模论与表示论初步 第十讲

回顾：如何求特征标表

交换群的情形. 有限群 G 是交换的 $\Leftrightarrow$ 不可约表示都是一维的. 构造了 $\mathbb{Z}_n$ 的所有不可约表示的形式.

$\mathbb{Z}_n$. $\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. $\rho_j: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}^*$, $g \mapsto \xi_n^{j}$. $\{\rho_j \mid 0 \le j \le n-1\}$ 是 $\mathbb{Z}_n$ 的所有不可约的表示.

目标：给出所有有限 Abel 群的不可约表示.

构造：令 G_1. G_2 是两个群. V_1. V_2 分别是 G_1. G_2 的表示.

定义：$\rho_1: G_1 \to GL_{V_1}$, $\rho_2: G_2 \to GL_{V_2}$. $\rho_1 \# \rho_2 : G_1 \times G_2 \to GL_{V_1 \otimes V_2}$

$(g_1, g_2) \cdot v_1 \otimes v_2 := g_1 \cdot v_1 \otimes g_2 \cdot v_2$.

和张量表示的关系：张量表示 $G \xrightarrow{\Delta} G \times G \xrightarrow{\rho_1 \# \rho_2} GL_{V_1 \otimes V_2}$, $g \mapsto (g, g)$.

引理：如果 V_1. V_2 分别为 G_1. G_2 的不可约表示. 则 $\rho_1 \# \rho_2$ 也是不可约的.

证明：只需证 $\langle \chi_{\rho_1 \# \rho_2}, \chi_{\rho_1 \# \rho_2} \rangle = 1$. 事实上,

$$\langle \chi_{\rho_1 \# \rho_2}, \chi_{\rho_1 \# \rho_2} \rangle = \frac{1}{|G_1 \times G_2|} \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \chi_{\rho_1 \# \rho_2}(g_1, g_2)\, \chi_{\rho_1 \# \rho_2}(g_1^{-1}, g_2^{-1}) = \frac{1}{|G_1 \times G_2|} \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \chi_{\rho_1}(g_1) \chi_{\rho_2}(g_2) \chi_{\rho_1}(g_1^{-1}) \chi_{\rho_2}(g_2^{-1})$$

$$= \frac{1}{|G_2|} \frac{1}{|G_1|} \sum_{g_1 \in G_1, g_2 \in G_2} \chi_{\rho_1}(g_1) \chi_{\rho_1}(g_1^{-1}) \chi_{\rho_2}(g_2) \chi_{\rho_2}(g_2^{-1})$$

$$= \frac{1}{|G_2|} \sum_{g_2 \in G_2} \chi_{\rho_2}(g_2) \chi_{\rho_2}(g_2^{-1}) = 1. \quad \square$$

引理：(Abel 群结构定理). 令 G 为一个 Abel 群. 则

$$G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n} \text{ for some } m_i.$$

综合上述两个引理, $G \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$. 则

$\{ \boxed{\rho_{\xi_{m_1}^{j_1}} \# \rho_{\xi_{m_2}^{j_2}} \# \cdots \# \rho_{\xi_{m_n}^{j_n}}} \mid 0 \le j_1 \le m_1 - 1, \ldots, 0 \le j_n \le m_n - 1 \}$ 形成了 G 的所有不可约表示.

§9. 应用

• 由特征表读出 G 的所有正规子群.

定义：令 $\rho: G \to GL_V$ 为一个表示. $\mathrm{Ker}\, \chi_\rho := \{ g \in G \mid \chi_\rho(g) = \chi_\rho(1) \}$. 称之为特征标的核.

说明：$\ker \chi_\rho = \ker \rho$. $\rho: G \to GL_V$ 群同态

($\chi_\rho(g) \rightsquigarrow$ 单位根之和. $\rho(g) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 且 $\lambda_i^{?} = 1$ 是单位根. 对 $g \in \ker \chi_\rho$. $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(1) = n$.

n个单位根之和等于 n $\Leftrightarrow$ $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(1)$.

$\rightsquigarrow \lambda_i = 1$ for all $1 \le i \le n$

即 $g \in \ker \rho$. ($\rho(g) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.)

引理: 如果 $\rho = n_1\rho_1 \oplus \cdots \oplus n_s\rho_s$（即将 ρ 分解成不可约表示之和），则

$$\ker \chi_\rho = \bigcap_{n_i > 0} \ker \chi_{\rho_i}.$$

证明: $g \in \ker\rho$，即 $\rho(g)$ 是恒等. $\begin{pmatrix} \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & & \\ & \square & \rho_i \\ & & \square \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_i(g) = $ 恒等. 即 $g \in \bigcap \ker\rho_i$

反之. 如果 $g \in \ker\rho_i$ for $1 \le i \le s$.（$n_i > 0$）. $\Rightarrow g \in \ker\rho$. □

命题: 设 $N \triangleleft G$ 为 G 的任意一个正规子群.

