wedge_C S_j)/(S_i+S_j))$ 对 $i,j\in(\Delta_C)_0$. 由同构 $(S_i\wedge_C S_j)/(S_i+S_j)\cong{}^i(C_1/C_0)^j$ 对 $i,j\in(\Delta_C)_0$, 我们有 ${}^i(C_1/C_0)^j\hookrightarrow S_i\otimes((S_i\wedge_C S_j)/(S_i+S_j))\otimes S_j$. 注意到从 i 到 j 在 Δ_C 中的箭向个数 l_{ij} 等于极小实现 ${}^i(C_1/C_0)^j$ 的维数, 从而 $l_{ij}\leq t_{ij}$. $\square$

§7.4 广义路代数

我们容易对偶广义路余代数的概念而得到广义路代数. 广义路代数的定义已经在 [16] 中给出.

设 $\Delta=(\Delta_0,\Delta_1)$ 一个 quiver 且 $\mathcal{A}=\{A_i: i\in\Delta_0\}$ 是一组 k- 代数 A_i 具有单位 e_i. $\bigcup_{i\in\Delta_0}A_i$ 的元 a_i 称为 *长度 0 的 $\mathcal{A}$- 路*, 它的起点和终点都是 i. 对每一个 $n\geq 1$, 一个 *长度 n 的 $\mathcal{A}$- 路 P* 定义为 $a_1\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}$, 这里 $(s(\beta_1)|\beta_1\cdots\beta_n|e(\beta_n))$ 是一个 Δ 中长度 n 的路, 对每一个 $i=1,\cdots,n$ 、 $a_i\in A_{s(\beta_i)}$ 和 $a_{n+1}\in A_{e(\beta_n)}$. $s(\beta_1)$ 和 $e(\beta_n)$ 分别称为 P 的起点和终点并令 $s(P)=s(\alpha_1)$ 且 $e(P)=e(\alpha_n)$. 现在

考虑以所有 $\mathcal{A}$- 路为基的 k- 空间模掉下面形状元素生成的空间的商空间 R：

$$a_1\beta_1\cdots\beta_{j-1}(\sum_{i=1}^{m}k_ia_j^i)\beta_ja_{j+1}\cdots\beta_na_{n+1}-\sum_{i=1}^{m}k_ia_1\beta_1\cdots\beta_{j-1}a_j^i\beta_ja_{j+1}\cdots\beta_na_{n+1}$$

这里 $(s(\beta_1)|\beta_1\cdots\beta_n|e(\beta_n))$ 是 Δ 中一个长度 n 的路且对 $i=1,\cdots,n$ 、 $a_i\in A_{s(\beta_i)},k_i\in k$ 、 $a_{n+1}\in A_{e(\beta_n)}$ 和 $a_j^l\in A_{s(\beta_j)}$ 对 $l=1,\cdots,m$. 在 R 中定义下面的乘法：给定两个元素 $[a_1\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}]$ 和 $[b_1\gamma_1b_2\gamma_2\cdots b_n\gamma_nb_{n+1}]$，定义

$$[a_1\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}]\cdot[b_1\gamma_1b_2\gamma_2\cdots b_n\gamma_nb_{n+1}]$$
$$=\begin{cases}[a_1\beta_1a_2\beta_2\cdots a_n\beta_n(a_{n+1}b_1)\gamma_1b_2\gamma_2\cdots b_n\gamma_nb_{n+1}], & \text{如果 } a_{n+1},b_1\in A_i \text{ 对同样的 } i\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

容易验证上面的乘法是良定义的并使 R 成为一个 k- 代数. 这个代数 R 称为 Δ 的 $\mathcal{A}$- 路代数. 记之为 $R=k(\Delta,\mathcal{A})$ 并称它为一个广义路代数. 显然， R 是一个 A- 双模.

注 7.4.1. *(i)* $R=k(\Delta,\mathcal{A})$ 有单位元当且仅当 Δ_0 有限;

(ii) 任意 Δ 中的路 $(s(\beta_1)|\beta_1\cdots\beta_n|e(\beta_n))$ 都可以认为是 $\mathcal{A}$- 路通过设定 $a_i=e_i$. 从而通常的路代数 $k\Delta$ 可以嵌入到 $\mathcal{A}$- 路代数 $k(\Delta,\mathcal{A})$ 中. 或者说如果 $A_i=k$ 对每一个 $i\in\Delta_0$, 则 $k(\Delta,\mathcal{A})=k\Delta$;

(iii) 对 $R=k(\Delta,\mathcal{A})$, $dim_kR<\infty$ 当且仅当 $dim_kA_i<\infty$ 对每个 $i\in\Delta_0$ 且 Δ 是一个无定向圈的有限 *quiver.*

现在我们定义一类特殊的张量代数并用它来刻画广义路代数. 一个 $\mathcal{A}$- 路型张量代数 是一个张量代数 $T(A,M)$ 满足 (i) $A=\bigoplus_{i\in\Delta_0}A_i$ 对一组 k- 代数 $\mathcal{A}=\{A_i:i\in\Delta_0\}$, (ii) $M=\bigoplus_{i,j\in I}{}_iM_j$ 对有限生成 A_i-A_j- 双模 ${}_iM_j$ 对所有的 i 和 j 且 $A_k\cdot_i M_j=0$ 如果 $k\neq i$ 且 ${}_iM_j\cdot A_k=0$ 如果 $k\neq j$. 一个 自由 $\mathcal{A}$- 路型张量代数 是一个 $\mathcal{A}$- 路型张量代数 $T(A,M)$，它的每一个有限生成 A_i-A_j- 双模 ${}_iM_j$ 对所有 i 和 j 是一个自由双模有一个基. 且此组基的阶等于 ${}_iM_j$ 作为有限生成模的阶. 这里 ${}_iM_j$ 的阶定义为 ${}_iM_j$ 作为模的最小生成元集的个数.

$\mathcal{A}$- 路型张量代数和广义路代数可以以下面的方式相互构造：

对一个 $\mathcal{A}$- 路代数 $k(\Delta,\mathcal{A})$, 设 $A=\bigoplus_{i\in\Delta_0}A_i$. 对任意 i 和 j, 设 ${}_iM_j^F$ 是自由 A_i-A_j- 双模且以从 i 到 j 的箭向为自由生成元. 显然, 自由生成元的个数就是 ${}_iM_j^F$ 作为有限生成模的阶. 定义 $A_k\cdot_i M_j^F=0$ 如果 $k\neq i$ 且 ${}_iM_j^F\cdot A_k=0$ 如果 $k\neq j$. 设 $M^F=\bigoplus_{i\to j}{}_iM_j^F$, 它显然是一个 A- 双模. 从而我们得到唯一的自由 $\mathcal{A}$- 路型张量代数 s $T(A,M^F)$.

反之，假定 $T(A,M)$ 是一个 $\mathcal{A}$- 路型张量代数具备一组 k- 代数 $\mathcal{A}=\{A_i : i\in I\}$ 满足 $A=\bigoplus_{i\in I} A_i$ 及有限生成 A_i-A_j- 双模 ${}_iM_j$ 满足 $M=\bigoplus_{i,j\in I}{}_iM_j$ 、$A_k\cdot {}_iM_j=0$ 如果 $k\neq i$ 且 ${}_iM_j\cdot A_k=0$ 如果 $k\neq j$. 平凡的， ${}_iM_j=A_iMA_j$. 设 ${}_iM_j$ 的阶为 r_{ij}. 现在我们为 $T(A,M)$ 配备一个 quiver $\Delta=(\Delta_0,\Delta_1)$ 和一个广义路代数 $R=k(\Delta,\mathcal{A})$：设顶点集为 $\Delta_0=I$；对 $i,j\in I$, 设从 i 到 j 的箭向个数为 r_{ij}， ${}_iM_j$ 作为 A_i-A_j- 双模的阶. 显然，如果 ${}_iM_j=0$, 则没有从 i 到 j 的箭向. 所以，我们得到一个 $\Delta=(\Delta_0,\Delta_1)$ 并称为 $T(A,M)$ 的 *quiver*. 同时得到 $\mathcal{A}$- 路代数 $R=k(\Delta,\mathcal{A})$ 并称为与 $T(A,M)$对应的 $\mathcal{A}$- 路代数.

本节的主要目的就是讨论 $T(A/J,J/J^2)$ 的 quiver 和 A 的 Ext-quiver 的关系. 我们还给出了此关系一些应用.

引理 7.4.2. 设 $\{P_i\}$ 是非同构投射模的完全、 $\{e_i\}$ 是本原幂等元集满足 $P_i\cong Ae_i$ 且 $S_i=P_i/JP_i$. 则 $n\ dim_kExt^1(S_i,S_j)=dim_k(e_jJ/J^2e_i)$.

证明. 已经在 [8] (68 页) 中得到. □

命题 7.4.3. 设 $m_{ij}=dim_kExt^1(S_i,S_j)$ 且 g_{ij} 为 A_iJ/J^2A_j 作为 A_i-A_j- 双模的阶. 则 n

(i)

$$g_{ij}\le m_{ij}\le n_in_jg_{ij}$$

这里 $A_i=M_{n_i}(k), A_j=M_{n_j}(k)$ 和

(ii) $g_{ij}\neq 0$ 当且仅当 $m_{ij}\neq 0$.

证明. 由引理 7.4.2, 如果我们分解 1_{A_i} 为本原元的和 $1_{A_i}=e^i_{11}+\cdots+e^i_{n_in_i}$ 对所有的 i, 则 $dim_kExt^1(S_i,S_j)=dim_k(e^j_{kk}J/J^2e^i_{ll})$ 对 $1\le k\le n_j$ 和 $1\le l\le n_i$. 因此，

$$\begin{aligned}
dim_kA_iJ/J^2A_j &= dim_k1_{A_i}J/J^21_{A_j}\\
&= e^j_{11}J/J^2e^i_{11}+\cdots+dim_ke^j_{11}J/J^2e^i_{n_in_i}+e^j_{22}J/J^2e^i_{11}+\cdots\\
&\quad +dim_ke^j_{n_jn_j}J/J^2e^i_{n_in_i}\\
&= n_in_jdim_kExt^1(S_i,S_j)\\
&= n_in_jm_{ij}
\end{aligned}$$

记最小生成元集为 $\{r^1_{ij},\ldots,r^{g_{ij}}_{ij}\}$. 如果每一个首次元能生成一个自由 A_i-A_j- 双模，则 A_iJ/J^2A_j 的维数将是最大. 在这种情形下， $dim_kA_iJ/J^2A_j=n_i^2n_j^2g_{ij}$ 从而 $n_i^2n_j^2g_{ij}=n_in_jm_{ij}$ 这意味 $m_{ij}=n_in_jg_{ij}$. 另一个极端的情形就是每一个生成元只能

生成一个单 A_i-A_j- 双模. 则 A_iJ/J^2A_j 的维数将最小. 在这种情形 $dim_k A_iJ/J^2A_j = n_in_jg_{ij}$ 从而 $n_in_jg_{ij} = n_in_jm_{ij}$ 这意味 $m_{ij} = g_{ij}$. 因此,

$$g_{ij} \leq m_{ij} \leq n_in_jg_{ij}$$

(ii) 是显然的. □

类似于广义路余代数，我们称广义路代数 $k(\Delta, \mathcal{A})$ 是正规的如果每一个 A_i 都是但对对 $i \in \Delta_0$.

推论 7.4.4. *设 $k(\Delta, \mathcal{A})$ 是一个有限维正规广义路代数. 沿用上面的记号, $m_{ij} = n_in_jg_{ij}$.*

证明. 由广义路代数的定义，我们知道 A_iJ/J^2A_j 是一个自由 A_i-A_j- 双模. 从而，上面命题的证明给出我们想要的. □

这个命题可以帮助我们去刻画有限表示型的有限维 Hopf 代数的 quiver.

推论 7.4.5. *设 H 是一个有限维 Hopf 代数且为有限表示型. 假定它的基本代数还是一个 Hopf 代数. 沿用上面的记号，我们有*

$$m_{ij} = g_{ij}$$

即，如果我们记 $T(H/J, J/J^2)$ 的 quiver 为 Δ 且 H 的 Ext-quiver 为 Γ, 则 $\Delta \cong \Gamma$.

证明. 因为它的基本代数是一个 Hopf 代数，所以它的基本代数是一个有限表示型的基本 Hopf 代数. 从而它的表示型数为 1 或 0. 因此, $m_{ij} = 1$ 或 $m_{ij} = 0$. 由上面命题，我们有 $m_{ij} = g_{ij}$. □

推论 7.4.6. *设 H 是一个有限表示型的有限维 Hopf 代数. 如果它 Morita 等价于一个基本 Hopf 代数，则它的 Ext-quiver 是一些同构的圈的不交并，从而是一个 Nakayama 代数.* □

推论 7.4.7. *设 H 是一个有限表示型的的有限维 Hopf 代数. 则 H 的基本代数是一个 Hopf 代数当且仅当它的基本代数定理 4.5.15 (A) 中的某一个代数.*

证明. 显然. □

我们还可以应用上面的命题来讨论什么时候两个正规有限维广义路代数是 Morita 等价的.

命题 7.4.8. *如果两个正规有限维广义路代数 $k(\Delta, \mathcal{A})$ 和 $k(\Delta', \mathcal{A}')$ 是 Morita 等价的，则 $n_in_jg_{ij} = n'_in'_jg'_{ij}$.*

证明. 因为它们是 Morita 等价的，它们的基本代数是同构的. 这意味它们的 Ext-quiver 是一样的. 所以 $m_{ij} = m'_{ij}$. 由推论 7.4.4, 我们得到我们想要的. □

注 7.4.9. (1) 在某些情形，条件 $n_i n_j g_{ij} = n'_i n'_j g'_{ij}$ 还是充分的. 例如对正规广义路代数

$$\overset{k}{\bullet} \longrightarrow \overset{M_2(k)}{\bullet} \qquad\qquad \overset{M_2(k)}{\bullet} \longrightarrow \overset{k}{\bullet}$$

它们是是 *Morita* 等价的因为他们的基本代数都是 *Kronecker* 代数.

(2) 一般来讲，上面的条件 *(1)* 并不是充分的. 例如，对正规广义路代数

$$\overset{M_2(k)}{\bullet} \longrightarrow \overset{k}{\bullet} \longrightarrow \overset{M_2(k)}{\bullet} \qquad\qquad \overset{k}{\bullet} \longrightarrow \overset{M_2(k)}{\bullet} \longrightarrow \overset{k}{\bullet}$$

它们不是 *Morita* 等价的因为它们的基本代数是不同构的.

§7.5 广义路余代数上的 Hopf 结构

本节的主要结论就是:

定理 7.5.1. 正规广义路余代数 $k(\Delta, \mathcal{C})$ 上具有一个以长度分次的分次 *Hopf* 代数结构当且仅当 $k(\Delta_1, \mathcal{C})$ 是一个 $k(\Delta_0, \mathcal{C})$-*Hopf* 双模且双余模映射就是命题 *7.1.2* 中给出的.

回顾对一个 Hopf 代数 H, 一个 H- 双模 M 称为 H-Hopf 双模如果它还是一个 H- 双余模且余模作用是双模同态. 下面的命题蕴含了上面定理的一个方向.

命题 7.5.2. 如果 $k(\Delta, \mathcal{C})$ 上具有一个以长度分次的分次 *Hopf* 代数结构, 则 $k(\Delta_n, \mathcal{C})$ 是一个 $k(\Delta_0, \mathcal{C})$-*Hopf* 双模对 $n \geq 1$.

