模论与表示论初步 第十三讲

例：$(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

$GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{R})$ (特殊线性群), $SL_n(\mathbb{C})$.

$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid AA' = I_n\}$. (正交群).

$U_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A\bar{A}' = I_n\}$ (酉群, Unitary Group).

哪些是紧的？ 欧氏空间中一子集紧 $\Leftrightarrow$ 有界闭的.

$GL_n(\mathbb{R})$. 不紧. $\because$ GL_n 的行列式可以任意的大

类似地，SL_n 也不紧.

O_n，U_n 都是紧的. (仅对 O_n 进行说明. $AA' = I_n$. 这是一个闭的条件. 下面只需证有界即可.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ a_{12} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$. $AA' = I_n \Rightarrow a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 1$. $\Rightarrow |a_{ik}| \le 1$. $\forall\, k, i \le n$. $\therefore$ 有界.)

O_n 是连通的吗？

No! $\det: O_n \longrightarrow \mathbb{R}^*$. 连续函数 $AA' = I_n \Rightarrow \det(A) = 1$ or $\det(A) = -1$.

$\det: O_n \longrightarrow \pm 1$. 后者不是连通的. $\therefore$ O_n 也不是连通的.

$SO_n := \{A \in O_n \mid \det(A) = +1\}$.

SO_n 连通吗？

思考题：证明 SO_n 是 GL_n 的一个极大连通紧子群！

1.3. 拓扑群之间的同态.

定义：设 G_1、G_2 是两个拓扑群. 群同态 $f: G_1 \to G_2$ 称为一个拓扑群的同态如果 f 还是连续的.

例：① $\det: GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$.

$|AB| = |A||B|$.

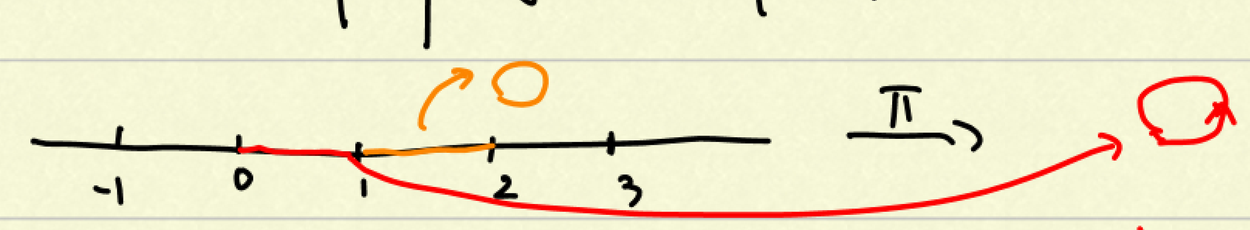
② $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le 2\pi\}$. $e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

这样的话. S^1 是一个群. 单位圆群. (华罗庚先生：从单位圆谈起).

这是一个紧群.

$\pi: (\mathbb{R},+) \longrightarrow S^1$, $a \mapsto e^{a2\pi i}$

这是拓扑群同态. $\operatorname{Ker}\pi = \mathbb{Z}$. Closed.



Covering map.

π 还是一个开映射. $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

③. $p_n:\ S^1 \longrightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. $e^{2\pi i\theta} \mapsto e^{n2\pi i}$. $0\leq\theta\leq1$

拓扑群的同态定理:

定理: 设 $f: G_1 \to G_2$ 的拓扑群同态. 如果 f 是开映射. 则 $\ker f \lhd G_1$ 是闭子群. 且我们有

拓扑群同构: $G_1/\ker f \cong \mathrm{Im} f$. (完).

(if G/H is top gp, $I\in G/H$ is closed $\Rightarrow$ H closed. $G \xrightarrow{\pi} G/H$ 开)

§2. 紧群上的不变积分 (Haar 积分. Haar 测度).

2.1. Haar 积分的定义.

定义: 设 G 是一个紧群 如果对定义在 G 上的每个实值连续函数 $f(x)$. 都存在一个实数, 记为 $\int_G f(x)dx$, 满足

i) 线性性: $\int_G(\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_G f(x)dx + \beta\int_G g(x)dx$. $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. $f(x), g(x)$ G 上的实值连续函数.

ii). 正定性. 如果 $f(x)\geq 0$ $\forall x\in G$. 则 $\int_G f(x)dx\geq 0$ 且 "=" 成立 $\iff$ $f(x)\equiv 0$.

iii) 规范性. $\int_G 1\,dx = 1$.

iv) 左不变性. $\forall f(x)$ 实值连续函数. $\forall g\in G$. 有

$$\int_G f(gx)dx = \int_G f(x)dx$$

v) 右不变性. $\forall f(x)\in C(G,\mathbb{R})$, $\forall g\in G$. 有

$$\int_G f(xg)dx = \int_G f(x)dx.$$

vi) 可逆性. $\forall f(x)\in C(G,\mathbb{R})$. 有

$$\int_G f(x^{-1})dx = \int_G f(x)dx.$$

则称群 G 上存在一个 Haar 积分. (不变积分. Haar 测度).