则 $N = \bigcap_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr} \\ N \le \ker\chi}} \ker\chi$. 不可约特征标.

证明: 记 $G \xrightarrow{\pi} G/N$ 为 π. $\therefore N = \ker\pi$. 考虑 G/N 的正则表示 $\rho_{\mathrm{reg}}^{G/N}$. 请注意正规表示都是忠实的（$\rho: G \hookrightarrow GL_V$）.

从而 $N = \ker\pi = \ker(\underline{\rho_{\mathrm{reg}}^{G/N} \circ \pi})$. $G \xrightarrow{\pi} G/N \hookrightarrow GL_{\mathbb{C}G/N}$.

$\therefore N = \ker(\rho_{\mathrm{reg}}^{G/N} \circ \pi) = \ker\chi_{\rho_{\mathrm{reg}}^{G/N} \circ \pi}$ 群 G 的一个表示. 由引理知道，$\ker\chi_{\rho_{\mathrm{reg}}^{G/N}\circ\pi}$ 一定等于某些不可约特征标核的交. 即 $N = \bigcap_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr} \\ N \le \ker\chi}} \ker\chi$. □

推论: G 是单群 $\Leftrightarrow \ker\chi = \{1\}$ 对所有的不可约特征标.

- **整除定理.**

例: ① $G = S_3$. $|G| = 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$.

$1 \mid 6$. $2 \mid 6$. $\rightsquigarrow V_i$: 不可约表示. 则 $\dim V_i \mid |G|$.

② S_4. $24 = |G| = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$

$\therefore$ 拥有同样的现象 $1, 2, 3 \mid 24$. $\Rightarrow \dim V_i \mid |G|$.

定理:（整除定理） 设 G 是一个有限群. V 是 G 的一个不可约表示. 则 $\dim V \mid |G|$.

为证明该结论，需要一些准备.

定义: ① 一个复数 a 称为一个代数数 如果 a 是一个有理系数多项式的根.

② 进一步的. a 称为一个代数整数 如果 a 是首1的整系数多项式的根.

引理: 1) a 是代数数 $\Leftrightarrow$ a 是某个有理矩阵的特征值.

2) a 是代数整数 $\Leftrightarrow$ a 是某个整数矩阵的根

说明：1) 代数整数全体构成一个环.（练习）.

2) 一个有理数同时是一个代数整数，则它就是一个整数.（练习）.

例. 设 G 是一个有限群. $\rho: G \to GL_V$ 是 G 的一个表示. 则 $\forall g \in G$. $\rho(g)$ 的特征值都是代数整数.

$\rho(g) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $\lambda_i^{n_i} = 1$. 考虑 $x^{n_i} - 1 = 0$

进一步的. 就知道 $\chi_\rho(g)$ 也是代数整数.

定义：设 $g \in G$. 令 g 所在的共轭类为 C_g. 再记 $Z_g := \{h \in G \mid hg = gh\}$. 称之为 g 在 G 中的中心化子.

$$[G : Z_g] = |C_g|.$$

引理：设 G 为一个有限群. $\rho: G \to GL_V$ 为 G 的一个$\underset{\text{不可约}}{\underline{表示}}$. 则

$\dfrac{[G:Z_g]\,\chi_\rho(g)}{\chi_\rho(1)}$ 是一个代数整数.

证明：构造 $f := \sum_{h \in C_g} \rho(h) \in \mathrm{End}(V)$

claim: $f \in \mathrm{End}_G(V)$. 即 f 是一个表示的同态.

Claim 的证明：$\forall h' \in G$. $f(h' \cdot v) \overset{?}{=} h' \cdot f(v)$. 事实上：

$f(h' \cdot v) = \sum_{h \in C_g} \rho(h)(h' \cdot v) = \sum_{h \in C_g} hh' \cdot v = \sum_{h \in C_g} h'h'^{-1}hh' \cdot v = h' \sum_{h \in C_g} h'^{-1}hh' \cdot v$

$= h' \sum_{h \in C_g} h \cdot v = h' \cdot f(v)$. $v \in V$. □

由 Schur's Lemma, $f = \lambda \mathrm{Id}_V$. for some $\lambda \in \mathbb{C}$.

则 $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(\lambda \mathrm{Id}_V) = \lambda \dim V$

同时. $\mathrm{Tr}(f) = \sum_{h \in C_g} \mathrm{Tr}(\rho(h)) = \sum_{h \in C_g} \chi(h) = |C_g|\,\chi_\rho(g) = [G:Z_g]\,\chi_\rho(g)$

综合起来 $[G:Z_g]\,\chi_\rho(g) = \lambda \dim V = \lambda\, \chi_\rho(1)$.

即 $\lambda = \dfrac{[G:Z_g]\,\chi_\rho(g)}{\chi_\rho(1)}$. 即要证 λ 是一个代数整数.

由前面的结论知道$_{\text{regular}}$ $\to \mathbb{C}G = V \oplus$ 其它项.