证明. 对任意 $x \in k(\Delta_n, \mathcal{C})$, 定义

$$\delta_L(x) := (x')_0 \otimes x'' \;\text{ 和 }\; \delta_R(x) := x' \otimes (x'')_0$$

由命题 7.1.2, 在这样的余作用下， $k(\Delta_n, \mathcal{C})$ 是一个 $k(\Delta_0, \mathcal{C})$- 双余模. 同时，因为 $k(\Delta, \mathcal{C})$ 上具有一个以长度分次的分次 Hopf 代数结构，我们有 $k(\Delta_n, \mathcal{C})$ 是一个 $k(\Delta_0, \mathcal{C})$- 双模通过乘法. 从而，我们最后的任务就是去证余作用是双模同态.

事实上，对 $v \in k(\Delta_0, \mathcal{C})$ 和 $P = a_1\beta_1a_2\cdots a_n\beta_na_{n+1} \in k(\Delta_n, \mathcal{C})$, 我们可以假定 $vP = \sum_i c_iP_i$ 对 $c_i \in k$ 且

$$P_i = a_{i1}\beta_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}\beta_{in}a_{i(n+1)}$$

因此,

$$\delta_L(vP) = \sum c_ia'_{i1} \otimes a''_{i2}\beta_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}\beta_{in}a_{i(n+1)}$$

且

$$v \cdot \delta_L(P) = \sum v'a'_1 \otimes v''a''_1\beta_1a_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}$$

因为 $k(\Delta, \mathcal{C})$ 是一个 Hopf 代数，我们得到 $\Delta(vP) = \Delta(v)\Delta(P)$. 所以

$$\Delta(vP) = \sum c_i(a'_{i1}\otimes a''_{i1}\beta_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}\beta_{in}a_{i(n+1)} + \cdots + a_{i1}\beta_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}\beta_{in}a'_{i(n+1)}\otimes a''_{i(n+1)})$$

等于

$$\Delta(v)\Delta(P) = \sum v'a'_1 \otimes v''a''_1\beta_1a_2\cdots a_n\beta_na_{n+1} + \cdots + v'a_1\beta_1a_2\cdots a_n\beta_na'_{n+1} \otimes v''a''_{n+1}$$

比较这些广义路的长度，我们有

$$\sum c_ia'_{i1} \otimes a''_{i2}\beta_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}\beta_{in}a_{i(n+1)} = \sum v'a'_1 \otimes v''a''_1\beta_1a_2\cdots a_n\beta_na_{n+1}$$

即， $\delta_L(vP) = v \cdot \delta_L(P)$. 我们可以类似的的证明 δ_L 还是一个右模同态. 类似的对 δ_R 进行讨论. □

接下来，让我们来证明定理 7.5.1 的另一个方向. 所以我们需要假定 $k(\Delta_0, \mathcal{C})$ 是一个 Hopf 代数且 $k(\Delta_1, \mathcal{C})$ 是一个 $k(\Delta_0, \mathcal{C})$-Hopf 双模且余作用为 δ_L 和 δ_R. 定义 $\psi_0:\ X = k(\Delta, \mathcal{C}) \otimes k(\Delta, \mathcal{C}) \to k(\Delta_0, \mathcal{C})$ 是下面映射的合成:

$$X \xrightarrow{p_0\otimes p_0} k(\Delta_0, \mathcal{C}) \otimes k(\Delta_0, \mathcal{C}) \xrightarrow{m_0} k(\Delta_0, \mathcal{C})$$

这里 m_0 是 $k(\Delta_0, \mathcal{C})$ 的乘法.

引理 7.5.3. ψ_0 是一个余代数同态.

证明. 我们使用下标去表示长度. 具体的，例如如果我们记广义路为 x_i，则 x_i 的长度为 i. 从而，一般的我们可以写 X 中的一个元为 $\sum c_{jl}x_i^j \otimes x_k^l$ 对 $c_{jl} \in k$. 因此,

$$\Delta\psi_0(\sum c_{jl}x_i^j \otimes x_k^l) = \Delta(\sum c_{jl}x_0^jx_0^l) = \sum c_{jl}\Delta(x_0^j)\Delta(x_0^l)$$

且

$$\begin{aligned}(\psi_0\otimes\psi_0)\Delta(\sum c_{jl}x_i^j\otimes x_k^l) &= (\psi_0\otimes\psi_0)(id\otimes\tau\otimes id)(\sum c_{jl}\Delta(x_i^j)\otimes\Delta(x_k^l))\\ &= (\psi_0\otimes\psi_0)(\sum c_{jl}x_i^{j}{'}\otimes x_k^{l}{'}\otimes x_i^{j}{''}\otimes x_k^{l}{''})\\ &= \sum c_{jl}(x_i^{j}{'})_0(x_k^{l}{'})_0\otimes(x_i^{j}{''})_0(x_k^{l}{''})_0\\ &= \sum c_{jl}x_0^{j}{'}x_0^{l}{'}\otimes x_0^{j}{''}x_0^{l}{''}\end{aligned}$$

从而 $\Delta\psi_0=(\psi_0\otimes\psi_0)\Delta$. 显然, $\varepsilon\psi_0=\varepsilon$. 故, ψ_0 是一个余代数同态. □

定义 ψ_1: $X=k(\Delta,\mathcal{C})\otimes k(\Delta,\mathcal{C})\to k(\Delta_1,\mathcal{C})$ 是下面映射的合成:

$$X\xrightarrow{p_0\otimes p_1\oplus p_1\otimes p_0}(k(\Delta_0,\mathcal{C})\otimes k(\Delta_1,\mathcal{C}))\oplus(k(\Delta_1,\mathcal{C})\otimes k(\Delta_0,\mathcal{C}))\xrightarrow{m_l\oplus m_r}k(\Delta_1,\mathcal{C})$$

这里 m_l 和 m_r 分别表示左和右模作用.

引理 7.5.4. ψ_1 是一个 $k(\Delta_0,\mathcal{C})$- 双余模同态.

证明. 我们只证 ψ_1 是一个左 $k(\Delta_0,\mathcal{C})$- 余模同态因为其他的情形可以类似的证明. 设 $\sum c_{jl}x_i^j\otimes x_k^l$ 是 X 中的一个元素. 则

$$\psi_1(\sum c_{jl}x_i^j\otimes x_k^l)=\sum c_{jl}x_0^j\cdot x_1^l+\sum c_{jl}x_1^j\cdot x_0^l$$

因此

$$\delta_L\psi_1(\sum c_{jl}x_i^j\otimes x_k^l)=\sum c_{jl}x_0^j\cdot\delta_L(x_1^l)+\sum c_{jl}\delta_L(x_1^j)\cdot x_0^l$$

另外,

$$\begin{aligned}(id\otimes\psi_1)\delta_L(\sum c_{jl}x_i^j\otimes x_k^l) &= (id\otimes\psi_1)(\sum c_{jl}\psi_0(x_i^{j}{'}\otimes x_k^{l}{'})\otimes x_i^{j}{''}\otimes x_k^{l}{''})\\ &= (id\otimes\psi_1)(\sum c_{jl}(x_i^{j}{'})_0(x_k^{l}{'})_0\otimes x_i^{j}{''}\otimes x_k^{l}{''})\\ &= \sum c_{jl}(x_0^{j}{'})_0(x_1^{l}{'})_0\otimes x_0^{j}{''}\cdot x_1^{l}{''}+\sum c_{jl}(x_1^{j}{'})_0(x_0^{l}{'})_0\otimes x_1^{j}{''}\cdot x_0^{l}{''}\\ &= \sum c_{jl}x_0^j\cdot\delta_L(x_1^l)+\sum c_{jl}\delta_L(x_1^j)\cdot x_0^l\end{aligned}$$

所以, $\delta_L\psi_1=(id\otimes\psi_1)\delta_L$ 从而 ψ_1 是一个左 $k(\Delta_0,\mathcal{C})$- 余模同态. □

定理 7.5.1 的证明： 由命题 7.5.2, 我们只需证充分性. 定义

$$\psi_n:\ X \overset{\triangle^{(n-1)}}{\longrightarrow} X\otimes X\otimes\cdots\otimes X \overset{\psi_1^{\otimes n}}{\longrightarrow} k(\Delta_1,\mathcal{C})^{\otimes n},\ \ n\geq 2$$

和 $\psi=\sum\psi_n$. 由引理 7.5.3, 引理 7.5.4 和引理 7.1.4, $\psi: k(\Delta,\mathcal{C})\otimes k(\Delta,\mathcal{C})\to k(\Delta,\mathcal{C})$ 是一个余代数同态. 这意味 $k(\Delta,\mathcal{C})$ 是一个双代数. 我们知道 $k(\Delta,\mathcal{C})$ 的余根是 $k(\Delta_0,\mathcal{C})$，而它是一个 Hopf 代数. 因此, 由 Takeuchi 的一个结果 (见 [77]), $k(\Delta,\mathcal{C})$ 是一个 Hopf 代数. 由乘法的定义，我们知道它是长度分次. □

第八章　弱张量范畴及相关推广的 Hopf 代数

本章中， K 是任意一个域且所有的空间都是 K- 空间. 本章的主要目的是研究弱 Hopf 代数的表示范畴.

§8.1　定义和例子

我们知道张量范畴在量子群 [37] 理论中起到了很重要的作用. 本节中，我们首先给出 *预张量范畴* 和 *弱张量范畴* 的定义. 他们都是张量范畴的推广. 接下来我们同过一些例子来说明他们同一些推广的 Hopf 代数的关系.

定义 8.1.1. (i) *[44]* 一个 *预张量范畴* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, a)$ 是一个范畴 $\mathcal{C}$ 并配备了一个张量积 $\otimes$: $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 和结合约束 a 使得 *五边公理* 成立，即，下面的五边形

$$\begin{tikzcd}
((U \otimes V) \otimes W) \otimes X \arrow[r, "a_{U,V,W} \otimes id_X"] \arrow[d, "a_{U \otimes V, W, X}"] & (U \otimes (V \otimes W)) \otimes X \arrow[dd, "a_{U, V \otimes W, X}"] \\
(U \otimes V) \otimes (W \otimes X) \arrow[d, "a_{U,V,W \otimes X}"] & \\
U \otimes (V \otimes (W \otimes X)) & U \otimes ((V \otimes W) \otimes X) \arrow[l, "id_U \otimes a_{V,W,X}"']
\end{tikzcd}$$

(五边公理)

对 $U, V, W, X \in \mathcal{C}$ 是交换的. 预张量范畴称为 *严格* 的如果结合子 a 是一个恒等.

(ii): 一个 *弱张量范畴* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r, \bar{l}, \bar{r})$ 是一个预张量范畴 $(\mathcal{C}, \otimes, a)$ 具备 $I \in \mathcal{C}$ (称为单位对象) 和自然变换：

$$l = l_A : \ I \otimes A \longrightarrow A, \qquad r = r_A : \ A \otimes I \longrightarrow A$$

$$\bar{l} = \bar{l}_A : \ A \longrightarrow I \otimes A, \qquad \bar{r} = \bar{r}_A : \ A \longrightarrow A \otimes I$$

使得，对所有的对象 $A, B \in \mathcal{C}$, 下图交换：

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rrrr, "a_{A,I,B}"] \arrow[dr, "r_A \otimes id_B"'] & & & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "id_A \otimes l_B"] \\
& A \otimes B \arrow[dr, "l\bar{l}_{A \otimes B}"'] & & A \otimes B \arrow[dl, "l\bar{l}_{A \otimes B}"] & \\
& & A \otimes B & &
\end{tikzcd}$$

(大三角公理)

和

$$l_A\bar{l}_A = r_A\bar{r}_A \tag{8.1}$$

$$\bar{l}_A l_A \bar{l}_A = \bar{l}_A, \quad l_A\bar{l}_A l_A = l_A \tag{8.2}$$

$$\bar{r}_A r_A \bar{r}_A = \bar{l}_A, \quad r_A\bar{r}_A r_A = r_A \tag{8.3}$$

$$l_{(A\otimes B)\otimes C}\bar{l}_{(A\otimes B)\otimes C} = a^{-1}_{A,B,C}(id_A \otimes l_{B\otimes C}\bar{l}_{B\otimes C})a_{A,B,C}(l_{A\otimes B}\bar{l}_{A\otimes B}\otimes id_C) \tag{8.4}$$

$$l_{A\otimes(B\otimes C)}\bar{l}_{A\otimes(B\otimes C)} = a_{A,B,C}(l_{A\otimes B}\bar{l}_{A\otimes B}\otimes id_C)a^{-1}_{A,B,C}(id_A \otimes l_{B\otimes C}\bar{l}_{B\otimes C}) \tag{8.5}$$

一个弱张量范畴称为 *严格* 的如果它作为预张量范畴是严格的.

显然，一个弱张量范畴一定是预张量范畴，且一个张量范畴是一个预张量范畴具备单位 I 、一个左单位约束 l 和一个右单位约束 r 相对于 I 使得三角公理满足 (见 [37, 定义 XI 2.1]).

例 8.1.1. 给定一个张量范畴 T 并对所有的对象 $A\in T$ 设 $\bar{l}_A = l_A^{-1}, \bar{r}_A = r_A^{-1}$ ，容易看到 T 是一个弱张量范畴.

为了给出是预张量范畴但不是弱张量范畴和是弱张量范畴但不是张量范畴的例子，我们先引入 [9],[42] 中的一些相关概念.

定义 8.1.2. 一个 *几乎双代数* $(\mathcal{A},\ \mu,\ 1,\ \Delta,\ \varepsilon)$ 是一个结合的有单位的代数 $(\mathcal{A},\ \mu,\ 1)$ 并具备余结合的余乘法: $\Delta:\ \mathcal{A}\to\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ 以及一个余单位 $\varepsilon:\ \mathcal{A}\to K$ 使得 $\Delta(ab)=\Delta(a)\Delta(b),\ \forall a,b\in\mathcal{A}$.

一个几乎双代数称为 *弱双代数* 如果下面的关系成立:

- $(\text{左}-monoidal):\ \varepsilon(abc)=\varepsilon(ab_{(1)})\varepsilon(b_{(2)}c),\ \forall a,b,c\in\mathcal{A}$
- $(\text{右}-monoidal):\ \varepsilon(abc)=\varepsilon(ab_{(2)})\varepsilon(b_{(1)}c),\ \forall a,b,c\in\mathcal{A}$
- $(\text{左 - 余}monoidal):\ (\Delta(1)\otimes 1)(1\otimes\Delta(1)) = 1_{(1)}\otimes 1_{(2)}\otimes 1_{(3)}$
- $(\text{右 - 余}monoidal):\ (1\otimes\Delta(1))(\Delta(1)\otimes 1) = 1_{(1)}\otimes 1_{(2)}\otimes 1_{(3)}$

这里我们自由的使用 Sweedler 记号并省略和号及和的下标.

以文 [64] 中的术语来说，一个几乎双代数 $(\mathcal{A},\ \mu,\ 1,\ \Delta,\ \varepsilon)$ 被其称为弱双代数. 而弱双代数被其称为 “双 monoidal” 弱双代数.

引理 8.1.1. [44] *设 $\mathcal{A}$ 是一个代数具备两个线性映射 $\Delta: \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ 和 $\varepsilon: \mathcal{A} \to K$ 使得 $(\varepsilon \otimes id)\Delta = (id \otimes \varepsilon)\Delta = id$. 则 $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \mu, 1, \Delta, \varepsilon)$ 是一个几乎双代数当且仅当下面的条件成立：*

(1) 对所有的 $\mathcal{A}$- 模 U 和 V, 线性空间的张量积 $U \otimes V$ 是一个 $\mathcal{A}$- 模通过 $a \cdot (\sum_i u_i \otimes v_i) = \Delta(a)(\sum_i u_i \otimes v_i)$ 对所有的 $a \in \mathcal{A}$, $u_i \in U$, $v_i \in V$;

(2) 范畴 $\mathcal{A}$-Mod 是一个预张量范畴具备 (1) 所定义的张量积.

