模论与表示论初步 第十一讲

回顾: · 特征标表的应用 → 正规子群. · 整除定理 $|G| = n_1^2 + \cdots + n_s^2$. $n_i \mid |G|$.

诱导表示 (Induced Representation).

§1. 张量积 和 Hom.

$R \otimes_R M \cong M$. $\mathrm{Hom}_R(R, M) \cong M$.

伴随性 (Adjoint).

定理: 设 R, S 是两个环. ${}_R M_S$ 是一个 R-S-双模 ${}_S N$: 左 S 模. ${}_R L$ 左 R-模. 则我们有 Abel 群的同构:

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_S N, L) \cong \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(M, L)).$$ [Hom 与 ⊗ 是相互伴随的]

证明: 1) Φ: $\mathrm{Hom}_R(M \otimes_S N, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(M, L))$; $f \longmapsto (n \longmapsto m \longmapsto f(m\otimes n))$. $\Phi(f)(n)(m) := f(m \otimes n)$.

- $\Phi(f)(n) \in \mathrm{Hom}_R(M, L)$
- $\Phi(f) \in \mathrm{Hom}_S(-, -)$

① 首先证 $\Phi(f)(n) \in \mathrm{Hom}_R(M, L)$.

事实上, $\big(\Phi(f)(n)\big)(r \cdot m) \overset{?}{=} r \cdot (\Phi(f)(n)\ (m))$

$\big(\Phi(f)(n)\big)(r \cdot m) = f(r \cdot m \otimes n)$. ; $r \cdot (\Phi(f)(n)\ (m)) = r \cdot f(m \otimes n) = f(r \cdot (m \otimes n)) = f(r \cdot m \otimes n)$.

② 再证 $\Phi(f) \in \mathrm{Hom}_S(-, -)$

即需证 $\Phi(f)(s \cdot n) \overset{?}{=} s \cdot (\Phi(f)(n))$

事实上, $\Phi(f)(s \cdot n)\ (m) = f(m \otimes s \cdot n)$.

$\big(s \cdot \Phi(f)(n)\big)(m) = \Phi(f)(n)\,(m \cdot s) = f(m \cdot s \otimes n)$.

$\because m \otimes s \cdot n = m \cdot s \otimes n$. $\therefore \Phi(f)(s \cdot n) = s \cdot (\Phi(f)(n))$.

2) Ψ: $\mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(M, L)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M \otimes_S N, L)$ $f \longmapsto (m \otimes n \mapsto f(n)(m) \in L)$. $\Psi(f)(m \otimes n) = f(n)(m)$.

需要证 Ψ 是合理的.

- $\Psi(f)$ 不依赖 "⊗" 上代表元的选取.
- $\Psi(f) \in \mathrm{Hom}_R(-, -)$.

① 首先要证 $\Psi(f)$ 是一个良定义的映射. 需证 a) $\Psi(f)\big((m_1+m_2) \otimes n - m_1 \otimes n - m_2 \otimes n\big) = 0$

b) $\Psi(f)\big(m \otimes (n_1+n_2) - m \otimes n_1 - m \otimes n_2\big) = 0$

c) $\Psi(f)\big(m \cdot s \otimes n - m \otimes s \cdot n\big) = 0$.

取第一类元素加以证明. $\Psi(f)\big((m_1+m_2) \otimes n - m_1 \otimes n - m_2 \otimes n\big) = \Psi(f)\big((m_1+m_2) \otimes n\big) - \Psi(f)(m_1 \otimes n) - \Psi(f)(m_2 \otimes n)$

$$= \underset{\in \mathrm{Hom}(-,-)}{\underline{f(n)}}(m_1 + m_2) - f(n)(m_1) - f(n)(m_2) = 0.$$

第二表达式的验证类似 ✓.

