模论与表示论初步 第十二讲

回顾：诱导表示的定义、构造

§3. 基本性质、Frobenius互反律(Reciprocity).

3.1. 简单性质.

命题：$H<G$ 子群.

1) 如果 $W_1\subset W$ 是群 H 的子表示，则 $W_{1,H}^G$ 是 W_H^G 的子表示；

2) 如果 $H\leq K\leq G$ 子群链，则 $(W_H^K)_K^G = W_H^G$.　$\left((W_H^K)_K^G \cong \mathbb{C}G\underset{\mathbb{C}K}{\otimes}(\mathbb{C}K\underset{\mathbb{C}H}{\otimes}W) \cong \mathbb{C}G\underset{\mathbb{C}H}{\otimes}W.\right)$

探讨诱导表示的构造法与常用构造法之间的关系. 常用构造法：$\oplus, \otimes, (-)^*$.

分析：$H<G$，$U, V\in \text{Rep-}H$ (H的表示). $(U\otimes V)_H^G \overset{?}{\cong} U_H^G\otimes V_H^G$ ×

维数不对！$\dim \text{LHS} = \dim U\cdot\dim V\cdot[G:H]$

$\dim \text{RHS} = [G:H]^2\dim U\cdot\dim V$.

定义：$H<G$. $V\in\text{Rep-}G$. 记 $V|_H$ 为 V 在 H 上的限制表示. 有时简记为 V_H.

类似的记号有：$\rho|_H$, ρ_H, $\chi|_H$, χ_H.

命题：$H<G$. 则

1) $(W_1\oplus\cdots\oplus W_n)_H^G \cong W_{1,H}^G\oplus\cdots\oplus W_{n,H}^G$

2) 令 $U\in \text{Rep}H$, $V\in\text{Rep}G$. 则

$$\boxed{U_H^G\otimes V \cong (U\otimes V_H)_H^G}$$

3) $(W_H^G)^* \cong (W^*)_H^G$

证明：1) $(W_1\oplus\cdots\oplus W_n)^G \cong \mathbb{C}G\underset{\mathbb{C}H}{\otimes}(W_1\oplus\cdots\oplus W_n) \cong \mathbb{C}G\underset{\mathbb{C}H}{\otimes}W_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}G\underset{\mathbb{C}H}{\otimes}W_n$

$\cong W_1^G\oplus\cdots\oplus W_n^G$.

2) $\text{LHS} = U^G\otimes V \cong (\mathbb{C}G\underset{\mathbb{C}H}{\otimes}U)\otimes V$　两个G-模的张量：$g\cdot(-\otimes-) = g\cdot-\otimes g\cdot-$

$\text{RHS} = (U\otimes V_H)^G \cong \mathbb{C}G\underset{\mathbb{C}H}{\otimes}(U\otimes V)$　是一个H-模 $U\otimes V$ 的诱导表示. $g\cdot(g_0\otimes -) = gg_0\otimes -$.

构造：Φ: $\text{RHS}\to\text{LHS}$　$\mathbb{C}G\underset{\mathbb{C}H}{\otimes}(U\otimes V)\longrightarrow(\mathbb{C}G\underset{\mathbb{C}H}{\otimes}U)\otimes V$, $g\otimes u\otimes v\longmapsto g\otimes u\otimes gv$

① Φ 是 well-defined. ✓.

② Φ 显然是满射. (只需找到 $g\otimes u\otimes v$ 的原像即可). 事实上，原像 $g^{-1}v$ 取成 $g\otimes u\otimes g^{-1}v\mapsto g\otimes u\otimes v$.

比较两边的维数，Φ 是双射.

③ Φ 是 G-模同态. 事实上，

$\forall g\in G.\quad \Phi(g\cdot(g_1\otimes u\otimes v)) \stackrel{?}{=} g\cdot\Phi(g_1\otimes u\otimes v)$.

$\Phi(g\cdot(g_1\otimes u\otimes v)) = \Phi(gg_1\otimes u\otimes v) = gg_1\otimes u\otimes gg_1 v$

$g\cdot\Phi(g_1\otimes u\otimes v) = g\cdot(\underline{g_1\otimes u}\otimes \underline{g_1 v}) = g\cdot(g_1\otimes w)\otimes g(g_1 v) = gg_1\otimes u\otimes gg_1 v$. □

3) 单位用表示书写，不显然

$(W^*)^G \cong \mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} W^*$. $\quad (W^G)^* \cong (\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H} W)^*$

来计算特征标：$\chi_{(W^*)^G}(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G} \dot{\overline{\chi}}_W(xgx^{-1})$.

$\chi_{(W^G)^*}(g) = \overline{\chi_{W^G}(g)} = \overline{\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\chi}_W(xgx^{-1})} = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\overline{\dot{\chi}_W(xgx^{-1})} = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\dot{\overline{\chi}}_W(xgx^{-1})$ □

特征标的形式：

推论：① $(\chi_1+\cdots+\chi_n)^G = \chi_1^G+\cdots+\chi_n^G$;

② $\chi^G\lambda = (\chi\lambda_H)^G$. λ是G的某个表示的特征标.

③ $(\overline{\chi})^G = \overline{\chi^G}$.

3.2. Frobenius Reciprocity.

定理：$H<G$. $M\in \mathrm{Rep}H$, $N\in\mathrm{Rep}G$. 则

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(M^G, N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(M, N_H)$$

证明：$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(M^G,N) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\underline{\mathbb{C}G\otimes_{\mathbb{C}H}M}, N)$ $\qquad$ $\mathrm{Hom}_R({}_R R_R, M)\cong M$ as left R-module.

$\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(\underline{{}_{\mathbb{C}G}\mathbb{C}G_{\mathbb{C}H}}, N)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}H}(M, N_H)$ □

另一种形式：$H<G$. $M\in\mathrm{Rep}G$. $N\in\mathrm{Rep}H$.

则：$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(M, N^G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}G}(M_H, N)$.

诱导表示与限制表示是彼此伴随.

作业：证明互反律的第二种形式.

特征标的形式：$(\chi^G, \lambda) = (\chi, \lambda_H)$.

第五章 紧群的表示

§1. 拓扑群 (Topological group).

1.1 一点拓扑知识.

概念 • 拓扑空间 (X, τ) 子集族 ① $\emptyset, X \in \tau$. ② 任意并, 有限交 $\in \tau$.

• 子拓扑. 商拓扑. 乘积拓扑.

性质: • 连通性. 道路连通

• 可分性. T_0, T_1, T_2 ... T_2: Hausdorff: ⊙⊙

• 可数性.

• 紧性 (Compactness).

定义: 如果拓扑空间X的任一开覆盖均包含一个有限子覆盖, 则X为紧的.

$(\bigcup X_\alpha = X)$

说明: ① $\mathbb{R}^n$ (或 $\mathbb{C}^n$) 的子集X是紧的 $\Longleftrightarrow$ X是一个有界闭集.

② Hausdorff 空间里的紧集都是闭的.

③ 紧空间的闭集还是紧的.

④ $X \times Y$ 是紧的 $\Longleftrightarrow$ X, Y 紧.

连续映射: 开集的原像是开集.

说明: ① 紧集的连续像依然是紧的.

② 紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射是闭映射.

1.2 拓扑群.

定义: 1. 群 G 称为拓扑群如果 ① G 是 Hausdorff 空间. ② 群运算是连续的. 即: $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$, $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ 是连续的.

2. 拓扑群 G 称为一个紧群如果 G 还是紧的.

例子. ① $(\mathbb{R}, +)$ 拓扑群.

② $(\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ 拓扑群.