几乎双代数的定义首先出现在 [42] 中. 在 [42] 中，作者证明了余交换 预 *Hopf* 代数（见定义 8.2.3 ）的 Drinfeld 偶是一个几乎双代数. 弱双代数在 [9] 中得到充分的研究. 在本节的下面内容中，我们假定 $(\mathcal{A}, \mu, 1, \Delta, \varepsilon)$ 是一个有限维几乎双代数并记它的对偶为 $\widehat{\mathcal{A}}$. 我们知道 $\mathcal{A}$ 是一个几乎双代数当且仅当 $\widehat{\mathcal{A}}$ 也是. 且 $\mathcal{A}$ 是一个弱双代数当且仅当 $\widehat{\mathcal{A}}$ 也是 (见 [9] 、 [64]). 设 $I = \mathcal{A} \rightharpoonup \widehat{1}$, 这里 $a \rightharpoonup f = a_{(1)} f(a_{(2)})$ 对任意的 $a \in \mathcal{A}$ 和 $f \in \widehat{\mathcal{A}}$. 容易看到 I 是一个 $\mathcal{A}$- 模通过 $\rightharpoonup$. 设 $Rep(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的有限维模的表示范畴.

注意到上面的 $\mathcal{A}$- 模可能不是幺的，即， $1 \cdot v = v$ 对 $v \in V$ 并不是总是成立的.

对于 $Rep(\mathcal{A})$ 的对象 V, W ， $V \otimes_K W$ 是一个 $\mathcal{A}$- 模通过 Δ.

我们引入 K- 线性映射：

$$l_V: \ I \otimes V \longrightarrow V \ \text{通过} \ \phi \otimes v \mapsto \phi(1_{(1)})1_{(2)} \cdot v$$

$$r_V: \ V \otimes I \longrightarrow V \ \text{通过} \ v \otimes \phi \mapsto \phi(1_{(2)})1_{(1)} \cdot v$$

$$\bar{l}_V: \ V \longrightarrow I \otimes V \ \text{通过} \ v \mapsto 1_{(1)} \rightharpoonup \widehat{1} \otimes 1_{(2)} \cdot v$$

$$\bar{r}_V: \ V \longrightarrow V \otimes I \ \text{通过} \ v \mapsto 1_{(1)} \cdot v \otimes 1_{(2)} \rightharpoonup \widehat{1}$$

这些映射在 $Rep(\mathcal{A})$ 的自然性可以容易的证得.

引理 8.1.2. [64] *在上述的定义下，下面的结论成立：*

(1) 对所有的 $V \in Rep(\mathcal{A})$ ， $\bar{l}_V$ 都是 $\mathcal{A}$- 线性的当且仅当 $\mathcal{A}$ 是左 -monoidal 的.

(2) 对所有的 $V \in Rep(\mathcal{A})$ ， $\bar{r}_V$ 都是 $\mathcal{A}$- 线性的当且仅当 $\mathcal{A}$ 是右 -monoidal 的.

注意到在 [64] 中，引理 8.1.2 同样的结论是在假定 $Rep(\mathcal{A})$ 由所有的有限维幺 $\mathcal{A}$- 模组成时得到的. 但是由引理 8.1.2 ，我们考虑 $Rep(\mathcal{A})$ 是由所有的有限维 $\mathcal{A}$-

模组成. 这意味条件“幺”是可以去掉的.

作为引理 8.1.2 的类似，我们有

引理 8.1.3. *(1) 对所有的 $V \in Rep(\mathcal{A})$， l_V 都是 $\mathcal{A}$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 是右 -monoidal 的;*

(2) 所有的 $V \in Rep(\mathcal{A})$， r_V 都是 $\mathcal{A}$ 当且仅当 $\mathcal{A}$ 是左 -monoidal 的.

证明. 类似于引理 8.1.2. □

命题 8.1.4. *在上面定义下，我们有下面的结论成立:*

(1) $\mathcal{A}$ 是右余 monoidal 当且仅当定义 8.1.1 中的条件 (8.4) 成立，即

$$l_{(A\otimes B)\otimes C}\bar{l}_{(A\otimes B)\otimes C} = a^{-1}_{A,B,C}(id_A \otimes l_{B\otimes C}\bar{l}_{B\otimes C})a_{A,B,C}(l_{A\otimes B}\bar{l}_{A\otimes B}\otimes id_C)$$

对所有的 $A, B, C \in Rep(\mathcal{A})$.

(2) $\mathcal{A}$ 是左余 monoidal 当且仅当定义 8.1.1 中的条件 (8.5) 成立，即,

$$l_{A\otimes(B\otimes C)}\bar{l}_{A\otimes(B\otimes C)} = a_{A,B,C}(l_{A\otimes B}\bar{l}_{A\otimes B}\otimes id_C)a^{-1}_{A,B,C}(id_A \otimes l_{B\otimes C}\bar{l}_{B\otimes C})$$

对所有的 $A, B, C \in Rep(\mathcal{A})$.

证明. 注意到 $l_V\bar{l}_V(v) = r_V\bar{r}_V(v) = 1\cdot v$ 对 $\forall v \in V$, 这里 $V \in Rep(\mathcal{A})$, 且 $\mathcal{A}$ 是一个 $\mathcal{A}$- 模通过乘法. 所以， (8.4) 满足当且仅当 $(\Delta\otimes id)\Delta(1) = (1\otimes\Delta(1))(\Delta(1)\otimes 1)$, 即， $\mathcal{A}$ 是右余 monoidal 的. 所以我们证明了 (1).

至于 (2), 我们可以类似的证明. □

在这些准备下，我们得到:

定理 8.1.5. *在上面的定义下，几乎双代数 $\mathcal{A}$ 是一个弱双代数当且仅当 $Rep(\mathcal{A})$ 是一个弱张量范畴.*

证明. “充分性”这个方向由引理 8.1.2 和命题 8.1.4 直接得到.

“必要性”由引理 8.1.2 、引理 8.1.3 和命题 8.1.4, 唯一的任务就是证明大三角公理和关系 (8.1) 、(8.2) 、(8.3). (8.1) 、(8.2) 和 (8.3) 可以直接由 $l, r, \bar{l}, \bar{r}$ 的定义得到. 我们现在来证大三角公理. 设 V, W 是两个有限维 $\mathcal{A}$- 模且 $v \in V, w \in W, f \in I$. 大三角公理等价于

$$1\cdot(f(1_{(2)})1_{(1)}\cdot v\otimes w) = 1\cdot(v\otimes f(1_{(1)})1_{(2)}\cdot w) \qquad (*)$$

由 I 的定义，我们知道存在 $\mathcal{A}$ 的一个元素 b 使得 $f=b\rightharpoonup\widehat{1}$, 从而，

$$\begin{aligned} LHS\ (*) &= \varepsilon(1_{(2)}b)1'1_{(1)}\cdot v\otimes 1''\cdot w\\ &= 1_{(1)}\varepsilon(1_{(3)}b)\cdot v\otimes\varepsilon_t(1_{(2)})\cdot w\\ &= 1_{(1)}\cdot v\otimes\varepsilon(1'1_{(2)})1''\varepsilon(1_{(3)}b)\cdot w\\ &= 1_{(1)}\cdot v\otimes\varepsilon(1'1_{(2)}b)1''\cdot w\\ &= 1_{(1)}\cdot v\otimes\varepsilon(1_{(2)}b)1_{(3)}\cdot w \end{aligned}$$

这里第二个等式由关系 $1_{(1)}1'\otimes 1_{(2)}\otimes 1''=1_{(1)}\otimes\varepsilon_t(1_{(2)})\otimes 1_{(3)}$ (见 [9]) 得到，第四个等式由 $\mathcal{A}$ 是左 monoidal 的而第五个等式由 $\mathcal{A}$ 是右余 monoidal.

$$\begin{aligned} RHS\ (*) &= 1_{(1)}\cdot v\otimes\varepsilon(1'b)1_{(2)}1''\cdot w\\ &= 1_{(1)}\cdot v\otimes\varepsilon(\varepsilon_s(1_{(2)})b)1_{(3)}\cdot w\\ &= 1_{(1)}\cdot v\otimes\varepsilon(1_{(2)}b)1_{(3)}\cdot w \end{aligned}$$

这里第二个等式由关系 $1_{(1)}\otimes 1'\otimes 1_{(2)}1''=1_{(1)}\otimes\varepsilon_s(1_{(2)})\otimes 1_{(3)}$ (见 [9]) 而最后一个等式由 $\varepsilon(ab)=\varepsilon(\varepsilon_s(a)b)$ (见 [9]). 所以我们证明了等式 $(*)$. □

注 8.1.6. *在 [64], 作者定义了 $Rep(\mathcal{A})$ 中的对象为所有的有限维幺 $\mathcal{A}$- 模而张量积 $\times$ 定义为*

$$V\times W=\{x\in V\otimes W|x=\Delta(1)\cdot x\}$$

进一步的，他证明了几乎双代数 $\mathcal{A}$ 是左 monoidal 和右 monoidal 当且仅当 $Rep(\mathcal{A})$ 是一个张量范畴.

显然， $Ob(Rep(\mathcal{A}))$ 在 [64] 中只是我们的一个子类. 而我们张量积 $\otimes$ 的定义就是通常的张量积应该比 [64] 中的 $\times$ 要自然. 关键一点是 [64] 中的范畴 $Rep(\mathcal{A})$ 无法反映 $\mathcal{A}$ 的左（右）余 monoidal 结构. 但是我们通过弱张量范畴这个比张量范畴要弱（见例 8.1.1 ）的范畴做到了（见定理 8.1.5).

在 [37] 中， H-Mod 是一个张量范畴当 H 是一个双代数时. 所以，利用引理 8.1.1, 定理 8.1.5 和 [37], 我们可以建立下面的关系：

$$\begin{tikzcd} \text{预张量范畴} \arrow[r, "\supset"] & \text{弱张量范畴} \arrow[r, "\supset"] & \text{张量范畴} \\ \text{几乎双代数} \arrow[u, "Rep"'] \arrow[r, "\supset"] & \text{弱双代数} \arrow[u, "Rep"'] \arrow[r, "\supset"] & \text{双代数} \arrow[u, "Rep"'] \end{tikzcd}$$

(图 2.1)

这里 $\xrightarrow{Rep}$ 意味, 例如, 几乎双代数的表示范畴是一个预张量范畴而 预张量范畴 $\xrightarrow{\supset}$ 弱张量范畴 意味一个弱张量范畴一定是一个预张量范畴等.

§8.2 拟辫子预张量范畴

为了完整和那些不熟悉拟辫子预张量范畴的读者，我们回顾辫子张量范畴(这由 Joyal 和 Street 在 [35] 中引入)的一种推广 - 拟辫子预张量范畴及其一个基本事实. 注意到本节的结论都可以在 [44] 中找到.

设 $\mathcal{C}$ 是一个具有张量积 $\otimes: \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 和一个结合约束 a 的范畴. 记 $\tau: \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ 为通常的置换函子: $\tau(V,W)=(W,V)$ 对任意一对范畴 $\mathcal{C}$ 的对象 V,W. 一个 *交换拟约束* c 是一个自然变换 $c: \otimes\to\otimes\tau$. 这意味对任意一对对象 (V,W), 我们有 $c_{V,W}: V\otimes W\to W\otimes V$ 使得下图交换

$$\begin{CD} V\otimes W @>{c_{V,W}}>> W\otimes V\\ @V{f\otimes g}VV @VV{g\otimes f}V\\ V'\otimes W' @>{c_{V',W'}}>> W'\otimes V' \end{CD}$$

对所有的态射 f,g.

称余交换拟约束 c 满足 *六边公理* 如果下面的图 (H_1)

$$\begin{tikzcd} & U\otimes(V\otimes W) \arrow[r, "c_{U,V\otimes W}"] & (V\otimes W)\otimes U \arrow[dr, "a_{V,W,U}"] & \\ (U\otimes V)\otimes W \arrow[ur, "a_{U,V,W}"] \arrow[dr, "c_{U,V}\otimes id_W"'] & & & V\otimes(W\otimes U) \\ & (V\otimes U)\otimes W \arrow[r, "a_{V,U,W}"] & V\otimes(U\otimes W) \arrow[ur, "id_V\otimes c_{U,W}"'] & \end{tikzcd}$$

和 (H_2)

$$\begin{tikzcd} & (U\otimes V)\otimes W \arrow[r, "c_{U\otimes V,W}"] & W\otimes(U\otimes V) \arrow[dr, "a^{-1}_{W,U,V}"] & \\ U\otimes(V\otimes W) \arrow[ur, "a^{-1}_{U,V,W}"] \arrow[dr, "id_U\otimes c_{V,W}"'] & & & (W\otimes U)\otimes V \\ & U\otimes(W\otimes V) \arrow[r, "a^{-1}_{U,W,V}"] & (U\otimes W)\otimes V \arrow[ur, "c_{U,W}\otimes id_V"'] & \end{tikzcd}$$

对所有的范畴 $\mathcal{C}$ 中的对象 U, V, W 是交换的.

定义 8.2.1. 设 $(\mathcal{C}, \otimes, a)$ 是一个预张量范畴.

(i) 一个 $\mathcal{C}$ 中的 *拟辫子* c 是一个余交换拟约束并满足六边公理 (H_1) 和 (H_2).

(ii) 一个 *拟辫子预张量范畴* $(\mathcal{C}, \otimes, a, c)$ 是一个预张量范畴具备一个拟辫子 c.

容易看到如果一个余交换拟约束 (一个拟辫子) c 是一个同构, 则它是一个余交换约束 (辫子)[37].

定义 8.2.2. 设 $H = (H, \mu, 1, \Delta, \varepsilon)$ 是一个几乎双代数. 我们称它是 *几乎拟余交换* 的如果存在一个 $H \otimes H$ 的元 R 使得对所有的 $x \in H$ 我们有 $\Delta^{op}(x)R = R\Delta(x)$ 这里 $\Delta^{op}(x) = x_{(2)} \otimes x_{(1)}$. 一个满足这种条件的元 R 称为一个 *泛拟 R- 矩阵*. 一个几乎双代数 H 称为 *拟辫子* 如果 H 是一个几乎拟余交换的并具备一个泛拟 R- 矩阵 R 满足两个条件: $(\Delta \otimes id_H)(R) = R_{13}R_{23}$, $(id_H \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$. 这种情形下，记为 (H, R).

引理 8.2.1. *设 $H = (H, \mu, 1, \Delta, \varepsilon)$ 是一个几乎双代数. 则预张量范畴 H-Mod (见引理 8.1.1) 是拟辫子的当且仅当 H 是一个拟辫子几乎双代数.*

证明. “充分性 ” 设 H 是一个拟辫子几乎双代数具备一个泛拟 R- 矩阵 R. 我们定义一个同态 $c^R_{V,W}$ 从 $V \otimes W$ 到 $W \otimes V$ 通过 $c^R_{V,W}(v \otimes w) = \tau_{V,W}(R(v \otimes w))$ 对任意的 H- 模 V, W 和 $v \in V$, $w \in W$, 这里 $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$.