现在来考察第二表达式. $\Phi(f)(m\cdot s\otimes n - m\otimes s\cdot n) = \Phi(f)(m\cdot s\otimes n) - \Phi(f)(m\otimes s\cdot n) = f(n)(m\cdot s) - f(s\cdot n)(m)$

$= (s\cdot f(n))(m) - (s\cdot f(n))(m). = 0.$

② 下证 $\Phi(f) \in \mathrm{Hom}_R(-,-)$. 即需证 $\Phi(f)(r(m\otimes n)) = r\cdot(\Phi(f)(m\otimes n))$

事实上, $\Phi(f)(r\cdot(m\otimes n)) = \Phi(f)(r\cdot m\otimes n) = f(n)(r\cdot m) = r\cdot f(n)(m)$

$r\cdot(\Phi(f)(m\otimes n)) = r\cdot \underline{f(n)(m)}$

3) $\Psi\circ\Phi = \mathrm{Id}$, $\Phi\circ\Psi = \mathrm{Id}$.

事实上, $\Psi\circ\Phi(f)(m\otimes n)$ $\qquad f\in \mathrm{Hom}_R(M\otimes N, L) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(M,L)) \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Hom}_R(M\otimes N, L)$.

$= \Psi(\underline{\Phi(f)})(m\otimes n) = (\Phi(f)(n))(m) = f(m\otimes n).$

$(\Phi\circ\Psi)(f)(n)(m) = \Phi(\underline{\Psi(f)})(n)(m) = \Psi(f)(m\otimes n) = f(n)(m).$ □

§2. 诱导表示 (Induced Representation).

思想: 通过子群的表示得到大群的表示.

还是如何从商群的表示来得到大群的表示.

定义: 设 $H < G$ 是 G 的一个子群. $\rho: H \to GL_V$ 为 H 的一个表示. 称 $\boxed{\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V}$ 为从 H 到 G 的 (is a left $\mathbb{C}G$-module.) 一个诱导表示. (${}_RM_S \otimes_S N$ is a left R-module) 记为 $\underline{\rho_H^G}$. 简记为 $\underline{\rho^G}$. $\underline{V_H^G}$.

下面来分析诱导表示的结构.

维数 ⇝ 基 ⇝ $g\in G$ 在这组基下的矩阵.

2.1. 维数.

设 $[G:H] = \ell$, $\dim V = n$.

引理: $\dim V_H^G = \ell\cdot n$.

证明: 取 G/H 的一组代表元, i.e. 一组左陪集代表元为 $\{g_1, g_2, \cdots, g_\ell\}$. 则 $G = g_1H \cup g_2H \cup \cdots \cup g_\ell H$.

$\Rightarrow \mathbb{C}G = \mathbb{C}g_1H \oplus \mathbb{C}g_2H \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}g_\ell H$. (作为线性空间)

进一步地, 作为右 $\mathbb{C}H$-module, 也有上述的分解.

显然 $\mathbb{C}g_iH \cong \mathbb{C}H$ 作为右 H-模. 则

$V_H^G = \mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} V = (\mathbb{C}g_1H\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}g_\ell H)\otimes_{\mathbb{C}H} V$

$\cong \underbrace{(\mathbb{C}H\oplus\mathbb{C}H\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}H)}_{\ell}\otimes_{\mathbb{C}H} V \cong \bigoplus_{\ell\text{个}} \mathbb{C}H\otimes_{\mathbb{C}H} V \cong \bigoplus_{\ell\text{个}} V.$ $\quad\therefore \dim V_H^G = \ell\cdot\dim V.$ □

2.2. 基.

引理: 令 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 为 V 的一组基. $g_1, g_2, \dots, g_l$ 为一组左陪集代表. 则 $\{g_i\otimes v_j \mid 1\le i\le l, 1\le j\le n\}$ 为 V_H^G 的一组基.

证明. 只需证 V_H^G 中的每一个元素均可由 $\{g_i\otimes v_j \mid 1\le i\le l, 1\le j\le n\}$ 线性表出.

取 V_H^G 的一个元素 $g\otimes v$. ∵ $\exists!\ 1\le s\le l$, s.t. $g\in g_sH$.

∴ $g = g_s h$ for some $h\in H$. $g\otimes v = g_sh\otimes v = g_s\otimes h.v$ $\quad h.v\in V$. $\exists\, k_1\dots k_n$ s.t. $h.v = k_1v_1+\dots+k_nv_n$.

$= g_s\otimes \sum_{j=1}^n k_j v_j = \sum_{j=1}^n k_j g_s\otimes v_j$. $g\otimes v$ 由 $\{g_i\otimes v_j\}$ 线性表出 □

2.3. 作用的形式.