$\forall h \in C_g$. $h \curvearrowright \mathbb{C}G$ 对应的矩阵是一个整数矩阵. $\therefore \sum_{h \in C_g} h \curvearrowright \mathbb{C}G$ 还是一个整数矩阵.

故(在相应一个相似变换下). $\sum_{h \in C_g} \rho(h)$ 也是一个整数矩阵. 所以 f 的特征值一定是一个代数整数. □

整除定理的证明: $1 = \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g)\chi_\rho(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{C_g}[G:Z_g]\,\chi_\rho(g)\chi_\rho(g^{-1})$

$\therefore\ |G| = \sum_{C_g}[G:Z_g]\,\chi_\rho(g)\chi_\rho(g^{-1})$

$\therefore\ \frac{|G|}{\chi_\rho(1)} = \sum_{C_g}\boxed{\frac{[G:Z_g]\,\chi_\rho(g)}{\chi_\rho(1)}}\,\chi_\rho(g^{-1})$ ← algebraic integer ← algebraic integer $\quad\therefore\ \frac{|G|}{\chi_\rho(1)}$ 是一个代数整数.

但 $\frac{|G|}{\chi_\rho(1)}$ 还是一个有理数. $\therefore\ \frac{|G|}{\chi_\rho(1)}$ 是整数.

$\therefore\ \chi_\rho(1) = \dim V \mid |G|$. □

$|G| = n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_s^2$. $\quad n_i \mid |G|$.

·延伸阅读. 1) 寻找特征标的进一步应用 (Burnsider Problem). $p^a q^b \dashrightarrow$ 可解群.

2) I. Kaplansky. 同时了解一下什么是 Kaplansky 猜测 (关于整除定理).

第四章. 诱导表示. (Induced Representation).

§1. Hom 和 张量. (伴随现象).

回顾: ${}_RM$ 左R模. 则

$R\otimes_R M \cong M$.

令 ${}_RM_S$. ${}_RN$

Conclusion: $\boxed{\mathrm{Hom}_R({}_RM_S, {}_RN)\ \text{是一个左}\ S\text{-模}}$.

定义: $\forall s\in S$. $f\in \mathrm{Hom}_R({}_RM_S, {}_RN)$. $(s\cdot f)(m) := f(m\cdot s)$.

$\forall s_1, s_2 \in S$. $(s_1 s_2)\cdot f \overset{?}{=} s_1\cdot(s_2\cdot f)$.

$(s_1\cdot(s_2\cdot f))(m) = (s_2\cdot f)(m\cdot s_1) = f((m\cdot s_1)s_2) = f(m\cdot(s_1s_2))$. $\quad \underline{(s_1s_2)\cdot f(m)} = f(m\cdot(s_1s_2))$.

还需验证 $s\cdot f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. $(s\cdot f)(r\cdot m) = f((r\cdot m)\cdot s) = f(r\cdot(m\cdot s)) = r\cdot f(m\cdot s) = r\cdot \underline{(s\cdot f)(m)}$.

练习: $\mathrm{Hom}_R({}_RM, {}_RN_S)$ 是一个右S-模.

$s\in S$. $f\in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. $(f\cdot s)(m) := f(m)\cdot s$

引理: $\mathrm{Hom}_R({}_RR_R, {}_RM) \cong M$ 作为左R-模.

证明: Φ: $\mathrm{Hom}_R({}_RR_R, {}_RM) \longrightarrow M$, $f \mapsto f(1_R)$

① Φ是一个加群同态. ② Φ是R-模同态. $\forall r'\in R$ $\Phi(r'\cdot f) = r'\cdot\Phi(f)$. $\quad \Phi(r'\cdot f) = (r'\cdot f)(1_R) = f(1_R\cdot r')$

$= f(r') = r'\cdot f(1_R) = r'\cdot\Phi(f)$.

构造 Ψ: $M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R, M)$. $m \mapsto \underline{f_m}: r\mapsto r\cdot m$

$f_m: r \longmapsto r\cdot m$. 首先需证 $f_m \in Hom_R(R, M)$.

$f(r') = f(r' \cdot 1_R) = r' \cdot m$. $r' \cdot f(1_R) = r' \cdot 1_R \cdot m = r' \cdot m$.

往证 $\Phi \circ \Psi = Id$. $\Psi \circ \Phi = Id$.

事实上, $\Psi \circ \Phi$: $Hom(R, M) \dashrightarrow M \rightarrow Hom(R, M)$.

$(\Psi \circ \Phi)(f)(r) = \Psi(f(1_R))(r) = r \cdot f(1_R) = f(r \cdot 1_R) = f(r)$. $\therefore (\Psi \circ \Phi)(f) = f$. $\therefore \Psi \circ \Phi = Id$.

$(\Phi \circ \Psi)(m) = \Phi(\Psi(m)) = \Phi(f_m) = f_m(1_R) = 1_R \cdot m = m$. 即 $\Phi \circ \Psi = Id$. $\square$