对任意的 $f \in Hom_H(V, V')$, $g \in Hom_H(W, W')$, 我们有 $(g \otimes f)c^R_{V,W}(v \otimes w) = (g \otimes f)\tau_{V,W}(R(v \otimes w)) = \tau_{V',W'}(R(f(v) \otimes g(w))) = c^R_{V',W'}(f \otimes g)(v \otimes w)$. 则 $(g \otimes f)c^R_{V,W} = c^R_{V',W'}(f \otimes g)$. 这意味 c 是一个余交换拟约束. 记 $R = \sum_i s_i \otimes t_i$, 则对所有的 $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$

$$\begin{aligned}
a_{V,W,U}c_{U,V\otimes W}a_{U,V,W}((u \otimes v) \otimes w) &= a_{V,W,U}c_{U,V\otimes W}(u \otimes (v \otimes w)) \\
&= a_{V,W,U}\tau_{U,V\otimes W}(R(u \otimes (v \otimes w))) \\
&= a_{V,W,U}\tau_{U,V\otimes W}(id \otimes \Delta)(R)(u \otimes (v \otimes w))
\end{aligned}$$

$(id_V \otimes c_{U,W})a_{V,W,U}(c_{U,V} \otimes id_W)((u \otimes v) \otimes w)$

$$\begin{aligned}
&= (id_V \otimes c_{U,W})a_{V,W,U}(\tau_{U,V}R(u \otimes v) \otimes w) \\
&= (id_V \otimes c_{U,W})(\sum_i t_i v \otimes (s_i u \otimes w)) \\
&= \sum_i (t_i v \otimes \sum_j (t_j w \otimes s_j s_i u)) \\
&= a_{V,W,U}\tau_{U,V\otimes W}(\sum_{i,j} s_j s_i u \otimes (t_i v \otimes t_j w)) \\
&= a_{V,W,U}\tau_{U,V\otimes W}R_{13}R_{12}(u \otimes (v \otimes w))
\end{aligned}$$

但是 $(id\otimes\Delta)(R)=R_{13}R_{12}$, 从而 n $a_{V,W,U}c_{U,V\otimes W}a_{U,V,W}=(id_V\otimes c_{U,W})a_{V,W,U}(c_{U,V}\otimes id_W)$. 类似的， $a^{-1}_{W,U,V}c_{U\otimes V,W}a^{-1}_{U,V,W}=(c_{U,W}\otimes id_V)a^{-1}_{U,W,V}(id_U\otimes c_{V,W})$.

从而，六边公理被满足. 这意味 c 是一个拟辫子. 故， H-Mod 是一个拟辫子预张量范畴.

"必要性" 假定在预张量范畴 H-Mod 中存在一个拟辫子 c. 定义 $H\otimes H$ 中的一个元素 R 通过 $R=\tau_{H,H}(c_{H,H}(1\otimes 1))$. 就像 Hopf 代数的情形 [37], 我们可以证 R 是一个泛拟 R- 矩阵并满足 $(\Delta\otimes id_H)(R)=R_{13}R_{23}$, $(id_H\otimes\Delta)(R)=R_{13}R_{12}$. 也就是说 H 是一个辫子几乎双代数具备泛拟 R- 矩阵 R. □

定义 8.2.3. 一个双代数称为 *预 Hopf 代数* 如果存在 $T\in Hom_K(H,H)$ 使得 $id_H*T*id_H=id_H$, $T*id_H*T=T$. 这里 $(f*g)(h)=f(h_{(1)})g(h_{(2)})$ 对 $f,g\in Hom_K(H,H)$ 和 $h\in H$. T 称为一个 H 的 *预对极*.

预 Hopf 代数首先是在 [42] 中引进的, 在此篇文章中被称为 "弱 Hopf 代数". 在这种代数结构上，李方教授和他的合作者已经完成了一系列的工作，见 [42][43][45]. 但是同样的名称 "弱 Hopf 代数" 还被用来作为另外一种代数的定义，见 [9][10][63]. 这也是本文的一个主要研究对象. 从而, 为了区分这两个不同的 Hopf 代数的推广, 我们替换所谓的 [42] 中的 "弱 Hopf 代数" 为 *预 Hopf 代数* 为定义 8.2.3 中所定义的一样.

例 8.2.1. 设 $H=(H,\,\mu,\,1,\Delta,\,\varepsilon,\,T)$ 是一个有限维余交换预 Hopf 代数且具备可逆弱对极 T 满足 $(T*id_H)(H)\subseteq C(H)$ (H 的中心) 、 $\Delta T=\tau(T\otimes T)\Delta$ 和 $T\mu=\mu\tau(T\otimes T)$. 这里 μ 表示 H 中的乘法. 由 [42], H 的 *Drinfeld's* 偶 $D(H)=(H^{op})^*\infty H$ (作为通常 Hopf 代数的 Drinfeld's 偶的推广) 是一个拟辫子几乎双代数具备泛拟 R- 矩阵 $R=\sum_{i\in I}(1\infty e_i)\otimes(e^i\infty 1)$ 这里 $\{e_i\}_{i\in I}$ 是一个 H 作为线性空间的一组基和其对偶基 $\{e^i\}_{i\in I}$. 从而由引理 8.2.1, $D(H)$-Mod 是一个拟辫子预张量范畴且拟辫子 c 为 $c_{V,W}(v\otimes w)=\tau_{V,W}(R(v\otimes w))$ 这里 V 和 W 是 $D(H)$- 模且 $v\in V$, $w\in W$.

§8.3 弱张量范畴

本节我们首先给出弱张量范畴的一些性质，接下来介绍 *有对偶弱张量范畴、正则辫子弱张量范畴* 的定义并以此来刻画弱 Hopf 代数的表示范畴.

§8.3.1 单位的一些性质

设 $\mathcal{C}=(\mathcal{C},\otimes,I,a,l,r,\bar{l},\bar{r})$ 是一个弱张量范畴. 我们给出单位 I 的一些性质.

引理 8.3.1. *设 $f:V\to U$ 是一个 $\mathcal{C}$ 中态射. 则*

$$l_U\bar{l}_U f = f l_V \bar{l}_V, \quad r_U \bar{r}_U f = f r_V \bar{r}_V$$

证明. 注意到由 $l, \bar{l}$ 的自然性，我们有下面的交换图：

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\bar{l}_V"] \arrow[d, "f"] & I \otimes V \arrow[r, "l_V"] \arrow[d, "id_I \otimes f"] & V \arrow[d, "f"] \\
U \arrow[r, "\bar{l}_U"] & I \otimes V \arrow[r, "l_U"] & V
\end{tikzcd}$$

所以 $l_U\bar{l}_U f = f l_V \bar{l}_V$. 另一个等式可以类似的得到. □

命题 8.3.2. *五边形*

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes V) \otimes W \arrow[rrrr, "a_{I,V,W}"] \arrow[dr, "l_V \otimes id_W"'] & & & & I \otimes (V \otimes W) \arrow[dl, "l_{V \otimes W}"] \\
& V \otimes W \arrow[dr, "l\bar{l}_{V \otimes W}"'] & & V \otimes W \arrow[dl, "l\bar{l}_{V \otimes W}"] & \\
& & V \otimes W & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes W) \otimes I \arrow[rrrr, "a_{V,W,I}"] \arrow[dr, "r_{V \otimes W}"'] & & & & V \otimes (W \otimes I) \arrow[dl, "id_V \otimes r_W"] \\
& V \otimes W \arrow[dr, "l\bar{l}_{V \otimes W}"'] & & V \otimes W \arrow[dl, "l\bar{l}_{V \otimes W}"] & \\
& & V \otimes W & &
\end{tikzcd}$$

对所有的 $\mathcal{C}$ 中的对象对 (V, W) 是交换的.

为了方便，我们记 $l_{V\otimes W}\bar{l}_{V\otimes W}$ 为 $l\bar{l}_{V\otimes W}$. 本章我们总是采用此种方法，即，记 $l_V\bar{l}_V$ 为 $l\bar{l}_V$, $l_V\bar{l}_V l_V$ 为 $l\bar{l}l_V$ 等.

证明. 考虑下图

$$
\begin{tikzcd}
 & (U\otimes(I\otimes V))\otimes W \arrow[dr, "id"] & \\
((U\otimes I)\otimes V)\otimes W \arrow[ur, "a_{U,I,V}\otimes id_W"] \arrow[dr, "(1)"] \arrow[ddd, "a_{U\otimes I,V,W}"] & & (U\otimes(I\otimes V))\otimes W \arrow[dl, "(2)"'] \arrow[ddd, "a_{U,I\otimes V,W}"] \\
 & (U\otimes V)\otimes W \arrow[d, "a_{U,V,W}"] & \\
 & U\otimes(V\otimes W) & \\
(U\otimes I)\otimes(V\otimes W) \arrow[ur, "(3)"] \arrow[dr, "a_{U,I,(V\otimes W)}"'] & & U\otimes((I\otimes V)\otimes W) \arrow[ul, "(4)"'] \arrow[dl, "id_U\otimes a_{I,V,W}"] \\
 & U\otimes(I\otimes(V\otimes W)) \arrow[uu, "(5)"'] &
\end{tikzcd}
$$

这里 $(1)=l\bar{l}_{(U\otimes V)\otimes W}((r_U\otimes id_V)\otimes id_W)$, $(2)=l\bar{l}_{(U\otimes V)\otimes W}((id_U\otimes l_V)\otimes id_W)$, $(3)=l\bar{l}_{U\otimes(V\otimes W)}(r_U\otimes id_{V\otimes W})$, $(4)=l\bar{l}_{U\otimes(V\otimes W)}(id_U\otimes(l_V\otimes id_W))$, $(5)=l\bar{l}_{U\otimes(V\otimes W)}(id_U\otimes l_{V\otimes W})$.

外部六边形交换性是由五边公理得到, a 的自然性和引理 8.3.1 蕴含着当中两个正方形的交换性. 左下三角的交换性是由单位的大三角公理得到. 顶部的正方形交换是因为 (我们省略了结合约束 a 的下标):

$$
\begin{aligned}
&l_{(U\otimes V)\otimes W}\bar{l}_{(U\otimes V)\otimes W}((id_U\otimes l_V)\otimes id_W)(a\otimes id_W)\\
&\quad= a^{-1}(id_U\otimes l_{V\otimes W}\bar{l}_{V\otimes W})a(l_{U\otimes V}\bar{l}_{U\otimes V}\otimes id_W)((id_U\otimes l_V)a\otimes id_W)\\
&\quad= a^{-1}(id_U\otimes l_{V\otimes W}\bar{l}_{V\otimes W})a(l_{U\otimes V}\bar{l}_{U\otimes V}(id_U\otimes l_V)a\otimes id_W)\\
&\quad= a^{-1}(id_U\otimes l_{V\otimes W}\bar{l}_{V\otimes W})a(l_{U\otimes V}\bar{l}_{U\otimes V}(r_U\otimes id_V)\otimes id_W)\\
&\quad= l_{(U\otimes V)\otimes W}\bar{l}_{(U\otimes V)\otimes W}((r_U\otimes id_V)\otimes id_W)
\end{aligned}
$$

这里第一个等式用的是条件 (8.4) 、第三个用的是大三角公理. 从而, 右下三角也是交换的, 即,

$$l_{U\otimes(V\otimes W)}\bar{l}_{U\otimes(V\otimes W)}(id_U\otimes(l_V\otimes id_W))=l_{U\otimes(V\otimes W)}\bar{l}_{U\otimes(V\otimes W)}(id_U\otimes l_{V\otimes W}a)$$

设 $U=I$ 并在两边复合 $l_{V\otimes W}$：

$$l_{V\otimes W}l_{I\otimes(V\otimes W)}\bar{l}_{I\otimes(V\otimes W)}(id_I\otimes(l_V\otimes id_W))=l_{V\otimes W}l_{I\otimes(V\otimes W)}\bar{l}_{I\otimes(V\otimes W)}(id_I\otimes l_{V\otimes W}a)$$

由引理 8.3.1, 我们有

$$l_{V\otimes W}\bar{l}_{(V\otimes W)}l_{(V\otimes W)}(id_I\otimes(l_V\otimes id_W))=l_{V\otimes W}\bar{l}_{(V\otimes W)}l_{(V\otimes W)}(id_I\otimes l_{V\otimes W}a)$$

用定义 8.1.1 的条件 (8.2)，我们得到：

$$l_{(V\otimes W)}(id_I\otimes(l_V\otimes id_W))=l_{(V\otimes W)}(id_I\otimes l_{V\otimes W}a)$$

这意味 (利用 l 的自然性):

$$(l_V\otimes id_W)l_{(I\otimes V)\otimes W}=(l_{V\otimes W}a)l_{(I\otimes V)\otimes W}$$

在上面两侧乘上 $\bar{l}_{(I\otimes V)\otimes W}$，我们得到

$$(l_V\otimes id_W)l_{(I\otimes V)\otimes W}\bar{l}_{(I\otimes V)\otimes W}=(l_{V\otimes W}a)l_{(I\otimes V)\otimes W}\bar{l}_{(I\otimes V)\otimes W}$$

利用引理 8.3.1, 我们得到结论：

$$l_{(V\otimes W)}\bar{l}_{(V\otimes W)}(l_V\otimes id_W)=l_{(V\otimes W)}\bar{l}_{(V\otimes W)}(l_{V\otimes W}a)$$

即第一个五边形交换. 另一五边形可以类似的证得. □

命题 8.3.3. 设 I 弱张量范畴 $\mathcal{C}$ 的单位. 对任意的 $\mathcal{C}$ 中对象，我们有

$$l_Vl_{I\otimes V}=l_V(id_I\otimes l_V),\ \ r_Vr_{V\otimes I}=r_V(r_V\otimes id_I)$$

进一步的，如果 l_I 是一个 $\mathcal{C}$ 中同构，则

$$l_I=r_I$$

证明. 由 l 的自然性,

$$\begin{tikzcd}
I\otimes(I\otimes V) \arrow[r, "l_{I\otimes V}"] \arrow[d, "id_I\otimes l_V"] & I\otimes V \arrow[d, "l_V"] \\
I\otimes V \arrow[r, "l_V"] & V
\end{tikzcd}$$

我们有 $l_Vl_{I\otimes V}=l_V(id_I\otimes l_V)$. 类似的，我们有 $r_Vr_{V\otimes I}=r_V(r_V\otimes id_I)$. 接下来我们证明 $l_I=r_I$. 首先，注意到

$$\begin{aligned}
l_I(l_I\otimes id_I) &= l_I\bar{l}_Il_I(l_I\otimes id_I)=l_Il_{I\otimes I}\bar{l}_{I\otimes I}(l_I\otimes id_I)\\
&= l_Il_{I\otimes I}\bar{l}_{I\otimes I}(l_{I\otimes I}a)=l_I\bar{l}_Il_I(l_{I\otimes I}a)\\
&= l_I\bar{l}_Il_I(id_I\otimes l_I)a=l_Il_{I\otimes I}\bar{l}_{I\otimes I}(id_I\otimes l_I)a\\
&= l_Il_{I\otimes I}\bar{l}_{I\otimes I}(r_I\otimes id_I)=l_I\bar{l}_Il_I(r_I\otimes id_I)\\
&= l_I(r_I\otimes id_I)
\end{aligned}$$

这里第 2 、4 、6 、8 个等式是由引理 8.3.1 得到、第 3 个用的是命题 8.3.2, 第 5 用的是此命题的第一个关系, 第 7 用的是大三角公理. 所以, 我们有 $l_I(l_I \otimes id_I) = l_I(r_I \otimes id_I)$. 因为由假设， l_I 是一个同构，所以我们有 $l_I \otimes id_I = r_I \otimes id_I$. 由 r 的自然性，下面两个图交换：

$$\begin{tikzcd}
(I\otimes I)\otimes I \arrow[r, "r_{I\otimes I}"] \arrow[d, "l_I\otimes id_I"] & I\otimes I \arrow[d, "l_I"] \\
I\otimes I \arrow[r, "r_I"] & I
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(I\otimes I)\otimes I \arrow[r, "r_{I\otimes I}"] \arrow[d, "r_I\otimes id_I"] & I\otimes I \arrow[d, "r_I"] \\
I\otimes I \arrow[r, "r_I"] & I
\end{tikzcd}$$

即， $l_I r_{I\otimes I} = r_I(l_I \otimes id_I)$, $r_I r_{I\otimes I} = r_I(r_I \otimes id_I)$. 从而

$$\begin{aligned}
& l_I r_{I\otimes I} = r_I r_{I\otimes I} \\
\Rightarrow\quad & l_I r_{I\otimes I}\overline{r}_{I\otimes I} = r_I r_{I\otimes I}\overline{r}_{I\otimes I} \\
\Rightarrow\quad & r_I\overline{r}_I l_I = r_I\overline{r}_I r_I \qquad (\text{引理 } 8.3.1) \\
\Rightarrow\quad & l_I = r_I \qquad (\text{因为 } r_I\overline{r}_I = l_I\overline{l}_I)
\end{aligned}$$

□

§8.3.2 弱张量范畴的严格化定理

在这个子节中，我们证明每一个弱张量范畴是*弱张量等价*一个严格弱张量范畴.