例3. ① 取 H 的正则表示. $\mathbb{C}H$ 的诱导表示. $\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H}\mathbb{C}H \cong \mathbb{C}G$ ∴ 诱导表示就是 $\mathbb{C}G$ 的正则表示.

② $S_3 < S_4$ 选择 S_3 的二维不可约表示 V. 则 $\dim V_{S_3}^{S_4} = 8$. 一定不是不可约的. $V_{S_3}^{S_4}$ 一定能写成不可约表示的直和. Q: $V_{S_3}^{S_4}$ 是哪些不可约表示的直和?

如2.2. 令 $\{g_i\otimes v_j \mid 1\le i\le l, 1\le j\le n\}$ 为 V_H^G 的一组基. $\rho: H\to GL_V$, $h\mapsto (v_1\dots v_n)\mapsto (\dots)$, $(a_{ij}(h))_{n\times n}$.

定义 $\dot a_{ij}(g) = \begin{cases}0 & g\notin H\\ a_{ij}(g) & g\in H.\end{cases}$

分析: $g\cdot(g_i\otimes v_j) = gg_i\otimes v_j \xlongequal{\exists!\, s,\ h\in H} g_sh\otimes v_j = g_s\otimes h.v_j = g_s\otimes(a_{1j}(h)v_1 + a_{2j}(h)v_2+\dots+a_{nj}(h)v_n)$

$= g_s\otimes\sum_{k=1}^n a_{kj}(h)v_k$.

s 的条件: $gg_i = g_sh \Leftrightarrow g_s^{-1}gg_i = h$. s 满足 $\boxed{g_s^{-1}gg_i\in H}$

记 $\dot\rho(g) = (\dot a_{ij}(g))$

则 橙色的部分 $= \sum_{s=1}^l g_s\otimes\sum_{k=1}^n \dot a_{kj}(g_s^{-1}gg_i)v_k$

取 V_H^G 的一组基

$g\cdot(g_1\otimes v_1, g_1\otimes v_2, \dots, g_1\otimes v_n, g_2\otimes v_1, g_2\otimes v_2, \dots, g_2\otimes v_n, \dots, g_l\otimes v_n) = (\dots\dots)$

$\dot\rho(g_1^{-1}gg_1)$: $\begin{pmatrix}\dot a_{11}(g_1^{-1}gg_1) \\ \dot a_{21}(g_1^{-1}gg_1) \\ \vdots \\ \dot a_{n1}(g_1^{-1}gg_1)\end{pmatrix}$, $\dot\rho(g_2^{-1}gg_1)$: $\begin{pmatrix}\dot a_{11}(g_2^{-1}gg_1) \\ \dot a_{21}(g_2^{-1}gg_1) \\ \vdots\end{pmatrix}$, $\dot\rho(g_i^{-1}gg_j)$, $ln\times ln$

$g\cdot g_1\otimes v_1 = \sum_{s=1}^l g_s\otimes\sum_{k=1}^n \dot a_{k1}(g_s^{-1}gg_1)v_k$

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}(g_1^{-1}gg_1) & \dot{\rho}(g_1^{-1}gg_2) & \cdots & \dot{\rho}(g_1^{-1}gg_e) \\ \dot{\rho}(g_2^{-1}gg_1) & \dot{\rho}(g_2^{-1}gg_2) & \cdots & \dot{\rho}(g_2^{-1}gg_e) \\ \vdots & \vdots & & \\ \dot{\rho}(g_e^{-1}gg_1) & \dot{\rho}(g_e^{-1}gg_2) & \cdots & \dot{\rho}(g_e^{-1}gg_e) \end{pmatrix}$$

2.4. 特征标.

令 χ_V 为 R[H]-表示 V 的特征标. 记为:

$$\dot{\chi}_V(g) = \begin{cases} 0 & g \notin H \\ \chi_V(g) & g \in H. \end{cases}$$

则诱导表示的特征标为 $\chi_{\rho^G}(g) = \sum_{s=1}^{e} \dot{\chi}(g_s^{-1}gg_s)$

引理: 1) $g \notin \bigcup g_s H g_s^{-1}$, 则 $\chi_{\rho^G}(g) = 0$

2) 如果 $H \triangleleft G$, 则 $g \notin H \Rightarrow \chi_{\rho^G}(g) = 0$.