说明: ① $\int_G - dx \in (C(G,\mathbb{R}))^*$

② 如果 $\int_G - dx \in (C(G,\mathbb{R}))^*$ 满足 i) ii) iii) iv)

则 $\int_G - dx$ 称是一个 Haar 积分. (局部紧. 连续群).

定理: (Haar). 在任一紧群上有且只有一种方式建立 Haar 积分. (证明也可参考上述的文献).

例：① 有限群（对离散拓扑而言）. G.

$\int_G - \,dx \in ((\mathbb{R}G)^*)^* \cong \mathbb{R}G$ （$\mathbb{R}G$ finite-dimensional）

$\boxed{\theta: V \longrightarrow V^{**},\ v \longmapsto \theta(v)(f) = f(v),\ f \in V^*}$

即 $\exists \int \in \mathbb{R}G$. 满足 Haar 积分的 6 个条件.

$\int_G f(\cdot)dx = f(\int)$. 左不变性 就是说：$\int_G f(gx)dx = \int_G f(x)dx \Leftrightarrow f(g\int) = f(\int)\ \ \forall g \in G.\ f \in (\mathbb{R}G)^*$.

即 $g\int = \int\ \ \forall g \in G$. $\boxed{\int = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g}$

$\int_G f(x)dx = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)$.

② S^1. $\int_G f(x)dx := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})d\theta$.

2.3. 复值函数的情形.

对于定义在紧群上的复值连续函数 $f(x)$.

$\Rightarrow f(x) = g(x) + i\,h(x)$. $g(x).\ h(x) \in C(G, \mathbb{R})$.

$\int_G f(x)dx := \int_G g(x)dx + i\int_G h(x)dx$.

§3. 紧群上的 Maschke's 定理.

3.1. Maschke 定理的另种证明方式.

令 G 是一个有限群. V 是一个有限维的实表示. 则

命题：V 是完全可约的 $\Leftarrow$ 存在 G-不变的内积.

说明：V 上的一个双线性函数 $(-,-): V\times V \to \mathbb{R}$. 称为 G-不变的 如果 $\boxed{(g\cdot v_1, g\cdot v_2) = (v_1, v_2)}\ \forall v_1, v_2 \in V$.

如果进一步地，$(-,-)$ 是内积的话. $\rho(g)$ 保持内积不改变. 即 $\rho(g)$ 是一个正交变换.

证明：要证 V 是完全可约的. 只需证 V 的任一子表示都是 V 的直和项. $V_1 \subset V$. $V = V_1 \oplus V_2$

令 $V_1 \subset V$ 是 V 的子表示. 令 $V_2 = V_1^{\perp} = \{v \in V \mid (v, V_1) = 0\}$. Claim: $V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$.

根据线代的知识. $V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$ as 线性空间.

只需证 $V_1^{\perp}$ 也是 G 的表示即可. $\forall v_2 \in V_1^{\perp}.\ g \in G$. 只需证 $g\cdot v_2 \in V_1^{\perp}$.

$(g\cdot v_2, V_1) \overset{G\text{-不变}}{=} (v_2, g^{-1}\cdot \underline{V_1}) = (v_2, V_1) = 0$.

$\therefore g\cdot v_2 \in V_1^{\perp}$. □

说明：V 上总存在 G-不变的内积. 事实上，取 V 上随便一个内积 $(-,-)$. 构造

$\langle u, v\rangle := \sum \frac{1}{|G|}(g\cdot u, g\cdot v)$. 显然是 G-不变的.

Maschke 定理的另一种表述形式:

① 有限群的有限维实表示都是正交表示(即表示 V 上存在 G-不变的内积).

② 有限群的有限维复表示都是酉表示(Unitary Representation, 即 V 上存在 G-不变的复内积).

3.2. 紧群上的 Maschke 定理.

定理: 设 G 是一个紧群. 则

① G 的所有有限维实表示都是正交表示;

② G 的所有复表示(有限维)都是酉表示

证: 只证明①. ②是类似的. 设 V 为 G 的一个有限维实表示. 只需证 V 上存在一个 G-不变的内积. 任取 V 上一个内积 $(\,,\,)$.

$\forall u, v \in V$. 造一个函数

$$f_{u,v}: G \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g \longmapsto (g \cdot u, g \cdot v).$$

定义: $\langle u, v \rangle := \int_G f_{u,v}(x)\,dx.$

故 $\langle -, - \rangle$ 是一个 G-不变的内积. □

3.0 拓扑群的表示.(最好放在第一小节的最后).

定义: 设 G 为个拓扑群. 则称拓扑群同态 $\rho: G \to GL_n$ 为 G 的一个 n 维表示. 也记为 ρ.

说明: 设 V 为一个 n 维线性空间 $GL(V) \simeq GL_n$ 作为拓扑群. 有时也用 $G \to GL(V)$ 来 denote 一个表示. 也称 V 为一个 G-模.

作用的信息: $G \times V \to V$ 还需要连续的.