定义 8.3.1. (i) 设 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r, \overline{l}, \overline{r})$ 和 $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, \otimes, I, a, l, r, \overline{l}, \overline{r})$ 是两个弱张量范畴. 一个从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的*弱张量函子*是一个三元组 $(F, \varphi_0, \varphi_2)$：这里 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个函子、φ_0 是一个从 I 到 $F(I)$ 的同构而 $\varphi_2(U,V): F(U)\otimes F(V) \to F(U\otimes V)$ 是一组以 (U,V) 为下标的自然同构使得下面的图交换：

$$\begin{tikzcd}
(F(U)\otimes F(V))\otimes F(W) \arrow[r, "a_{F(U),F(V),F(W)}"] \arrow[d, "\varphi_2(U,V)\otimes id_{F(W)}"] & F(U)\otimes(F(V)\otimes F(W)) \arrow[d, "id_{F(U)}\otimes\varphi_2(V,W)"] \\
F(U\otimes V)\otimes F(W) \arrow[d, "\varphi_2(U\otimes V,W)"] & F(U)\otimes F(V\otimes W) \arrow[d, "\varphi_2(U,V\otimes W)"] \\
F((U\otimes V)\otimes W) \arrow[r, "F(a_{U,V,W})"] & F(U\otimes(V\otimes W))
\end{tikzcd}$$

(4.4.1)

$$\begin{tikzcd}
I\otimes F(U) \arrow[r, "l_{F(U)}"] \arrow[d, "\varphi_0\otimes id_{F(U)}"] & F(U) & F(U) \arrow[r, "\bar{l}_{F(U)}"] \arrow[d, "F(\bar{l}_U)"] & I\otimes F(U) \\
F(I)\otimes F(U) \arrow[r, "\varphi_2(I,U)"] & F(I\otimes U) \arrow[u, "F(l_U)"] & F(I\otimes U) \arrow[r, "\varphi_2^{-1}(I,U)"] & F(I)\otimes F(U) \arrow[u, "\varphi_0^{-1}\otimes id_{F(U)}"]
\end{tikzcd}$$

(4.4.2)

$$\begin{tikzcd}
F(U)\otimes I \arrow[r, "r_{F(U)}"] \arrow[d, "id_{F(U)}\otimes\varphi_0"] & F(U) & F(U) \arrow[r, "\overline{r}_{F(U)}"] \arrow[d, "F(\overline{r}_U)"] & F(U)\otimes I \\
F(U)\otimes F(I) \arrow[r, "\varphi_2(U,I)"] & F(U\otimes I) \arrow[u, "F(r_U)"] & F(U\otimes I) \arrow[r, "\varphi_2^{-1}(U,I)"] & F(U)\otimes F(I) \arrow[u, "id_{F(U)}\otimes\varphi_0^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

(4.4.3)

弱张量函子 (F,φ_0,φ_2) 称为 *严格* 的如果同构 φ_0 和 φ_2 是 $\mathcal{D}$ 的恒等.

(ii) 一个从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 弱张量函子的 *自然弱张量变换* 是一个自然变换 $\eta: F\to F'$ 使得下面的图对 $(U,\ V)$ 是交换的:

$$\begin{tikzcd}
 & F(I) \arrow[dd, "\eta(I)"] \\
I \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\varphi_0'"'] & \\
 & F'(I)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(U)\otimes F(I) \arrow[r, "\varphi_2(U,V)"] \arrow[d, "\eta(U)\otimes\eta(V)"] & F(U\otimes V) \arrow[d, "\eta(U\otimes V)"] \\
F'(U)\otimes F'(V) \arrow[r, "\varphi_2'(U,V)"] & F'(U\otimes V)
\end{tikzcd}$$

一个 *自然弱张量同构* 是一个自然弱张量变换并同时是一个自然同构.

(iii) 一个弱张量范畴的 *弱张量等价* 是一个弱张量函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 使得存在一个弱张量函子 $F':\ \mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 和自然弱张量同构 $\eta:\ id_{\mathcal{D}}\xrightarrow{\cong}FF'$ 和 $\theta:\ F'F\xrightarrow{\cong}id_{\mathcal{C}}$

如果存在从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的一个弱张量等价, 我们称 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是 *弱张量等价* 的. 观察到如果 $(F,\ \varphi_0,\ \varphi_2)$ 和 $(F',\ \varphi_0',\ \varphi'_2)$ 是弱张量函子, 则 $(F'F,\ F'(\varphi_0)\varphi_0',\ F'(\varphi_2)\varphi_2')$ 也是弱张量函子. 恒等函子是一个严格弱张量函子.

例 8.3.1. 一个弱双代数 H 称为一个 *弱 Hopf 代数* 如果存在一个线性映射 $S:H\to H$ (称为 *对极*), 使得:

$$\mu(id\otimes S)\Delta(h)=(\varepsilon\otimes id)(\Delta(1)(h\otimes 1))$$

$$\mu(S\otimes id)\Delta(h)=(id\otimes\varepsilon)((1\otimes h)\Delta(1))$$

$$S(h)=S(h_{(1)})h_{(2)}S(h_{(3)})\ \ \forall\, h\in H$$

一些我们不解释的有关弱 Hopf 代数的记号参见 [9][63]. 设 $f: H_1\to H_2$ 是一个 Hopf 代数同态. 给定一个 H_2- 模 V ，我们可以为 V 配备一个 H_1- 模结构通过 $a\cdot v=f(a)v$ 对 $a\in H_1$ 和 $v\in V$. 这种构造使得我们得到一个弱张量函子 (f^*, φ_0, id) 从 $\mathrm{Rep}(H_2)$ 到 $\mathrm{Rep}(H_1)$. 这里 φ_0 定义为：设 $\widehat{1}_i\in\widehat{H}_i$ 是 $\widehat{H}_i$ 的单位元对 $i=1,2$ (容易看到 $H\rightharpoonup\widehat{1}=H_t\rightharpoonup\widehat{1}$), 我们有

$$\varphi_0:\ \varepsilon_t(H_1)\rightharpoonup\widehat{1}_1\to\varepsilon_t(H_2)\rightharpoonup\widehat{1}_2 \text{ 通过 } h\rightharpoonup\widehat{1}_1\mapsto f(h)\rightharpoonup\widehat{1}_2$$

注意到 $f|_{(H_1)_t}$ 是一个双射 (见 [63]). 所以 φ_0 是一个 $\mathrm{Rep}(H_1)$ 中的同构. 通过平凡的但直接的证明, 我们知道 (f^*,φ_0,id) 是一个从 $\mathrm{Rep}(H_2)$ 到 $\mathrm{Rep}(H_1)$ 的弱张量函子.

接下来，就像张量范畴的情形，我们想证任意弱张量范畴是弱张量等价一个严格的弱张量范畴.

设 $\mathcal{S}$ 是所有由弱张量范畴 $\mathcal{C}=(\mathcal{C},\otimes,I,a,l,r,\bar{l},\bar{r})$ 中对象所形成的有限序列 $S=(V_1,\cdots,V_k)$ 的类. 整数 k 由定义是序列 $S=(V_1,\cdots,V_k)$ 的长度. 如果 $S=(V_1,\cdots,V_k)$ 和 $S'=(V_{k+1},\cdots,V_{k+n})$ 是两个非空的序列，我们记 $S*S'$ 为序列 $S*S'=(V_1,\cdots,V_k,V_{k+1},\cdots,V_{k+n})$ 通过将 S' 放在 S 的后面. 对任意的 $\mathcal{S}$ 的序列 S ，我们设置 $\mathcal{C}$ 的对象 $F(S)$ 通过归纳定义得到：

$$F((V))=V,\ F(S*(V))=F(S)\otimes V$$

即，

$$F(V_1,V_2,\cdots,V_{k-1},V_k)=((\cdots(V_1\otimes V_2)\otimes\cdots)\otimes V_{k-1})\otimes V_k$$

我们去定义范畴 $\mathcal{C}^{str}$: 它的对象为 $\mathcal{S}$ 中的元，即 $\mathcal{C}$ 中对象的有限序列，它的态射为

$$Hom_{\mathcal{C}^{str}}(S,S')=Hom_{\mathcal{C}}(F(S),F(S'))$$

这样定义了一个范畴它的恒等和合成都来自 $\mathcal{C}$.

命题 8.3.4. *范畴 $\mathcal{C}^{str}$ 和 $\mathcal{C}$ 是等价的，这里 $\mathcal{C}$ 是一个弱张量范畴.*

证明. 映射 $F:\mathcal{C}^{str}\to\mathcal{C}$ 在态射集上是的是恒等从而是完全忠实的. 作为 $\mathcal{C}$ 的任意一个对象显然同构于 F 下长度为 1 的序列的像. 所以， F 是稠密的. 这就证明了命题 [见 37, 命题 XI 1.5]. 观察到 $G(V)=(V)$ 定义了一个函子 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{C}^{str}$ 它是 F 的可逆等价. 事实上，我们有 $FG=id_{\mathcal{C}}$ 和 $\theta: GF\to id_{\mathcal{C}^{str}}$ 通过自然同构

$$\theta(S)=id_{F(S)}:\ GF(S)\longrightarrow S$$

$\square$

我们现在为 $\mathcal{C}^{str}$ 配备一个严格弱张量范畴的结构. 其上张量积的定义是简单的：我们令 $S \otimes S' = S * S'$. 容易看到它是结合的.

为了定义两个 $\mathcal{C}^{str}$ 中同态的张量积，我们首先构造一个自然同构：

$$\varphi(S, S') :\ F(S) \otimes F(S') \to F(S * S')$$

对任意的对 $(S, S') \in \mathcal{C}^{str}$. 它的定义是通过对序列 S' 的长度进行归纳得到：

$$\varphi(S, (V)) = id_{F(S)\otimes V} :\ F(S) \otimes V \to F(S \otimes (V))$$

和

$$\varphi(S, S' * (V)) = (\varphi(S, S') \otimes id_V) \circ a^{-1}_{F(S),F(S'),V}$$

引理 8.3.5. 如果 S, S', S'' 是 $\mathcal{C}^{str}$ 中的对象，则我们有

$$\varphi(S, S' * S'') \circ (id_S \otimes \varphi(S', S'')) \circ a_{F(S),F(S'),F(S'')} = \varphi(S * S', S'') \circ (\varphi(S, S') \otimes id_{S''})$$

证明. 我们对 S'' 的长度进行归纳. 如果 $S'' = (V)$, 我们有

$$\begin{aligned}
\varphi(S, S' * (V))(id_S \otimes \varphi(S', (V)))a_{F(S),F(S'),V} &= \varphi(S, S' * (V))a_{F(S),F(S'),V} \\
&= (\varphi(S, S') \otimes id_V)a^{-1}_{F(S),F(S'),V}a_{F(S),F(S'),V} \\
&= (\varphi(S, S') \otimes id_V) \\
&= \varphi(S * S', (V)) \circ (\varphi(S, S') \otimes id_V)
\end{aligned}$$

所有的等式都是由 φ 的定义得到. 至于三元组 (S, S', S'') 成立的等式蕴含对 $(S, S', S''*(V))$ 的等式的证明见 [37, 引理 XI.5.2] 的证明. □

我们现在可以定义两个态射 $f :\ S \to T$ 和 $f' :\ S' \to T'$ 的张量积 $f * f'$. 由定义 f 是一个从 $F(S)$ 到 $F(T)$ 的态射而 f' 是另外一个从 $F(S')$ 到 $F(T')$ 的态射. 我们通过下面的交换图来定义它们的张量积 $f * f'$ ：

$$\begin{array}{ccc}
F(S) \otimes F(S') & \xrightarrow{\varphi(S,S')} & F(S * S') \\
\Big\downarrow{\scriptstyle f\otimes f'} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f*f'} \\
F(T) \otimes F(T') & \xrightarrow{\varphi(T,T')} & F(T * T')
\end{array}$$

定义：

$$l_S :\ (I) * S \to S \ \text{通过}\ l_S = l_{F(S)}\varphi^{-1}((I), S)$$

$$\overline{l}_S :\ S \to (I) * S \ \text{通过}\ \overline{l}_S = \varphi((I), S)\overline{l}_{F(S)}$$

$$r_S :\ S * (I) \to S \ \text{通过}\ r_S = r_{F(S)}\varphi^{-1}(S, (I))$$

$$\overline{r}_S :\ S \to S * (I) \ \text{通过}\ \overline{r}_S = \varphi(S, (I))\overline{r}_{F(S)}$$

命题 8.3.6. 在这样的定义下，, $\mathcal{C}^{str}=(\mathcal{C}^{str},*,l,\bar{l},r,\bar{r})$ 是一个严格弱张量范畴.

证明. 设 $S,S',T,T',P,P'\in Ob(\mathcal{C}^{str})$ 、 $f:S\to T$, $g:T\to P$ 和 $f':S'\to T'$, $g':T'\to P'$, 则

$$
\begin{aligned}
(g*g')\circ(f*f') &= \varphi(P,P')(g\otimes g')\varphi^{-1}(T,T')\varphi(T,T')(f\otimes f')\varphi(S,S')\\
&= \varphi(P,P')(g\circ f\otimes g'\circ f')\varphi(S,S')\\
&= (g\circ f)*(g'\circ f')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
id_S*id_{S'} &= \varphi(S,S')\circ(id_{F(S)}\otimes id_{F(S')})\varphi^{-1}(S,S')\\
&= \varphi(S,S')\circ id_{F(S)\otimes F(S')}\varphi^{-1}(S,S')\\
&= id_{S*S'}
\end{aligned}
$$

所以 $*$ 是一个从 $\mathcal{C}^{str}\times\mathcal{C}^{str}$ 到 $\mathcal{C}^{str}$ 的函子. $l,r,\bar{l},\bar{r}$ 在 $\mathcal{C}^{str}$ 中的自然性由 φ 和 $l,r,\bar{l},\bar{r}$ 在 $\mathcal{C}$ 中的自然性得到. 接下来，我们来证明 $\mathcal{C}^{str}$ 的大三角公理 (注意到 $l\bar{l}_{S*T}=l\bar{l}_{F(S*T)}$):

$$
\begin{aligned}
l_{S*T}\bar{l}_{S*T}(id_S*l_T) &= l\bar{l}_{F(S*T)}\varphi(S,T)(id_{F(S)}\otimes l_{F(T)}\varphi^{-1}((I),T))\varphi^{-1}(S,I*T)\\
&= l\bar{l}_{F(S*T)}\varphi(S,T)(id_{F(S)}\otimes l_{F(T)})a_{F(S),F(I),F(T)}\varphi^{-1}(S*I,T)\\
&= \varphi(S,T)l\bar{l}_{F(S)\otimes F(T)}(id_{F(S)}\otimes l_{F(T)})a_{F(S),F(I),F(T)}\varphi^{-1}(S*I,T)\\
&= \varphi(S,T)l\bar{l}_{F(S)\otimes F(T)}(r_{F(S)}\otimes id_{F(T)})\varphi^{-1}(S*I,T)\\
&= l\bar{l}_{F(S*T)}\varphi(S,T)(r_{F(S)}\otimes id_{F(T)})\varphi^{-1}(S*I,T)\\
&= l\bar{l}_{F(S*T)}\varphi(S,T)(r_{F(S)}\varphi^{-1}(S,(I))\otimes id_{F(T)})\varphi^{-1}(S*I,T)\\
&= l_{S*T}\bar{l}_{S*T}(r_S*id_T)
\end{aligned}
$$

这里第 1 和最后一个等式是由 $\mathcal{C}^{str}$ 中态射张量积的定义得到，第 2 个等式由引理 8.3.5 通过设定 $S'=I$, $S''=T$ 得到，第 3 个由引理 8.3.1, 第 4 由 $\mathcal{C}$ 的大三角公理，第 5 个仍由引理 8.3.1 而第 6 个是由 φ 的定义得到.