3) 如果 $H \subseteq Z(G)$ (G 的中心), 则 $\chi_{\rho^G}(g) = [G:H]\dot{\chi}(g)$.

证明: 1) $g \notin \bigcup g_s H g_s^{-1} \Rightarrow \underbrace{g_s^{-1}gg_s}_{} \notin H. \Rightarrow \chi_{\rho^G}(g) = 0$.

2) $\bigcup g_s H g_s^{-1} = H$. 由1)可得.

3) H 满足 2) 的条件. ∴ $g \notin H$. $\chi_{\rho^G}(g) = 0$.

当 $g \in H$. $\chi_{\rho^G}(g) = \sum_{s=1}^{e} \dot{\chi}(g_s^{-1}gg_s) = \sum_{s=1}^{e} \dot{\chi}(g) = [G:H]\,\dot{\chi}(g)$ □

缺点: 特征标的表达式依赖于陪集代表元的选择.

为此: $\sum_{x\in G} \dot{\chi}(x^{-1}gx) = \sum_{s=1}^{e} \sum_{h\in H} \dot{\chi}((g_s h)^{-1} g\, g_s h) = \sum_{s=1}^{e} \sum_{h\in H} \underbrace{\dot{\chi}(h^{-1}g_s^{-1}gg_s h)}_{} = |H| \sum_{s=1}^{e} \dot{\chi}(g_s^{-1}gg_s)$ ($\dot{\chi}$ 是 H 上的类函数)

∴ $\chi_{\rho^G}(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x\in G} \dot{\chi}(x^{-1}gx)$. 不依赖于代表元的选择.

例: $S_3 < S_4$. V 二维表示 (S_3 的).

$\dim V_{S_3}^{S_4} = 8$.

S_4 中的共轭类的代表元: (1). (12), (123), (12)(34), (1234).

S_3	(1)	(12)	(123)
χ_V	2	0	-1

- $\chi_{\rho^G}((1)) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G} \dot{\chi}(x^{-1}\underset{(1)}{g}x) = [G:H]\,\dot{\chi}((1)) = 4\cdot 2 = 8$.
- $\chi_{\rho^G}((12)) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G} \dot{\chi}(\underbrace{x^{-1}gx}_{}) = \frac{1}{6}\sum_{x\in G}\dot{\chi}(x^{-1}gx) = \frac{1}{6}\sum_{x\in G}\dot{\chi}(\underbrace{(x(1), x(2))}_{}) = 0$

$\boxed{\sigma(i_1 i_2 \cdots i_k)\sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_k))}$ → 对称群中共轭类的形式.

- $\chi_{\rho^G}((123)) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\chi}(x^{-1}gx) = \frac{1}{6}\sum_{x\in G}\dot{\chi}((x(1),x(2),x(3))) = \frac{1}{6}\sum_{x\in H}\dot{\chi}((x(1)x(2)x(3)))$ 　只有当 $x\in \underline{S_3}$ 时, $\dot{\chi}((x(1)x(2)x(3)))$ 可能不为0. 其余均为0

$= \frac{1}{6}\times(-6) = -1$.

- $\chi_{\rho^G}((12)(34)) = \frac{1}{6}\sum_{x\in S_4} \dot{\chi}(x^{-1}(12)(34)x) = 0$
- $\chi_{\rho^G}((1234)) = \frac{1}{6}\sum_{x\in S_4} \dot{\chi}(x^{-1}(1234)x) = 0$

	(1)	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
χ_{ρ^G}	8	0	-1	0	0

	(1)	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)
χ_3	2				
χ_4	3				
χ_5	3				

S_4

$\Longrightarrow \chi_{\rho^G} = \chi_3 + \chi_4 + \chi_5$. $\therefore V_{S_3}^{S_4} = V_3 \oplus V_4 \oplus V_5$.

练习: $K_4 = \{(1), (12)(34), (14)(23), (13)(24)\} \lhd S_4$. 取 K_4 的一个不可约表示 — 平凡表示 ρ.

确定 $\rho_{K_4}^{S_4}$.