

第一章 预备知识

第1.1 域上的代数

定义: 设 K 为域, 令 A 为 K 上的一个线性空间, A 称为 K 上的一个 (结合) 代数 如果 $\exists$ 映射 $m: A \times A \rightarrow A, (a,b) \mapsto ab$ 满足: 1) m 是双线性的. i.e. $(a+b)c = ac + bc, (ka)b = k(ab)$.

相容性 $\rightarrow a(b+c) = ab + ac, a(kb) = k(ab)$

2) 结合的. i.e. $(ab)c = a(bc)$.

~~结合律~~

3) 存在单位元. 即 $\exists 1 \in A$ s.t. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a, b, c \in A$.

说明: K -代数 = 环 + 线性

例子: 1) $M_n(K)$ 上, 数乘 乘法. K -代数

2) 四元数 $H = \text{span}_{\mathbb{R}} \{1, i, j, k\}$

$a = k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot i + k_3 \cdot j + k_4 \cdot k \quad k_i \in \mathbb{R}$

① 双线性?

② ~~结合律~~ ?

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Question: Define an inner product on H . Consider the elements

of length 1, which form a group. Quaternion group

please determine the structure of this group! Q_8 .

3) Polynomial alg. $K[x]$. 一元多项式环. $+$. $\times$.

也有线性空间结构. 也是 K -alg.

4) $\text{End}(V)$. $V \rightarrow V$ 全体线性变换. 合成 (乘法)

$\phi \mapsto M_n(\phi)$. ϕ 在某一基下的矩阵. 保持 $+$. $\times$.

还是一个双射.

5) 群代数 设 G 是群 $kG := \text{span}\{g | g \in G\}$ 在 kG 上定义乘法:
 $\forall g, h \in G. \quad g \cdot h := gh$ (群中的乘法).

1.2 子代数 理想 商代数

定义: 设 A 是代数. $B \subset A$ 称为 A 的子代数如果 B 在 A 的 $+$, $\cdot$ 下是子代数且 $1 \in B$.

说明: ① B 是子代数 $\Leftrightarrow B$ 是子空间 + B 是子环;
 ② B 是子代数 $\Leftrightarrow 1 \in B$ 且 B 对 $+$, $\cdot$ 封闭.

例: 1) $H < G$, kH 是 kG 的子代数. (反之不真!)

$$G = \mathbb{Z}_3 = \langle g | g^3 = 1 \rangle. \quad e_0 = \frac{1}{3}(1 + \omega g + \omega^2 g^2). \quad \omega = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

验证 $e_0^2 = e_0$, $\therefore 1, e_0$ 生成 = 维的子代数. 但 $\mathbb{Z}_3$ 没有阶为 2 的子群.

2) $T_n = \left\{ \begin{pmatrix} * & \\ 0 & \end{pmatrix} \right\}$ 全体上三角矩阵. 在 $+$, $\cdot$ 封闭. $\therefore$ 是 $M_n(k)$ 的子代数.

3) $S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \\ & * \end{pmatrix} \right\}$ 全体对称矩阵. 在 $+$, $\cdot$ 封闭. 也是代数.

定理: 任一有限维代数都是全矩阵代数的子代数.

问题: 为何不用?

定义: $I \subseteq A$ (代数) 称为 A 的理想如果 1) I 是子空间

2) $AI \subseteq I, IA \subseteq I$. 记为 $I \triangleleft A$.

定义: 商代数. 设 $I \triangleleft A$. 则商空间 A/I 有子乘法: $\forall a, b \in A, \bar{a}, \bar{b}$ 为对应的 A/I 中的元素. $\bar{a} \times \bar{b} := \overline{ab}$. ($\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a - b \in I$) 合理性:

$$\bar{a} = \bar{a'}, \text{ 则 } \overline{a'b} = \overline{ab}$$