显然, 定义 8.1.1 的条件 (8.1) (8.2) (8.3) 是满足的. 我们只证明 (8.4) 因为 (8.5) 可以类似的得到. 对 (8.4), 我们需证明

$$
l\bar{l}_{(S*T*P)}=(id_S*l\bar{l}_{T*P})(l\bar{l}_{S*T}*id_P)
$$

对所有的 $\mathcal{C}^{str}$ 中对象 S,T,P.

我们对 P 的长度作归纳. 当 P 的长度为 1 (由 φ 的定义， $\varphi(T,P)=id$), 我们得到

$$
\begin{aligned}
&(id_S * l\bar{l}_{F(T*P)})(l\bar{l}_{F(S*T)} * id_P) \\
&= \varphi(S, T*P)(id_{F(S)} \otimes l\bar{l}_{F(T*P)})\varphi^{-1}(S, T*P) \circ \varphi(S*T, P)(l\bar{l}_{F(S*T)} \otimes id_{F(P)})\varphi^{-1}(S*T, P) \\
&= \varphi(S, T*P)(id_{F(S)} \otimes l\bar{l}_{F(T*P)})\varphi^{-1}(S, T*P)(l\bar{l}_{F(S*T)} \otimes id_{F(P)}) \\
&= (\varphi(S,T) \otimes id_{F(P)})a^{-1}(id_{F(S)} \otimes l\bar{l}_{F(T*P)})a(\varphi^{-1}(S,T) \otimes id_{F(P)})(l\bar{l}_{F(S*T)} \otimes id_{F(P)}) \\
&= (\varphi(S,T) \otimes id_{F(P)})a^{-1}(id_{F(S)} \otimes l\bar{l}_{F(T)\otimes F(P))})a(l\bar{l}_{F(S)\otimes F(T)}\varphi^{-1}(S,T) \otimes id_{F(P)}) \\
&= (\varphi(S,T) \otimes id_{F(P)})l\bar{l}_{(F(S)\otimes F(T))\otimes F(P)}(\varphi^{-1}(S,T) \otimes id_{F(P)}) \\
&= l\bar{l}_{F(S*T*P)} = l\bar{l}_{S*T*P}
\end{aligned}
$$

这里第 3 个等式由 φ 的定义和引理 8.3.5 得到，第 4 和第 6 由 φ 的自然性得到而第 5 个由弱张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的 (8.4) 得到.

假定 P 的长度小于 n 时是对的，我们来证当长度为 n 时也是对的. 即，设 W 长度为 1，我们需证对 $P*W$ 是对的：

$$
\begin{aligned}
l\bar{l}_{S*T*(P*W)} &= l\bar{l}_{(S*T)*P*W} \\
&= (id_{S*T} * l\bar{l}_{P*W})(l\bar{l}_{(S*T*P)} * id_W) \\
&= (id_{S*T} * l\bar{l}_{P*W})(id_S * l\bar{l}_{T*P} * id_W)(l\bar{l}_{S*T} * id_{P*W}) \\
&= (id_S * l\bar{l}_{T*P*W})(l\bar{l}_{S*T} * id_{P*W})
\end{aligned}
$$

这里第 2 和第 3 个等式由假设得到. □

定理 8.3.7. *弱张量范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}^{str}$ 是弱张量等价的.*

证明. 为了证明 $\mathcal{C}^{str}$ 是弱张量等价于 $\mathcal{C}$, 我们需建立弱张量函子和自然弱张量同构. 我们首先宣称三元组 (F, id_I, φ) 是一个从 $\mathcal{C}^{str}$ 到 $\mathcal{C}$ 弱张量函子这里 φ 是上面定义的自然同构. 事实上，引理 8.3.5 是一个关系 (4.4.1) 的一种等价形式而关系 (4.4.2) 和 (4.4.3) 可以由 l, r 的定义得到. 命题 8.3.4 证明中的函子 G 是一个严格弱张量函子. 最后，自然同构 θ 是一个自然张量同构. □

注 8.3.8. *我们说定理 8.3.7 为所谓的严格化定理是因为它蕴含着每一个弱张量范畴可以被变成一个严格弱张量范畴. 就像张量范畴的情形，这个结果意味类似的 Mac Lane 的 Coherence 定理，即，在一个预张量范畴里所有由约束 a 、单位、合成及张量得到的图是交换的.*

§8.3.3 弱张量范畴中的对偶

在这个小节中，所有的 K- 线性空间都假定是有限维的.

我们知道当 H 是一个 Hopf 代数时, 由所有有限维左 H- 模组成的范畴 H-Mod$_f$ 是一个具备左和右对偶的张量范畴 (见 [37]). 在预张量范畴的情形下, 我们不知道如

何定义对偶的相对应的概念. 但是我们将看到对弱张量范畴, 我们是可以定义的. 进一步的, 我们将证明弱 Hopf 代数 H 的表示范畴是一个具备左和右对偶的弱张量范畴. 本小节中, 所有有关弱 Hopf 代数未解释的概念都可以在 [9][63] 中找到.

定义 8.3.2. 设 $\mathcal{C}=(\mathcal{C},\otimes,I,l,r,\bar{l},\bar{r})$ 是一个严格弱张量范畴. 它是一个弱张量范畴且具备 *左对偶* 如果对每一个 $\mathcal{C}$ 中对象 V, 存在一个对象 V^* 和同态:

$$b_V: I\to V\otimes V^*,\qquad d_V: V^*\otimes V\to I$$

使得:

$$(id_V\otimes d_V)(b_V\otimes id_V)\bar{l}_V=\bar{r}_V,\quad (d_V\otimes id_{V^*})(id_{V^*}\otimes b_V)\bar{r}_{V^*}=\bar{l}_{V^*}$$

严格弱张量范畴是一个弱张量范畴具备 *右对偶* 如果对每一个 $\mathcal{C}$ 中对象 V, 存在一个对象 $V^\star$ 和态射:

$$b'_V: I\to V^\star\otimes V,\qquad d'_V: V\otimes V^\star\to I$$

使得:

$$(d'_V\otimes id_V)(id_V\otimes b'_V)\bar{r}_V=\bar{l}_V,\quad (id_{V^\star}\otimes d'_V)(b'_V\otimes id_{V^\star})\bar{l}_{V^\star}=\bar{r}_{V^\star}$$

为了简化我们的计算, 我们给出 $l,\bar{l},r,\bar{r}\in Rep(H)$ (见 8.1 节) 的等价刻画形式:

引理 8.3.9. [9] *映射 $k_H^L: x^L\mapsto (x^L\rightharpoonup\widehat{1})$ 是从 H^L 到 $\widehat{H}^R$ 一个代数同构. 映射 $k_H^R: x^R\mapsto(\widehat{1}\leftharpoonup x^R)$ 是一个从 H^R 到 $\widehat{H}^L$ 的代数同构. 进一步的, 典型对在 $\widehat{H}^L\times H^L$, $\widehat{H}^R\times H^R$, $\widehat{H}^L\times H^R$, $\widehat{H}^R\times H^L$ 的限制都是非退化的.*

注意到在定理 8.1.5 中, 我们知道 $\widehat{H}^R$ 是 $Rep(H)$ 中的单位 I. 利用上面引理中的同构 k_H^L, 我们替换 I 为 H^L $(=H_t)$ 从而 $l,\bar{l},r,\bar{r}$ 可以等价的表述为:

$$l_V:\ H_t\otimes V\longrightarrow V \text{ 通过 } z\otimes v\mapsto z\cdot v$$

$$r_V:\ V\otimes H_t\longrightarrow V \text{ 通过 } v\otimes z\mapsto S^{-1}(z)\cdot v$$

$$\bar{l}_V:\ V\longrightarrow H_t\otimes V \text{ 通过 } v\mapsto S(1_{(1)})\otimes 1_{(2)}\cdot v$$

$$\bar{r}_V:\ V\longrightarrow V\otimes H_t \text{ 通过 } v\mapsto 1_{(1)}\cdot v\otimes 1_{(2)}$$

对所有的 $v\in V$, $z\in H_t$, 和 $h\cdot z=\varepsilon_t(hz)$ 对 $h\in H$.

利用 H 的对极 S ，我们可以证明 $Rep(H)$ 是具备左和右对偶的. 定义 H 在 $V^* = Hom_K(V,K)$ 和 $V^\star = Hom_K(V,K)$ 上的作用分别为:

$$(h\cdot\phi)(v) = \phi(S(h)\cdot v), \quad 和 \quad (h\cdot\phi)(v) = \phi(S^{-1}(h)\cdot v)$$

这里 $h\in H$, $v\in V$, $\phi\in Hom_K(V,K)$.

对所有的 $V\in Rep(H)$, 我们定义对偶态射

$$b_V:\ H_t \to V\otimes V^*, \qquad d_V:\ V^*\otimes V\to H_t$$

$$b'_V:\ H_t \to V^\star\otimes V, \qquad d'_V:\ V\otimes V^\star\to H_t$$

为：对 $\sum_i \phi^i\otimes v_i \in V^*\otimes V$ 和 $\sum_j v_j\otimes\psi^j\in V\otimes V^\star$, 令

$$d_V(\sum_i \phi^i\otimes v_i) = \sum_i \phi^i(1_{(1)}\cdot v_i)1_{(2)}$$

$$d'_V(\sum_j v_j\otimes\psi^j) = \sum_j \psi^j(1_{(2)}\cdot v_j)S(1_{(1)})$$

设 $\{f_i\}_i$ 和 $\{\xi^i\}_i$ 是 V 和 $Hom_K(V,K)$ 的基且互相对偶. 元素 $\sum_i f_i\otimes\xi^i$ 和 $\sum_i \xi^i\otimes f_i$ 不依赖于基的选取. 进一步的对所有的 $v\in V$, $\varphi\in Hom_K(V,K)$ 我们有 $\varphi = \sum_i\varphi(f_i)\xi^i$ 和 $v=\sum_i f_i\xi^i(v)$. 令

$$b_V(z) = z\cdot(\sum_i f_i\otimes\xi^i), \qquad b'_V(z) = z\cdot(\sum_i \xi^i\otimes f_i)$$

定理 8.3.10. *假定 H 是一个弱 Hopf 代数. 在上面的定义下 $Rep(H)$ 是一个具备左和右对偶的弱张量范畴.*

证明. 由定理 8.1.5, 我们已经知道 $Rep(H)$ 是一个弱张量范畴. 所以我们只需证 d_V, d'_V 和 b_V, b'_V 是 H- 线性的并满足

$$(id_V\otimes d_V)(b_V\otimes id_V)\bar{l}_V = \bar{r}_V, \quad (d_V\otimes id_{V^*})(id_{V^*}\otimes b_V)\bar{r}_{V^*} = \bar{l}_{V^*} \tag{8.6}$$

$$(d'_V\otimes id_V)(id_V\otimes b'_V)\bar{r}_V = \bar{l}_V, \quad (id_{V^\star}\otimes d'_V)(b'_V\otimes id_{V^\star})\bar{l}_{V^\star} = \bar{r}_{V^\star} \tag{8.7}$$

由 [62, 命题 4.2], 我们知道 d_V, b_V 是 H- 线性的. 我们只需证 d'_V, b'_V 是 H- 线性的. 至于等式 (8.6)(8.7), 我们只证 (8.6) 因为另一个可以类似的证明. 取 $v\otimes\phi\in V\otimes V^\star$, $z\in H_t$, $h\in H$

$$\begin{aligned}
h\cdot d'_V(v\otimes\phi) &= \phi(1_{(2)}\cdot v)\varepsilon_t(hS(1_{(1)}))\\
&= \phi(S^{-1}(1_{(1)})\cdot v)\varepsilon_t(h1_{(2)}) = \phi(S^{-1}(\varepsilon_s(h_{(1)}))\cdot v)\varepsilon_t(h_{(2)})\\
&= \phi(S^{-1}(\varepsilon_s(1_{(1)}h))\cdot v)1_{(2)} = \phi(S^{-1}(h_{(2)})S^{-1}(1_{(1)})h_{(1)}\cdot v)1_{(2)}\\
&= \phi(S^{-1}(h_{(2)})1_{(2)}h_{(1)}\cdot v)S(1_{(1)}) = (h_{(2)}\cdot\phi)(1_{(2)}h_{(1)}\cdot v)S(1_{(1)})\\
&= d'_V(h_{(1)}\cdot v\otimes h_{(2)}\cdot\phi) = d'_V(h\cdot(v\otimes\phi))
\end{aligned}$$

从而，d'_V 是 H- 线性的. 为了证明 b'_V 的 H- 线性性，我们需证 $h\cdot b'_V(z)=b'_V(h\cdot z)$，即

$$\sum_i h_{(1)}z\cdot\xi^i\otimes h_{(2)}\cdot f_i=1_{(1)}\varepsilon_t(hz)\cdot\xi^i\otimes 1_{(2)}\cdot f_i$$

让第一个因子作用在 $v\in V$ 上，我们得到等价条件

$$h_{(2)}S^{-1}(h_{(1)}z)\cdot v=1_{(2)}S^{-1}(1_{(1)}\varepsilon_t(hz))\cdot v$$

容易看到两侧都等于 $S^{-1}(\varepsilon_t(hz))\cdot v$. 所以，$b'_V$ 是 H- 线性的. 我们有

$$\begin{aligned}
(id_V\otimes d_V)(b_V\otimes id_V)\bar{l}_V(v) &= (id_V\otimes d_V)(b_V\otimes id_V)(S(1_{(1)})\otimes 1_{(2)}\cdot v)\\
&= (id_V\otimes d_V)(S(1_{(2)})\cdot f_i\otimes S(1_{(1)})\cdot\xi^i\otimes 1_{(3)}\cdot v)\\
&= S(1_{(2)})\cdot f_i\otimes S(1_{(1)})\cdot\xi^i(1'1_{(3)}\cdot v)1''\\
&= S(1_{(2)})S^2(1_{(1)})1'1_{(3)}\cdot v\otimes 1''\\
&= 1_{(1)}\cdot v\otimes 1_{(2)}=\overline{r}_V(v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d_V\otimes id_{V^*})(id_{V^*}\otimes b_V)\overline{r}_{V^*}(\phi) &= (d_V\otimes id_{V^*})(id_{V^*}\otimes b_V)(1_{(1)}\cdot\phi\otimes 1_{(2)})\\
&= (d_V\otimes id_{V^*})(1_{(1)}\cdot\phi\otimes 1_{(2)}\cdot f_i\otimes 1_{(3)}\cdot\xi^i)\\
&= (1_{(1)}\cdot\phi)(1'1_{(2)}\cdot f_i)1''\otimes 1_{(3)}\cdot\xi^i\\
&= 1''\otimes 1_{(3)}S^{-1}(1'1_{(2)})1_{(1)}\cdot\phi\\
&= 1''\otimes S^{-1}(1')\cdot\phi=S(1')\otimes 1''\cdot\phi\\
&= \bar{l}_V(\phi)
\end{aligned}$$

从而，(8.6) 得证. □

§8.3.4 正则辫子弱张量范畴

作为辫子张量范畴的一个对比，在本小节中，我们将给出 正则辫子弱张量范畴 的定义. 我们将发现辫子张量范畴中的辫子的可逆性将被弱张量范畴中的正则所代替.

定义 8.3.3. (i) 弱张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 正则辫子 由一对自然变换组成：

$$C_{V,W}:\quad V\otimes W\longrightarrow W\otimes V$$

$$\overline{C}_{V,W}:\quad V\otimes W\longrightarrow W\otimes V$$

使得下面的图交换:
(B_1)

$$\begin{tikzcd}
& U\otimes(V\otimes W) \arrow[r, "\widetilde{C}_{U,V\otimes W}"] & (V\otimes W)\otimes U \arrow[dr, "a_{V,W,U}"] & \\
(U\otimes V)\otimes W \arrow[ur, "a_{U,V,W}"'] \arrow[dr, "\widetilde{C}_{U,V}\otimes id_W"'] & & & V\otimes(W\otimes U) \\
& (V\otimes U)\otimes W \arrow[r, "a_{V,U,W}"] & V\otimes(U\otimes W) \arrow[ur, "id_V\otimes\widetilde{C}_{U,W}"'] &
\end{tikzcd}$$

和 (B_2)

$$\begin{tikzcd}
& (U\otimes V)\otimes W \arrow[r, "\widetilde{C}_{U\otimes V,W}"] & W\otimes(U\otimes V) \arrow[dr, "a^{-1}_{W,U,V}"] & \\
U\otimes(V\otimes W) \arrow[ur, "a^{-1}_{U,V,W}"'] \arrow[dr, "id_U\otimes\widetilde{C}_{V,W}"'] & & & (W\otimes U)\otimes V \\
& U\otimes(W\otimes V) \arrow[r, "a^{-1}_{U,W,V}"] & (U\otimes W)\otimes V \arrow[ur, "\widetilde{C}_{U,W}\otimes id_V"'] &
\end{tikzcd}$$

这里 U,V,W 是 $\mathcal{C}$ 的对象且 $\widetilde{C}$ 或为 C 或为 $\overline{C}$;
另外，还满足下面的关系:

$$C_{V,W}\overline{C}_{W,V}C_{V,W}=C_{V,W},\quad \overline{C}_{V,W}C_{W,V}\overline{C}_{V,W}=\overline{C}_{V,W}$$

(ii) 一个 *正则辫子弱张量范畴* 是一个弱张量范畴 $\mathcal{C}=(\mathcal{C},\otimes,I,a,l,r,\bar{l},\bar{r},C,\overline{C})$ 具有一个正则辫子 $(C,\overline{C})$.

当定义 8.3.3 中的弱张量范畴 $\mathcal{C}$ 就是一个张量范畴具备一个辫子 C 时, 此辫子 $\mathcal{C}$ 自然是一个正则辫子只需设 $\overline{C}=C^{-1}$. 换句话说，一个正则辫子弱张量范畴具备一个正则辫子是一个具备辫子的辫子张量范畴的推广.

命题 8.3.11. *对辫子弱张量范畴(单位为 I)的任意一个对象 V ，我们有*

$$l_VC_{V,I}=r_V,\quad r_VC_{I,V}=l_V$$

$$l_V\overline{C}_{V,I}=r_V,\quad r_V\overline{C}_{I,V}=l_V$$

证明. 我们只证 C 的情形. 事实上，由正则辫子的定义， C 和 $\overline{C}$ 应该具备相同的性质.

考虑图

$$\begin{tikzcd}
(V\otimes I)\otimes W \arrow[r, "a_{V,I,W}"] \arrow[dd, "C_{V,I}\otimes id_W"] \arrow[dr, "(2)"] & V\otimes (I\otimes W) \arrow[r, "C_{V,I\otimes W}"] \arrow[d, "(1)"'] & (I\otimes W)\otimes V \arrow[d, "l\bar{l}_{W\otimes V}(l_W\otimes id_V)"'] \arrow[dr, "a_{I,W,V}"] & \\
 & V\otimes W \arrow[r, "C_{V,W}"] & W\otimes V & I\otimes (W\otimes V) \arrow[dl, "id"] \\
(I\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a_{I,V,W}"] \arrow[ur, "(3)"'] & I\otimes (V\otimes W) \arrow[r, "id_I\otimes C_{V,W}"] \arrow[u, "l\bar{l}_{V\otimes W}"'] & I\otimes (W\otimes V) \arrow[u, "l\bar{l}_{W\otimes V}"'] &
\end{tikzcd}$$

这里 $(1)=l\bar{l}_{V\otimes W}(id_V\otimes l_W)$, $(2)=l\bar{l}_{V\otimes W}(r_V\otimes id_W)$, $(3)=l\bar{l}_{V\otimes W}(l_V\otimes id_W)$.

外边的七边形的交换性是因为 (B_1), 顶部的正方形是由 C 的自然性和引理 8.3.1 得到, 下面的正方形是由 l 的自然性和引理 8.3.1 得到, 左上三角是由大三角公理, 右下三角是由命题 8.3.2. 从而，中间的左边三角交换. 这意味

$$l\bar{l}_{V\otimes W}(r_V\otimes id_W)=l\bar{l}_{V\otimes W}(l_V\circ C_{V,I}\otimes\otimes id_W)$$

设 $W=I$. 所以我们有

$$\begin{aligned}
& r_V l\bar{l}_{V\otimes I}(r_V\otimes id_I)=r_V l\bar{l}_{V\otimes I}(l_V C_{V,I}\otimes id_I)\\
\Rightarrow\quad & l\bar{l}_V r_V(r_V\otimes id_I)=l\bar{l}_V r_V(l_V C_{V,I}\otimes id_I)\\
\Rightarrow\quad & l\bar{l}_V r_V r_{V\otimes I}=l\bar{l}_V l_V C_{V,I} r_{V\otimes I}\\
\Rightarrow\quad & r\bar{r}_V r_V r_{V\otimes I}=l_V C_{V,I} r_{V\otimes I}\\
\Rightarrow\quad & r_V r_{V\otimes I}=l_V C_{V,I} r_{V\otimes I}\\
\Rightarrow\quad & r_V r\bar{r}_{V\otimes I}=l_V C_{V,I} r_{V\otimes I}\bar{r}_{V\otimes I}\\
\Rightarrow\quad & r\bar{r}_V r_V=r\bar{r}_V l_V C_{V,I}\\
\Rightarrow\quad & r_V=l_V C_{V,I}
\end{aligned}$$

我们可以类似的证明第二个等式. □

定理 8.3.12. 设 U,V,W 是一个正则辫子弱张量范畴的对象. 则下面的十二边形交

换：

$$
\begin{tikzcd}
 & (U\otimes V)\otimes W \arrow[dl, "\widetilde{C}_{U,V}\otimes id_V"'] \arrow[dr, "a_{U,V,W}"] & \\
(V\otimes U)\otimes W \arrow[d, "a_{V,U,W}"'] & & U\otimes (V\otimes W) \arrow[d, "id_U\otimes\widetilde{C}_{V,W}"] \\
V\otimes (U\otimes W) \arrow[d, "id_V\otimes\widetilde{C}_{U,W}"'] & & U\otimes (W\otimes V) \arrow[d, "a^{-1}_{U,W,V}"] \\
V\otimes (W\otimes U) \arrow[d, "a^{-1}_{V,W,U}"'] & & (U\otimes W)\otimes V \arrow[d, "\widetilde{C}_{U,W}\otimes id_V"] \\
(V\otimes W)\otimes U \arrow[d, "\widetilde{C}_{V,W}\otimes id_U"'] & & (W\otimes U)\otimes V \arrow[d, "a_{W,U,V}"] \\
(W\otimes V)\otimes U \arrow[dr, "a_{W,V,U}"'] & & W\otimes (U\otimes V) \arrow[dl, "id_W\otimes\widetilde{C}_{U,V}"] \\
 & W\otimes (V\otimes U) &
\end{tikzcd}
$$

这里 $\widetilde{C}$ 为 C 或 $\overline{C}$.

证明. 我们可以利用在辫子张量范畴时相同的方法 (见 [37, 定理 XIII 1.3]) 来证明此定理. □

如果弱范畴 $\mathcal{C}$ 是严格的，则上面的十二边形的交换性等价于关系

$$(C_{V,W}\otimes id_U)(id_V\otimes C_{U,W})(C_{U,V}\otimes id_W)=(id_W\otimes C_{U,V})(C_{U,W}\otimes id_V)(id_U\otimes C_{V,W})$$

这意味对任意对象 V，自然变换 $C_{V,V}$ 是 Yang-Baxter 方程的一个解. 当然此解未必是可逆的.

回顾一个 *拟三角弱 Hopf 代数* H 定义为 [61] 是一个弱 Hopf 代数具备 $R\in\Delta^{op}(1)(H\otimes H)\Delta(1)$ 及其 "逆" $\overline{R}\in\Delta(1)(H\otimes H)\Delta^{op}(1)$ 满足

$$\Delta^{op}(h)R=R\Delta(h)$$

$$(id\otimes\Delta)R = R_{13}R_{12}, \qquad (\Delta\otimes id)R = R_{13}R_{23}$$

$$R\overline{R} = \Delta^{op}(1), \qquad \overline{R}R = \Delta(1)$$

对所有的 $h\in H$, 这里 Δ^{op} 是 Δ 的扭且 $R_{12}=R\otimes 1$, $R_{23}=1\otimes R$ 等. R 称为 H 的 R- 矩阵.

注意到由 $R\overline{R}=\Delta^{op}(1)$ 和 $\overline{R}R=\Delta(1)$, R 和 $\overline{R}$ 在正则的意义下是相互可逆的，即， $R\overline{R}R=R$ 和 $\overline{R}R\overline{R}=\overline{R}$. 所以我们要求在弱张量范畴中辫子是正则的是自然的.

引理 8.3.13. 对一个拟三角弱 *Hopf* 代数，设其 R- 矩阵为 R. 则下面的关系成立：

$$\overline{R}\Delta^{op}(h)=\Delta(h)\overline{R},\ (id\otimes\Delta)\overline{R}=\overline{R}_{12}\overline{R}_{13},\ (\Delta\otimes id)\overline{R}=\overline{R}_{23}\overline{R}_{13}$$

证明. 1): 对 $h\in H$ ，由 $\Delta^{op}(h)R=R\Delta(h)$ ，我们有 $\Delta^{op}(h)R\overline{R}=R\Delta(h)\overline{R}$ 即, $\Delta^{op}(h)=R\Delta(h)\overline{R}$. 两边乘上 $\overline{R}$ ，我们得到

$$\overline{R}\Delta^{op}(h)=\Delta(h)\overline{R}$$

2): 我们只证等式 $(id\otimes\Delta)\overline{R}=\overline{R}_{12}\overline{R}_{13}$, 因为另一个可类似的证明．首先，注意到

$$\begin{aligned}(id\otimes\Delta)(\overline{R}R) &= (id\otimes\Delta(\overline{R}))(id\otimes\Delta)(R)\\ &= (id\otimes\Delta)(\overline{R})R_{13}R_{12}\end{aligned}$$

由 $\overline{R}R=\Delta(1)$, 我们知道

$$(id\otimes\Delta)(\overline{R}R)=(id\otimes\Delta)(\Delta(1))=\overline{R}_{12}\overline{R}_{13}R_{13}R_{12}$$

所以，我们有

$$\begin{aligned}(id\otimes\Delta)(\overline{R})R_{13}R_{12} &= \overline{R}_{12}\overline{R}_{13}R_{13}R_{12}\\ \Rightarrow\ (id\otimes\Delta)(\overline{R})R_{13}R_{12}\overline{R}_{12}\overline{R}_{13} &= \overline{R}_{12}\overline{R}_{13}R_{13}R_{12}\overline{R}_{12}\overline{R}_{13}\\ \Rightarrow\ (id\otimes\Delta)(\overline{R})(id\otimes\Delta)(\Delta^{op}(1)) &= \overline{R}_{12}\overline{R}_{13}(id\otimes\Delta)(\Delta^{op}(1))\\ \Rightarrow\ (id\otimes\Delta)(\overline{R}) &= \overline{R}_{12}\overline{R}_{13}\end{aligned}$$

□

命题 8.3.14. 设 H 是一个有限维拟三角弱 *Hopf* 代数. 则 $Rep(H)$ 是一个正则辫子弱张量范畴且具备左右对偶.

证明. 对 $Rep(H)$ 的任意对象 V,W of $Rep(H)$，定义 $\{C_{V,W}\}$ and $\{\overline{C}_{V,W}\}$ 为：

$$C_{V,W}(x)=R^{(2)}\cdot x^{(2)}\otimes R^{(1)}\cdot x^{(1)},\ \ \overline{C}_{V,W}(y)=\overline{R}^{(1)}\cdot y^{(2)}\otimes \overline{R}^{(2)}\cdot y^{(1)}$$

这里 $x=x^{(1)}\otimes x^{(2)}\in V\otimes W$, $y=y^{(1)}\otimes y^{(2)}\in V\otimes W$ 和 $R=R^{(1)}\otimes R^{(2)}$, $\overline{R}=\overline{R}^{(1)}\otimes\overline{R}^{(2)}$. 直接证明得到 $C,\overline{C}$ 是 H- 线性和自然的. 由 $(id\otimes\Delta)R=R_{13}R_{12}$ 和 $(\Delta\otimes id)R=R_{13}R_{23}$ 及引理 8.3.13, 我们知道定义 8.3.3 中的 (B_1), (B_2) 是满足的. 至于 $C_{V,W}\overline{C}_{V,W}C_{V,W}=C_{V,W}$ 和 $\overline{C}_{V,W}C_{V,W}\overline{C}_{V,W}$, 它们可以由 $R\overline{R}=\Delta^{op}(1)$ 和 $\overline{R}R=\Delta(1)$ 直接得到.

由定理 8.3.10, $Rep(H)$ 具有左右对偶. □

我们知道弱 Hopf 代数 H 的 Drinfeld's 偶 $D(H)=(\widehat{H}^{op}\otimes H)/J$ 是一个拟三角弱 Hopf 代数 [61], 这里 J 是诸如 $\phi\otimes zh-(\varepsilon\leftharpoonup z)\phi\otimes h$, $\phi\otimes yh-(y\rightharpoonup\varepsilon)\phi\otimes h$ 元素的线性扩张对任意 $z\in H_t$, $y\in H_s$, $\phi\in\widehat{H}$, $h\in H$. 可以证明 J 是 $\widehat{H}^{op}\otimes H$ 的一个理想 (见 [61]). 所以我们有

推论 8.3.15. *设 H 是一个有限维弱 Hopf 代数，则 $Rep(D(H))$ 是一个正则辫子弱张量范畴具有左右对偶.*

一般的，命题 8.3.14 的逆未必是正确的. 即，对一个有限维弱 Hopf 代数 H, 如果 $Rep(H)$ 是一个正则辫子弱张量范畴具有左右对偶，则我们无法来确定 H 是否是拟三角的.

事实上，设 $R'=\tau_{H,H}C_{H,H}(1\otimes 1)$, $\overline{R'}=\overline{C}_{H,H}(1\otimes 1)$, 则由 $C,\overline{C}$ 的自然性、关系 $(B_1),(B_2)$ 及 $C\overline{C}C=C$, $\overline{C}C\overline{C}=\overline{C}$, 我们可以得到：

$$\Delta^{op}(h)R'=R'\Delta(h),\qquad \Delta(h)\overline{R'}=\overline{R'}\Delta^{op}(h)$$

对任意 $h\in H$ 和

$$(id\otimes\Delta)R'=R'_{13}R'_{12},\quad (\Delta\otimes id)R'=R'_{13}R'_{23}$$

$$(id\otimes\Delta)\overline{R'}=\overline{R'}_{12}\overline{R'}_{13},\quad (\Delta\otimes id)\overline{R'}=\overline{R'}_{23}\overline{R'}_{13}$$

$$R'\overline{R'}R'=R',\quad \overline{R'}R'\overline{R'}=\overline{R'}$$

即，由 $\overline{R'}$，引理 8.3.13 是满足的，从而 H 是一个 “几乎” 拟辫子弱 Hopf 代数除了条件 $R'\overline{R'}=\Delta^{op}(1)$, $\overline{R'}R'=\Delta(1)$. 但作为一个替代品，我们有 R' 和 $\overline{R'}$ 的正则性. 即， $R'\overline{R'}R'=R'$, $\overline{R'}R'\overline{R'}=\overline{R'}$.

§8.4 关系

现在，作为一个结论我们希望通过图来总结本文所讨论的结果．为了简便，我们记预张量范畴为 PTC 、弱张量范畴为 WTC 、张量范畴为 TC 、几乎双代数为 AB 、弱双代数为 WB 、双代数为 B 、预 Hopf 代数为 PHA 、弱 Hopf 代数为 WHA 、 Hopf 代数为 HA 、而 Drinfeld's 偶为 DQD. 则 8.1 节的图 2.1 变为

$$\begin{tikzcd}
PTC \arrow[r, "\supset"] & WTC \arrow[r, "\supset"] & TC \\
AB \arrow[u, "Rep"'] \arrow[r, "\supset"] & WB \arrow[u, "Rep"'] \arrow[r, "\supset"] & B \arrow[u, "Rep"']
\end{tikzcd}$$

由引理 8.2.1, 例 8.2.1, 推论 8.3.15 和对应 [37] 的结论，我们有

$$\begin{tikzcd}
\text{拟辫子}PTC \arrow[r, "\supset"] & \text{正则辫子}WTC \arrow[r, "\supset"] & \text{辫子}TC \\
PHA\text{的}DQD \arrow[u, "Rep"'] \arrow[r, "\supset"] & WHA\text{的}DQD \arrow[u, "Rep"'] \arrow[r, "\supset"] & HA\text{的}DQD \arrow[u, "Rep"']
\end{tikzcd}$$

由定理 8.3.10, 得到

$$\begin{tikzcd}
? \arrow[r, "\supset"] & \text{具有对偶的}WTC \arrow[r, "\supset"] & \text{具有对偶的}TC \\
PHA \arrow[u, "Rep"'] \arrow[r, "\supset"] & WHA \arrow[u, "Rep"'] \arrow[r, "\supset"] & HA \arrow[u, "Rep"']
\end{tikzcd}$$

这里 ? 表示至今我们尚不知道如何在 PTC 中定义相应的“对偶 ”以使得上图完整.

参考文献

[1] N.Andruskiewitsch, About Finite Dimensional Hopf Algebras, Contemp.Math, 294(2002), 1-57

[2] N.Andruskiewitsch, P.Etingof, S.Gelaki, Triangular Hopf Algebras with the Chevalley Property, math.QA/0008232

[3] N.Andruskiewitsch, M.Graña, Braided Hopf Algebras over Non-abelian Groups, Bol. Acad. Ciencias (Córdoba) 63 (1999), 45-78

[4] N.Andruskiewitsch, H.-J.Schneider, Pointed Hopf Algebras, in "New direction in Hopf algebras", 1-68, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 43, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002

[5] N.Andruskiewitsch, H.-J.Schneider, Finite Quantum Groups and Cartan Matrices, Adv.Math, 154(2000), 1-45

[6] N.Andruskiewitsch, H.-J.Schneider, Hopf Algebras of Order p^2 and Braided Hopf Algebras of Order p, J.Algerba, 199(1998), 430-454

[7] N.Andruskiewitsch, H.-J.Schneider, Lifting of Quantum Linear Spaces and Pointed Hopf Algebras of Order p^3, J.Algebra, 209(1998), 659-691

[8] M.Auslander, I.Reiten, Smalϕ, Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge University Press, 1995

[9] G.Böhm, F.Nill, K.Szlachányi, Weak Hopf Algebras I. Integral Theory and C^*-structure, J.Algebra, 221(1999), 385-438

[10] G.Böhm, K.Szlachányi, A Coassociative C^*-quantum Group with Nonintegral Dimensions, Lett, in Math.Phys, 35(1996), 437-456

[11] X.W.Chen, H.L.Huang, P.Zhang, Dual Gabriel Theorem and Quivers, preprint

[12] Xiao-Wu Chen, Hua-Lin Huang, Yu Ye, Pu Zhang, Monomial Hopf Algerbas, J.Algerba, 275(2004), 212-232

[13] W.Chin, S.Montgomery, Basic Coalgebra, AMS/IP Studies in Adv. Math, 4, 1997, 41-47

[14] C.Cibils, A Quiver Quantum Group, Comm.Math.Phys, 157(1993), no.3, pp 459-477

[15] C.Cibils, M.Rosso, Hopf Quiver, J.Algebra, 254(2002), 241-251

[16] F.U.Coelho, S.X.Liu, Generalized Path Coalgebras, Interactions between ring theory and repersentations of algebras (Muricia), Leture Notes in Pure and Appl. Math., Dekker, New York, 210, 2000, 53-66

[17] M.Cohen, D.Fishman, Hopf Algebra Actions, J.Algebra, 100(1986), 363-379

[18] W.W. Crawley-Boevey, Tame Algebras and Generic Godules, Proc. L.M.S, 63(1991), 241-264

[19] W.W. Crawley-Boevey, Lectures on Representations of Quivers, Lectures in Oxford, 1992

[20] Y.Doi, Homological Coalgebra, J. Math. Soc. Japan, 33(1), 1981, 31-50

[21] Yu.A.Drozd, Tame and Wild Matrix Problems, Representations and Quadratic Forms. Inst.Math., Acad.Sciences.Ukrainian SSR, Kiev 1979, 39-74. Amer.Math.Soc.

Transl. 128(1986), 31-55

[22] Yu.A.Drozd, V.V.Kirichenko, Finite Dimensional Algebras, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1993

[23] K.Erdmann, Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, LNM 1428, Springer-Verlag, 1990

[24] K.Erdmann, E.L.Green, N.Snashall, R.Taillefer, Representation Theory of the Drinfeld Double of a Family of Hopf Algebras, arXiv:math.RT/0410017 v1

[25] P.Etingof, S.Gelaki, On Finite-dimensional Semisimple and Cosemisimple Hopf Algebras in Positive Characteristic, International Mathematics Research Notices, no 16, 1998, 851-864

[26] P.Etingof, S.Gelaki, The Classification of Triangular Semisimple and Cosemisimple Hopf Algebras over an Algebraically Closed Field, International Mathematics Research Notices, no 5 (1997), 223-234

[27] P.Etingof, D.Nikshych, Dynamical Quantum Groups at Roots of 1, Duke Math.J, 108 (2001), no.1, 135-168

[28] P.Etingof, O.Schiffmann, Lecture on the Dynamical Yang-Baxter Equations, Quantum groups and Lie theory (Durham, 1999), 89-129. London Math Soc. Lecture Note Ser., 290, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001

[29] D.Fischman, S.Montgomery, H.-J.Schneider, Frobenius Extensions of Subalgebras of Hopf Algebras, Trans. Amer. Math. Soc, 349(1997), 4857-4895

[30] M.Gra$\widetilde{n}$a, On Nichols Algebras of Low Dimension, in “New Trends in Hopf Algebra Theorey”, Contemp.Math, 267(2000), 111-134

[31] E.Green, ∅.Solberg, Basic Hopf Algebras and Quantum Groups, Math.Z, 229(1998), 45-76

[32] I.Heckenberger, Finite Dimensional Rank 2 Nichols Algebras of Diagonal Type I: Examples, arXiv:math.QA/0402350 v2

[33] I.Heckenberger, Finite Dimensional Rank 2 Nichols Algebras of Diagonal Type II: Classification, arXiv:math.QA/0404008 v1

[34] R.G.Heyneman, D.E.Radford, Reflexivity and Coalgebras of Finite Type, J. Algebra, 28(2), 1974, 215-246

[35] A.Joyal, R.Street, Braided Tensor Categories, Adv. Math 102 (1993), 20-78

[36] L.Kadison, D.Nikshych, Frobenius Extensions and Weak Hopf Algebra, J.Algebra, 244 (2001), 312-342

[37] C.Kassel, Quantum groups, GTM 155, Springer-Verlag, New York, 1995

[38] H.Krause, Stable Equivalnece Preserves Representation Type, Comment. Math. Helv, 72(1997), 266-284

[39] R.G.Larson, D.E.Radford, Semisimple Cosemisimple Hopf Algebras. Amer. J.Math, 1988, 110, 187-195

[40] R.G.Larson, D.E.Radford, Finite Dimensional Cosemisimple Hopf Algebras in Char-

acteristic 0 Are Semisimple. J. Algebra, 117(1988), 267-289

[41] F.Li, Characterization of Left Artinian Algebras Through Pseudo Path Algebras, submmitted

[42] F.Li, Weak Hopf Algebras and Some New Solutions of Quantum Yang-Baxter Equation, J. Algebra, 208 (1998), 72-100

[43] F.Li, Solutions of Yang-Baxter Equation in an Endomorphism Semigroup and Quasi-(Co)braided Almost Bialgebras, Comm in Alg, 28 (5), 2253-2270 (2000)

[44] F.Li, The Right Braids, Quasi-Braided Pre-Tensor Ctegories and General Yang-Baxter Operators, Comm in Alg, Volume 32, Number 2, (2004)

[45] F.Li, S.Duplij, Weak Hopf Algebras and Singular Solutions of Quantum Yang-Baxter Equation, Comm.Math.Phys, 225(1): 192-217 (2002)

[46] G.X.Liu, F.Li, Basic Hopf Algebras of Finite Representation Type and Their Classification, submitted to Proc of AMS. (available at http://www.cms.zju.edu.cn/index.asp?ColumnName=pdfbook)

[47] M.Lorenz, Representations of Finite Dimensional Hopf Algebras, J.Algebra, 188(1997), 476-505

[48] M.E.Lorenz, M. Lorenz, On Crossed Products of Hopf Algebras. Proc of AMS, 123, 1995, 33-38

[49] S.Maclane, Homology, Springer-Verlag, New York, 1963

[50] S.Majid, Crossed Products by Braided Groups and Bosonization, J.Algebra 163 (1994), 165-190

[51] A.Masuoka, Self Dual Hopf Algebras of Dimension p^3 Obtained by Extension, J.Algerba, 178(1995), 791-806

[52] A.Masuoka, Semisimple Hopf Algebras of Dimensioa $2p$, Comm in Algebra, 23(1995), 1931-1940

[53] A.Masuoka, Calculations of Some Groups of Hopf Extensions, J.Algebra, 191(1997), 568-588

[54] S.Montgomery, Hopf Algebras and Their Actions on Rings., CBMS, Lecture in Math, Providence, RI, (1993), Vol. 82.

[55] S.Montgomery, Classifying Finite Dimensional Semisimple Hopf Algebras, AMS Contemp.Math, 229(1998), 265-279

[56] S.Montgmery, Indecomposable Coalgebras, Simple Comodules and Pointed Hopf Algebras, Proc.Amer.Math.Soc, 123(1995), 2343-2351.

[57] S.Natale, On Semisimple Hopf Algerbas of Dimension pq^2, J.Algerba, 221(1999), 242-278

[58] S.Natale, On Semisimple Hopf Algerbas of Dimension pq^2 II, Algebra Representation Theory, 2003

[59] S.Natale, Quasitriangular Hopf Algebras of Dimensional pq, Bull.London Math Soc, 2003

[60] Fred van Oystaeyen, Pu Zhang, Quivers and Hopf Algebras, In: Nonlin. evolution equations and Dynamical sys., Proc. ICM 2002 Satellite Conf

[61] D.Nikshych, V.Turaev, L.Vainerman, Invariants of Knots and 3-manifolds from Quantum Groupoids, QA/0006078

[62] D.Nikshych, L.Vainerman, A Characterization of Depth 2 Subfactors of II_1 Factors, J.Func.Analysis, 171 (2000), 278-307

[63] D.Nikshych, L.Vainerman, Quantum Groupoids and Their Applications, New drection in Hopf algebras, 221-262, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 43, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002

[64] F.Nill, Axioms for Weak Bilagebras, Math. QA/9805104

[65] Fred van Oystaeyen, Pu Zhang, Quiver Hopf Algebras, J.Algerba, 280(2004), 577-589

[66] U.Oberst, H.-J.Schneider, Uber Untergruppen Endlicher Algebraischer Gruppen, Manuscripta.Math 8(1973), 217-241.

[67] S.R.Pierce, Associative Algebras, Springer-Verlag, New York, 1982

[68] D.Radford, The Structure of Hopf Algebras with a Projection, J.Algebra, 92 (1985), 322-347

[69] C.M.Ringel, The Representation Type of Local Algebras, In Representation of Algebras, LNM 488, Springer-Verlag, 1975, 282-305

[70] C.M.Ringel, Tame Algebras and Integral Quadratic Forms, LNM 1099, Springer-Verlag, Berlin, Heidelbeerg, New York, Tokyo, 1984

[71] H.-J.Schneider, Lectures on Hopf Algebras. Universidad de Cordoba Trabajos de Mathematica Serie B, Vol. 31/95, Cordoba, Argentina, 1995

[72] S.L.Yang, Global Dimension for Hopf Actions, Comm in Algebra, 2002, 30(8), 3653-3667

[73] A.C.D.Silva, A.Weinstein, Geometric Models for Noncommutative Algebras, Berkeley Mathematics Lecture Notes Berkeley, 10, 1999

[74] Y.Sommerhäuser, On Kaplansky's Fifth Conjecture, J.Algebra, 204(1998), 202-224

[75] R.Suter, Modules for $U_q(sl_2)$, Comm.Math.Phys, 163(1994), 359-393

[76] M.E.Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, New York, 1969

[77] M. Takeuchi, Free Hopf Algebras Generated by Coalgebras, J. Math. Soc. Japan 23 (1971) 561 ＋ 582.

[78] J.Xiao, Finite-dimensional Representations of $U_t(sl(2))$ at Roots of Unity, Can.J.Math, 49(1997), no.4, 772-787

[79] Y.Zhu, Hopf Algebras of Prime Dimension, International Mathematical Research Notices 1 (1994), 53-59

[80] S.L. Zhu, Structure Theory of Hopf Algebras-A Survey, The Fifth Algebra Congress of China, 2004

第十章　附录

博士期间的一些工作

.

1. Fang Li and Gongxiang Liu, Weak Tensor Category and Related Generalized Hopf Algebras, 27 pages. To appear in Acta Mathematica Sinica (English).

2. Fang Li and Gongxiang Liu, Generalized Path Coalgebra and its Application to Dual Gabriel Theorem, preprint, 20 pages. Available at http://www.cms.zju.edu.cn/index.asp?ColumnName=pdfbook.

3. Gongxiang Liu, A Note on the Global Dimension of Smash Products, 4 pages. To appear in Comm. in Algebra.

4. Gongxiang Liu, On the Structure of Tame Graded Basic Hopf Algebras, preprint, 15 pages.

5. Gongxiang Liu and Fang Li, On Strongly Groupoid Graded Rings and the Corresponding Clifford Theorem, 17 pages. To appear in Algebra Collo.

6. Gongxiang Liu and Fang Li, Basic Hopf Algebras of Finite Representation Type and Their Classification, preprint, 10 pages. Available at http://www.cms.zju.edu.cn/index.asp?ColumnName=pdfbook.

7. Gongxiang Liu and Yu Ye, Monomial Hopf Algebras over Fields of Positive Characteristic, preprint, 11 pages. Available at http://www.cms.zju.edu.cn/index.asp?ColumnName=pdfbook.